

**PÍSEMNÁ ČÁST ZKOUŠKY Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 2A,  
KÓD NMA003, ZIMNÍ SEMESTR 2010–2011, TEST A**

LUBOŠ PICK

**Příklad A1.** Dokažte, že vztahy

$$x^2 + 2y^3 + 4u^2 - v = 0$$

$$x^2u^2 + y + 2v = 11$$

definují na jistém okolí bodu  $[x, y, u, v] = [1, 0, 1, 5]$  hladké funkce  $u, v$  proměnných  $x, y$  takové, že  $u(1, 0) = 1$  a  $v(1, 0) = 5$ . Rozhodněte, zda existuje okolí bodu  $[1, 0]$ , na kterém je zobrazení

$$[x, y] \mapsto [u(x, y), v(x, y)]$$

difeomorfismus. **(10 bodů)**

**Příklad A2.** Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4xyz + x + y + z$$

na  $\mathbb{R}^3$ . Pokud existují globální extrémy, určete je. Pokud neexistují globální extrémy, určete  $\sup f$  a  $\inf f$  na  $\mathbb{R}^3$ . **(15 bodů)**

**Příklad A3.** Vyšetřete, na kterém ze tří intervalů  $x \in [0, \infty)$ ,  $x \in (-\infty, 0]$  a  $x \in \mathbb{R}$  konverguje posloupnost funkcí

$$f_n(x) := x^2 \operatorname{arccotg}(n \operatorname{arctg} x), \quad n \in \mathbb{N},$$

stejně a na kterém lokálně stejně. **(15 bodů)**

**Příklad A4.** Nechť funkce  $f$  je definována předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n \cos(\pi n)}{n^2 + x^2}.$$

Určete definiční obor a obor spojitosti funkce  $f$ . Rozhodněte, zda na svém definičním oboru řada konverguje stejně nebo lokálně stejně. Spočtěte  $f'(0)$ , pokud existuje. **(10 bodů)**