První přednáška z analýzy

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

29.9. 2022

Na začátek jeden motivační citát

Odposlechnuto na matfyzu:

Milý Bože, kdyby mi zbývala už jen jediná hodina života, dej, ať ji mohu strávit na přednášce z matematické analýzy. Pak mi bude tato hodina připadat jako věčnost.

(student, jenž si nepřál být jmenován)

A ještě jeden citát (tentokrát varovný)

Dvadsať minút, a nič som sa nedozvedel . . .

(komentář k videozáznamu přednášky)

Představení přednášejícího

Luboš Pick

Základní údaje:

- narozen 15.10.1961 v Praze
- dvě dcery (nestudují matematiku)
- vystudoval GVP a MFF UK
- pracoval na:
    - MÚ ČSAV (Praha)
    - University of Wales (Cardiff)
    - Brock University (St. Catharines, ON)
    - MFF UK

Čím se přednášející zabývá?

- výuka v prvním dvouletí
- výuka ve vyšších stupních:
  - semináře z prostorů funkcí
  - úvod do teorie interpolací
  - vedení prací
- vědecká práce:
  - funkcionální analýza
  - prostory funkcí
  - nerovnosti pro integrální operátory
- president (ČMS)
- překlady
- hudba (Humbuk (country), Asonance (folkrock), The Dirty Raccoons (garážový bluesrock)).

Jak nalézt přednášejícího?

Někdy to není snadné . . .

Jak nalézt přednášejícího?

…ale většinou ano:

- KMA MFF UK, Sokolovská 83, Praha 8
- druhé patro, č. dveří K 256
- 221 913 264
- pick@karlin.mff.cuni.cz
- http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼pick/
- konsultační hodiny kdykoli po domluvě

Představení teamu cvičících

- Miroslav Zelený (doc. RNDr. Ph.D.)
- Michal Johanis (doc. RNDr. Ph.D.)
- Václav Vlasák (RNDr. Ph.D.)
- Kristýna Kuncová (RNFr. Ph.D.)
- Hana Turčinová (RNDr. Mgr.)

Další možnosti

- proseminář
- tutor
- studentští průvodci
- VUS
- speciální služby

ČKD (FAQ)

- Jak oslovovat vyučující?
- Jak získat zápočet a zkoušku?
- Mám chodit na přednášky?
- Mám chodit na cvičení?
- Jaký je dress code na přednáškách, cvičeních, prosemináři a zkouškách z matematické analýzy?
- Jsou na to skripta?
- Co když nedostanu zápočer / neudělám zkoušku?
- Co když neudělám zkoušku podruhé?
- Co když neudělám zkoušku potřetí, pošesté, ...?
- K čemu mi bude matematické vzdělání?
- K čemu mi bude znalost matematické analýzy?
- Jak volit obor dalšího studia?
- Jak kádrovat vědce? (MathSciNet)

Matematiku studovali například:

1) **Lewis Carroll**, spisovatel
2) **Art Garfunkel**, zpěvák
3) **Marek Benda**, politik
4) **Michael Jordan**, sportovec
5) **Philip Glass**, skladatel
6) **Emanuel Lasker**, šachista
7) **Kryštof Eben**, hudebník a bratr
8) **Leon Trockij**, revolucionář
9) **Sir Christopher Wren**, architekt
10) **Igor Němec**, primátor
11) **Ivo Svoboda**, ministr
12) **Eamon de Valera**, prezident
13) **Bram Stoker**, spisovatel

Čím se zabýváme v matematické analýze?

- popisujeme procesy obsahující *pohyb* nebo *změnu*
- krotíme nekonečno

Jak někoho přesvědčit, že je to k něčemu dobré?

Analýza umí dát odpověď například na následující otázky:

- Proč obíhají planety po elipsách?
- Proč se hurikán pohybuje po spirále proti směru hodinových ručiček?
- Lze předpovědět změny úroků a pohyby na burze?
- Po jaké době můžeme bezpečně sáhnout na radioaktivní látku?
- Jak ovlivňují teplé mořské proudy v Tichomoří počasí v Evropě?
- Jak dlouho bude koncentrace léku v pacientově krvi na účinné úrovni?
- Jak se rádiové vlny pohybují prostorem?
- Proč se epidemie šíří nejprve rychle a pak pomalu?
- Jak se ujistit, že v bouři nespadne most?

Algebra a geometrie se hodí k popisu vztahů mezi statickými objekty. My potřebujeme nové matematické operace, ktere umí změřit míru změny.

Zénón z Éleje (490–430)

Jakýkoli pohyb je pouhou ilusí.

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

- *Díogenés ze Sinópé*: neřekl nic a vydal se na vycházku;
- *Aristotelés*: čas není sledem nedělitelných okamžiků;
- *Archimédés*: metoda vyčerpávání a geometrická řada;
- *Tomáš Akvinský*: věc je v pohybu v čase, ale nikoli v každém okamžiku;
- *Henri Bergson*: dráha je dělitelná, ale pohyb nikoli;
- *Hermann Weyl*: prostor není diskrétní (dlaždičkový argument);
- *Bertrand Russell*: pohyb je jen změna polohy v čase, pohyb v okamžiku neexistuje;
- *Nick Huggett*: chyba je v tom, že Zenon předpokládá uzávěr;
- *Peter Lynds*: polohu pohybujícího se tělesa nelze přesně určit.

Achilles a želva

Závod na 100m, želva má 10m náskok, Achilles běží desetkrát rychleji. Náskok želvy:

$$10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \dots$$

Posuďme výpočet

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots$$
$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots$$

Tedy $10S - S = 100$, takže $S = 11\frac{1}{9}$ metru.

Je-li výpočet legální, pak Achilles dožene želvu (a víme, kde).

Ilegální krocení nekonečna

A teď posuďme následující výpočet:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

Potom

$$-S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots,$$

tedy

$$S = 1 - S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}.$$

A nebo taky

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) \dots = 0,$$

případně

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) \dots = 1.$$

Co z toho je správně? A proč jsme na podobné potíže nenarazili u Achilla?

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,
- limita posloupnosti,
- limita funkce,
- spojitost,
- derivace,
- integrál,
- řady čísel,
- mocninné řady,
- metrické prostory,
- Fourierovy řady.

David Bressoud: Toto je správný způsob, jak vnímat analýzu, ale nikoli jak ji učit.

Bressaudovy hlavní námitky

- nedostatek motivace
- rigorózní definice nedávají smysl před seznámením se s nedostatky geometrické intuitivní představy
- není poznat, co přivedlo matematiky k jejich převratným myšlenkám
- vyleštěné moderní důkazy zakrývají omyly starých mistrů
- vzniká mylný dojem, že cesta objevování v matematice je rovná a bezpečná, experimentování není zapotřebí, nejasnosti nevznikají
- učitel si neuvědomuje, že student potřebuje čas na pochopení látky

No tak dobře

Mnohé z toho, co studujeme v matematické analýze, je důsledkem **pařížské krize** z roku 1807.

Pařížská krize v matematice

Krize udeřila *21. prosince 1807.*

Do Francouzského Institutu přinesl 39-letý *Joseph Fourier* (1768-1830) svou práci *Teorie vedení tepla v pevných tělesech*.

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

- ke ztrátám tepla nedochází,
- okraje jsou drženy na konstantní teplotě 0°,
- teplo je dodáváno na jedné z krátkých stran,
- druhá strana je daleko (v nekonečnu).

Fourierův tenký pásek

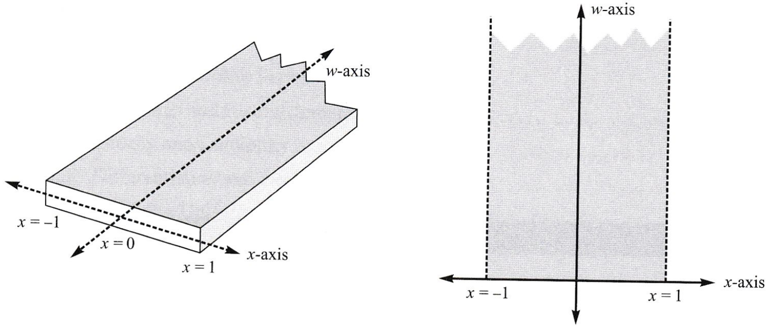


FIGURE 1.1. Two views of Fourier's thin plate.

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota (funkce dvou proměnných),

podmínka: $z(-1, y) = z(1, y) = 0$ pro každé $y > 0$,

$z(x, 0) = f(x)$ ... známá teplota dolního okraje (funkce jedné proměnné).

První a nejdůležitější případ: $z(x, 0) = f(x) = 1$.

Úkol: nalézt stabilní řešení splňující podmínky.

První potíž: co se děje v bodě $[-1, 0]$ (bod nespojitosti)?

Fourier nicméně našel řešení.

Studoval funkce, které klesnou k nule na okolí bodu $[-1, 0]$.

Fourierovo první pozorování

Tvrzení: Nechť

$$f(x) = a_1 \cos(\frac{\pi x}{2}) + a_2 \cos(\frac{3\pi x}{2}) + \cdots + a_n \cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2}).$$

Potom

$$z(x, w) = a_1 e^{-\pi w/2} \cos(\frac{\pi x}{2}) + \cdots + a_n e^{-(2n-1)\pi w/2} \cos(\frac{\pi x}{2})$$

(exponenciála, kosinus, řada funkcí, číslo π).

Šíření tepla v pásku

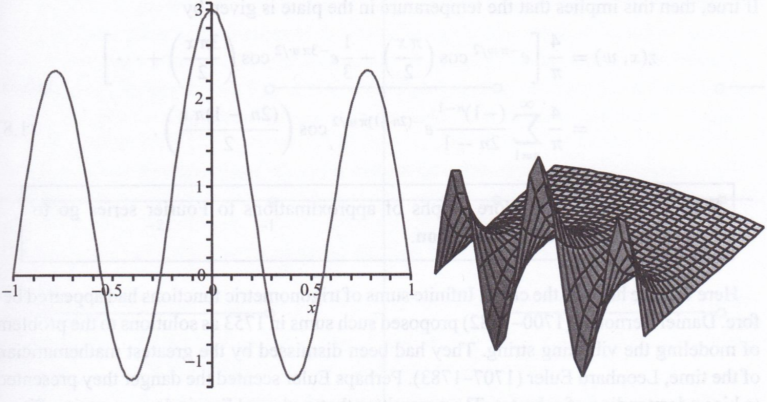


FIGURE 1.2. The functions $f(x)$ and $z(x, w)$.

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru.

To vylučuje $f = 1$.

Idea: co když těch funkcí vezmeme nekonečně mnoho?

Fourierův odvážný krok

$$1 = \frac{4}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \dots\right]$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

Je-li toto pravda, potom

$$z(x,w) = \frac{4}{\pi}\left[e^{-\pi w/2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}e^{-3\pi w/2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \dots\right]$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}e^{-(2n-1)\pi w/2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

(nekonečná řada funkcí).

Fourierova drzá funkce

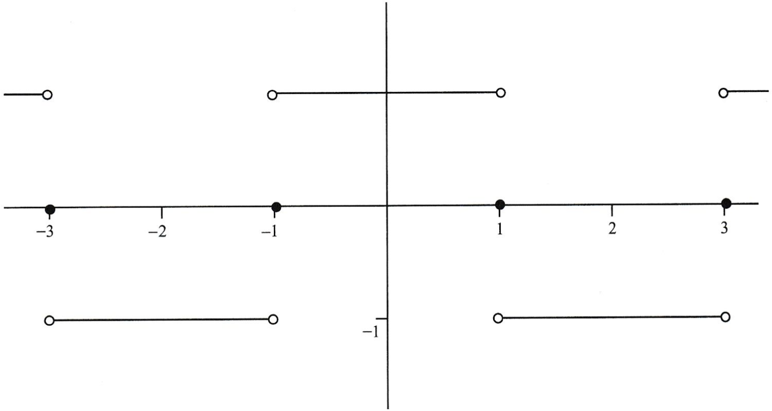


FIGURE 1.3. $f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right]$.

Slavná komis

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)
- Sylvestre Francois Lacroix (42)
- Gaspard Monge (61)
- Siméon Denis Poisson (26)

Lagrangeův útok

Lagrange byl přesvědčen, že Fourierova interpretace je chybná.

Na co to svést?

Nabízela se konvergence.

Chyba bude v konvergenci.

Nebude to konvergovat.

Lagrangeova argumentace: výraz definující f není definován pro všechna x, neboť řada absolutních hodnot koeficientů

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

diverguje. (absolutní konvergence)

Šance pro batole

Fourier tvrdil, že jeho řada konverguje všude.

V roce 1829 se ukázalo, že měl pravdu (Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805–1859).

Nic nového

Na jaře 1808 sepsal Siméon Denis Poisson zprávu komise.

Závěr: práce neobsahuje nic nového ani zajímavého.

Proč?

Kontroversi započal Jean Le Rond (1717–1783).

Později připojil "d'Alembert et de la Chapelle'".

Srovnej James Joseph Sylvester.

Poprask kolem struny

d'Alembert publikoval 1747 rovnici vibrující struny

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

kde

- y je výchylka vibrující struny nad posicí x,
- c je konstanta závisející na délce, napětí a hmotnosti struny,
- t je čas.

K řešení potřebujeme okrajové podmínky, například $y(0,t) = y(\ell,t) = 0$ a potřebujeme znát počáteční stav $y(x,0)$.

Výsledek: jestliže lze $y(x,0)$ popsat lineární kombinací funkcí tvaru $\sin(\frac{k\pi x}{\ell})$, pak řešení bude tvaru

$$y(x,t) = 3\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right) - 2\sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{3\pi ct}{\ell}\right) + \dots$$

Nekonečně mnoho harmonik?

Na d'Alemberta navázal Daniel Bernoulli (1753), který navrhl, že by vibrující struna mohla mít nekonečně mnoho harmonik.

Tuto možnost zavrhl Leonhard Euler s odůvodněním, že řešení by nutně muselo být periodické.

Kam až sahá kontroverse?

1734 George Berkeley: *The Analyst* (abuse of infinity, compensating errors, . . .)

1754 d'Alembert: *différentiel* (článek pro Diderotovu *Encyclopédie*) - poprvé se objevuje pojem limita

1784 Berlínská Akademie vypisuje cenu za *jasnou a precisní teorii nekonečna v matematice*

Simon Antoine Jean L'Huillier (1750–1840)

Sčítání nekonečně mnoha výrazů

"Infinite summation" je oxymoron.

"Infinite" znamená "bez konce".

"Summation" znamená "dosáhnout uzávěru, dosáhnout nejvyššího bodu", . . . ("summit" apod.)

Archimédovské chápání

Kvadratura paraboly, kterou provedl Archimédés ze Syrakus (287-212) metodou Eudoxa z Knidu (408-355).

Metoda vyčerpávání (method of exhaustion).

E.J. Dijksterhuis (1892–1965): nejhorší název na světě.

Archimédovy trojúhelníky

První trojúhelník má plochu 1. Každá další generace trojúhelníků má čtvrtinovou plochu předcházející generace. Postupné aproximace celkové plochy:

$$1,\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64},\ \dots$$

Tedy v n-té generaci máme

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n} \tag{1}$$

Dnešní přístup:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

Přesně to Archimédés *neudělal*.

Archimédův přístup

Označme K "plochu".

Předpokládejme, že $K > \frac{4}{3}$. Nalezneme n takové, že po n-té generaci dosáhneme plochy $> \frac{4}{3}$. Spor s (1).

Nyní předpokládejme, že $K < \frac{4}{3}$. Nalezneme n takové, že $\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} > K$. Spor s tím, že celková plocha nemůže být větší, než plocha vepsaných trojúhelníků.

Zvláštnosti nekonečných součtů

Konečné součty jsou slušně vychované.

Například jsou asociativní.

$$(2+3)-8 = 2+(3-8) = 2+3-8.$$

O nekonečných součtech to nelze říci.

$$1-1+1-1+1-1+\cdots = (1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0,$$

nebo

$$1-1+1-1+1-1+\cdots = 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1+0+0+\cdots = 1.$$

Další podivuhodné vlastnosti

Konečné součty jsou komutativní.

$$2+3-8=2-8+3=-8+2+3.$$

Porovnejme však nekonečné součty

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

a

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots.$$

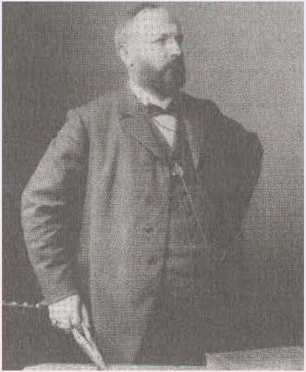
Ohlasy

Ivor Grattan-Guiness (1941–2014):
Moderní pohled na kavalírský přístup matematiků 18. století k nekonečným sumám vzbuzuje dojem, že tito nebozí mužové odkládali své mozky jsouce s nimi konfrontováni.

Eli Maor (*1937):
Takové lehkomyslné a drzé úvahy se nám dnes jeví jako zcela neuvěřitelné.

Morris Kline (1908–1992):
Leibniz uznával, že jeho argumentace je spíše metafyzické než matematické povahy, zároveň však tvrdil, že v matematické analýze existuje více metafyzické pravdy než by se zdálo.

Georg Cantor (1845–1918)



Cantor a nekonečno

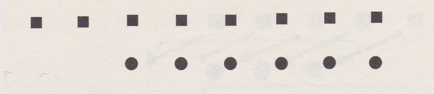
Cantorův objev: *kardinalita* množiny

U konečných množin je to *počet prvků*.

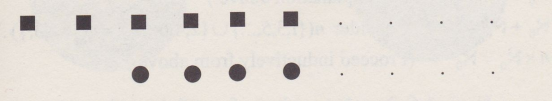
U nekonečných množin . . . ?

Dvě množiny jsou *ekvivalentní*, jestliže mezi nimi existuje *bijekce*.

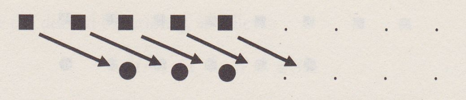
Úskalí práce s nekonečnem



Máme více kostiček než koleček.



Máme více kostiček než koleček?

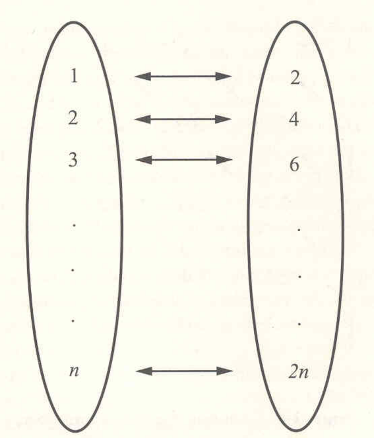


Nemáme!

První Cantorův šok

Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

Příklad: přirozená čísla a sudá čísla.



Co je to nekonečná množina?

DEFINICE (G. Cantor): Množina je *nekonečná*, pokud existuje prosté zobrazení této množiny na některou její *vlastní* podmnožinu.

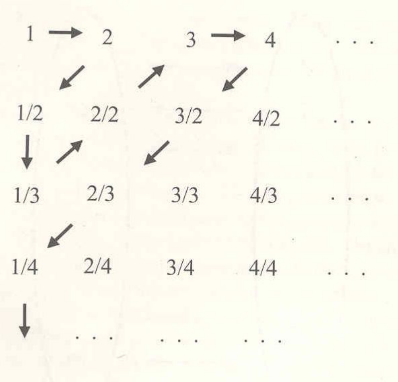
DEFINICE (alternativní): Množina je *nekonečná*, pokud existuje prosté zobrazení z $\mathbb{N}$ do této množiny.

Spočetné množiny

Množiny, mající nejvýše tolik prvků jako $\mathbb{N}$, nazýváme **spočetné**.

Racionálních čísel není více, než přirozených!

Racionální čísla jsou *spočetná*.



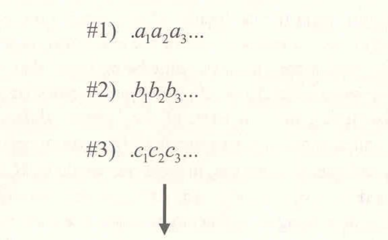
Cantorova věta o potenční množině

Pro libovolnou množinu x má její potenční množina $P(x)$, tedy množina obsahující všechny podmnožiny množiny x, větší mohutnost než x.

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Reálná čísla jsou **nespočetná**.

To vyplývá z *diagonalizační metody*, kterou Cantor vyvinul.


#1) $.a_1a_2a_3\ldots$

#2) $.b_1b_2b_3\ldots$

#3) $.c_1c_2c_3\ldots$

A tedy ...

...existuje více druhů nekonečen!

Cantor dokázal existenci *hierarchie* nekonečen.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Hypotéza kontinua:

$$(c =)2^{\aleph_0} = \aleph_1? \quad (\text{zřejmě platí } \aleph_1 \leq c).$$

Cantor věřil, že ano, ale nedokázal to.

Hypotéza kontinua

Formulace: dopis G. Cantora R. Dedekindovi z 5.11.1882.

Z dopisu G. Cantora G. Mittagu-Lefflerovi (1884): *. . . "důkaz platnosti hypotézy kontinua Vám pravděpodobně zašlu do 14 dnů . . ."*

Hilbertův seznam

David Hilbert (Paříž 1900): 23 nejdůležitějších neřešených matematických problémů.

První místo na seznamu: *hypotéza kontinua*.

Semeniště paradoxů

Burali-Fortiův paradox (1897): Množina všech ordinálních čísel definuje ordinální číslo větší, než libovolný její prvek. Takže množina všech ordinálních čísel není množina.

Cantorův paradox (1899): Nechť S je množina všech množin. Potom $P(S)$ je její podmnožina, takže má nejvýše stejnou mohutnost, jako S.

Russellův paradox (1901): Definujeme množinu všech množin, které nejsou samy sobě svým prvkem. Je tato množina svým vlastním prvkem?

Axiomatisace teorie množin - reakce na paradoxy

Cantor, Zermelo, Fränkel (1908) (dle Eukleidova vzoru)

1) axiom existence množiny
2) axiom extenzionality
3) axiom vydělení
4) axiom dvojice
5) axiom sumy
6) axiom potence
7) axiom nahrazení
8) axiom nekonečna
9) axiom výběru

Kongruence

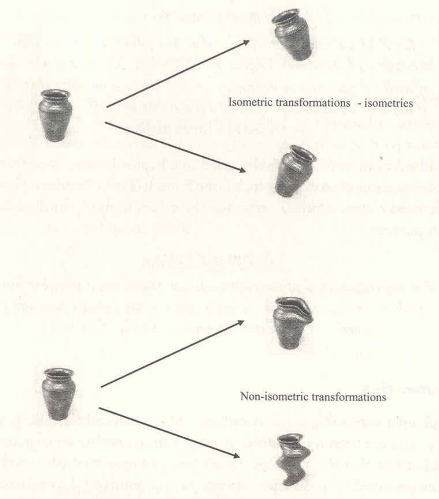
Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady isometrií:

- posun,
- rotace,
- zrcadlení.

Kongruence – ilustrace



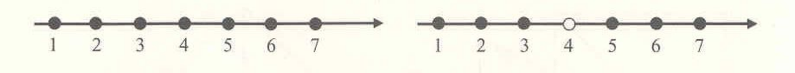
Kongruence po částech

Dva objekty jsou **kongruentní po částech**, lze-li jeden rozložit na sjednocení konečně mnoha částí a z množin jim kongruentních sestavit druhý.

Kongruence po částech – příklady

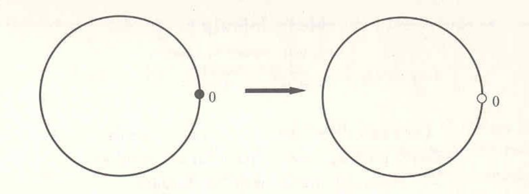
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7 \dots\}$
nejsou kongruentní, ale jsou kongruentní po částech,

protože množina $\{5, 6, 7 \dots\}$ je kongruentní množině $\{4, 5, 6, 7 \dots\}$.

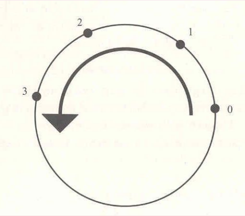


Posun z/do nekonečna

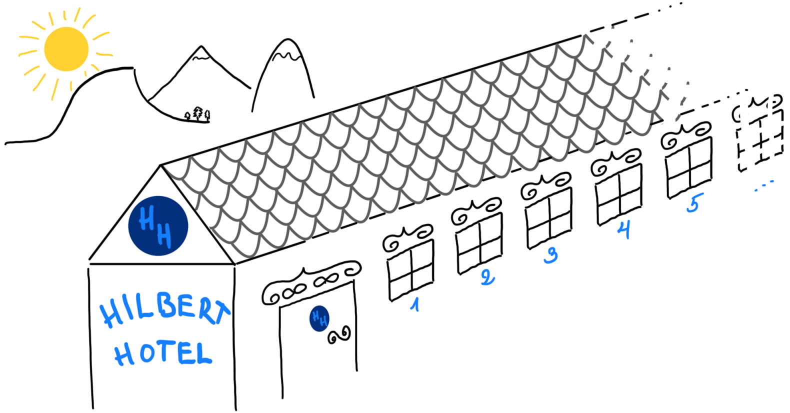
Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.



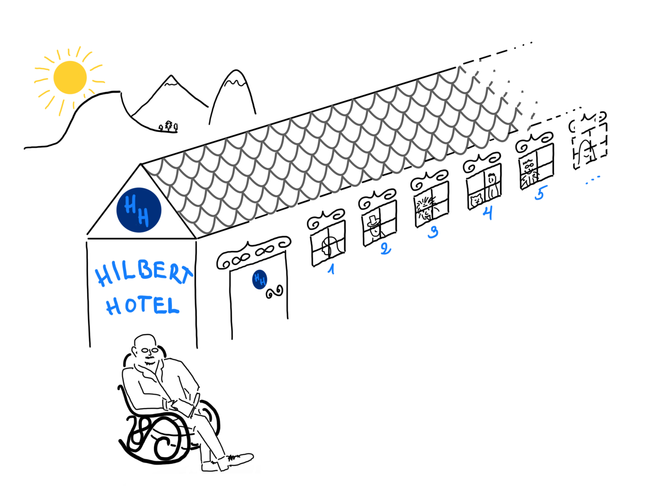
Myšlenka:



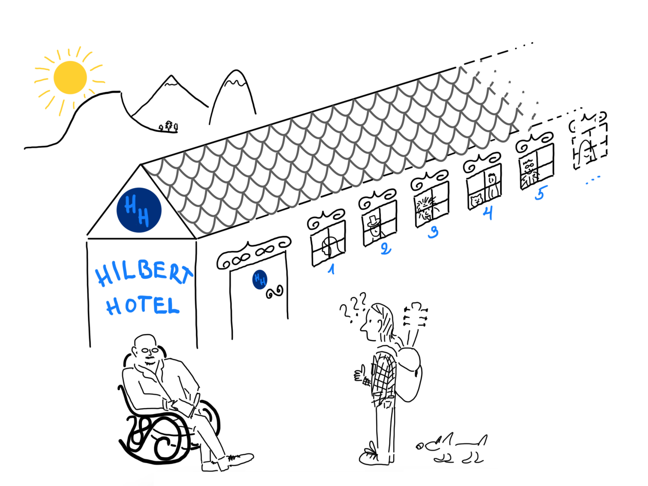
Hilbertův hotel



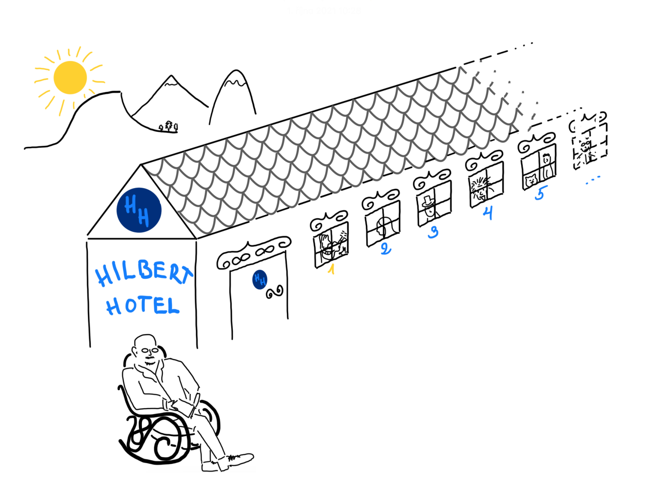
Hotel zcela zaplněn



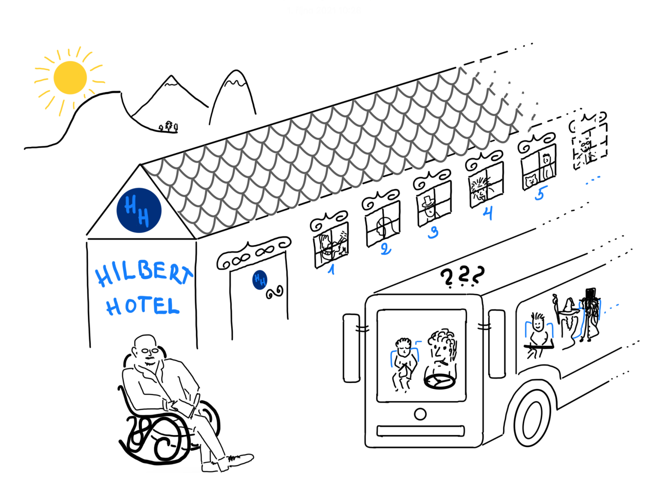
Příchod turisty



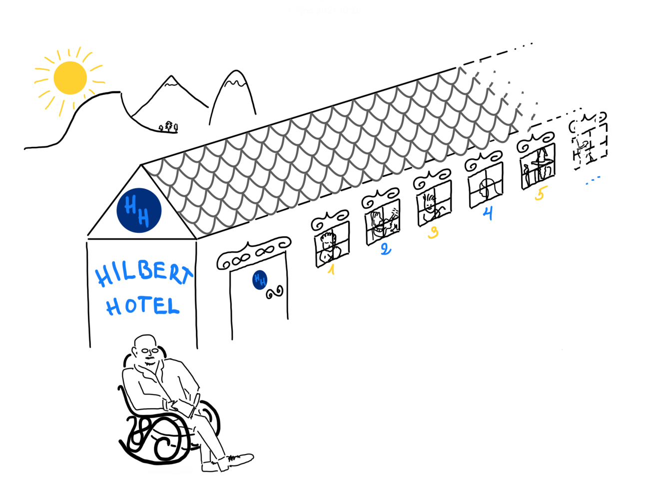
Turista ubytován



Nekonečný bus



Mischief managed



Hotel Infinity

Hotel Infinity

On a dark desert highway – not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done—
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

CHORUS: "Welcome to the HOTEL INFINITY—
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the HOTEL INFINITY—
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number: that frees the
odd-numbered rooms."

(Repeat Chorus)

Last thing I remember at the end of my stay—
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, . . .*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, . . .*

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (platné i neplatné):

LICHOBEZNIK-JE-KONVEXNI-CTYRUHELNIK

LICHOBEZNIK-JE-HLODAVEC

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: **A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,**
Díl B: **B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,**
Díl C: **C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,**
⋮
Díl Z: **Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,**

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Pak zjistí, že jsou všechny díly stejné, takže vydá jen díl A.

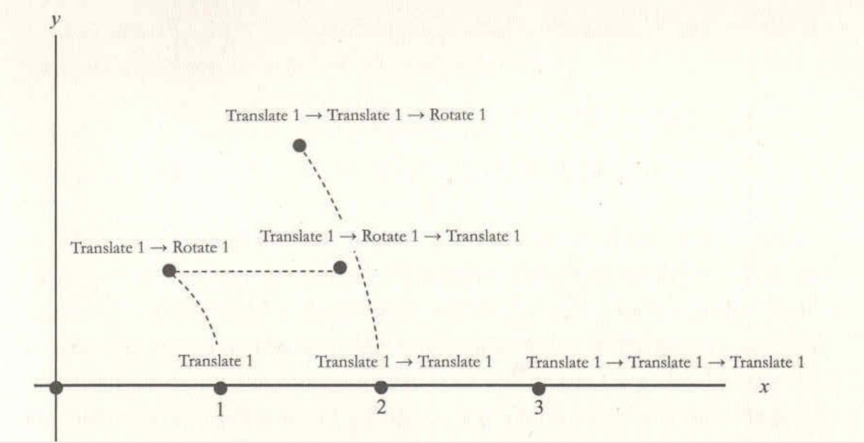
A změní jeho název na **Hyperwebster**.

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox

Wacław Sierpiński: *Lze rozložit nějakou množinu E na disjunktní sjednocení dvou množin E_1 a E_2 tak, aby každá z nich byla kongruentní původní množině?*

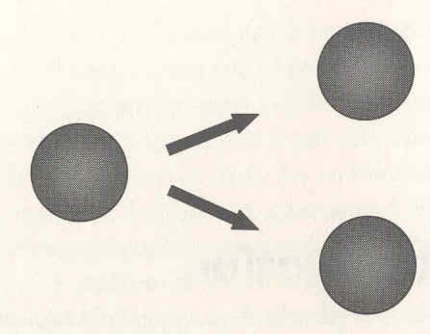
S. Mazurkiewicz: **ANO**

Množina E:


y
Translate 1 → Translate 1 → Rotate 1
Translate 1 → Rotate 1 → Translate 1
Translate 1 → Rotate 1
Translate 1
Translate 1 → Translate 1
Translate 1 → Translate 1 → Translate 1
x
1
2
3

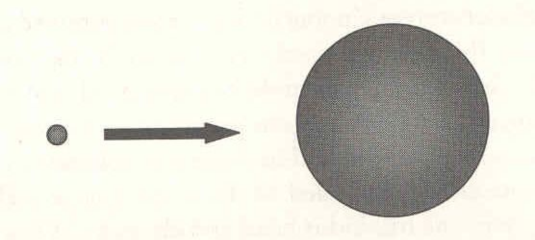
Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

Jednotkovou kouli v 3D lze rozložit na sjednocení konečně mnoha podmnožin a z nich potom složit dvě koule, obě identické s původní koulí.



A tedy

Důsledek. Hrášek a sluníčko jsou po částech kongruentní.



Test, jestli jste dávali pozor

Otázka: Který název filmu je na světě nejblbější?

Odpověď: *Nekonečný příběh II*.

"Lines that are parallel
meet at Infinity!"
Euclid repeatedly
heatedly urged.

Until he died,
and so reached that vicinity;
in it he found
that the damned things diverged.

(Piet Hein (1905–1996): *Grooks VI*)

A na úplný závěr jeden limerick

A conjecture both deep and profound
Is whether a circle is round.
In a paper by Erdős,
Written in Kurdish,
A counterexample is found.

(Anonymous)

The last slide