MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 - ZIMNÍ SEMESTR 2017–2018
PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

15. Metrické prostory II

15.1. Kompaktní metrické prostory.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že P je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti prvků P lze vybrat konvergentní podposloupnost. Řekneme, že množina $K \subset P$ je **kompaktní**, jestliže je metrický prostor (K, ϱ) kompaktní.

Příklad. Nechť P je konečná množina a ϱ je libovolná metrika. Potom je P kompaktní.

Příklad. Každý uzavřený interval je kompaktní v $\mathbb{R}$.

Věta 15.1 (nutná podmínka kompaktnosti)**.** *Jestliže metrický prostor (P, ϱ) obsahuje nekonečnou množinu A splňující*

$$\exists \delta > 0 \ \forall x, y \in A, \ x \neq y : \ \varrho(x, y) \geq \delta,$$

potom není kompaktní.

Příklad. Metrický prostor $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ je kompaktní právě tehdy, když je množina P konečná.

Věta 15.2 (vztah kompaktnosti a uzavřenosti)**.** *Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je uzavřená.*

Poznámka. Opačná implikace ve Větě 15.2 neplatí. Příkladem je nekonečná množina v diskrétním prostoru.

Věta 15.3 (vlastnosti kompaktních množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom*
 (a) *P je omezený,*
 (b) *každá uzavřená množina v P je kompaktní.*

Příklad. Množina $\overline{B(0,1)} = \{f \in C([0,1]);\ \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1\}$ je v prostoru $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$ uzavřená a omezená, ale nikoli kompaktní.

konec 1. přednášky (02.10.2017)

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom žádný z intervalů $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $[a, \infty)$, (a, ∞), $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$ není kompaktní v $\mathbb{R}$.

Věta 15.4 (charakterisace kompaktnosti v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $K \subset \mathbb{R}^n$. Potom K je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

15.2. Spojitá zobrazení na kompaktních metrických prostorech.

Věta 15.5 (spojitý obraz kompaktu)**.** *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, P je kompaktní a $f\colon P \to Q$ je spojitá funkce. Potom je množina $f(P)$ kompaktní v Q.*

Věta 15.6 (nabývání extrémů spojité reálné funkce na kompaktu)**.** *Nechť (P, ϱ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f\colon P \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom f nabývá na P svého maxima i minima.*

Věta 15.7 (omezenost spojité reálné funkce na kompaktu)**.** *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $f\colon P \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom f je na P omezená.*

Definice. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a $f\colon P\to Q$. Řekneme, že funkce f je **stejnoměrně spojitá**, jestliže

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in P,\ \ \varrho(x,y)<\delta\colon \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

Poznámka. Každá stejnoměrně spojitá funkce je spojitá, opačná implikace však neplatí. Příkladem jsou funkce $f(x)=e^x$ na $\mathbb{R}$ nebo $f(x)=\frac{1}{x}$ na $(0,1)$.

Věta 15.8 (vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti na kompaktu)**.** *Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, P je kompaktní a $f\colon P\to Q$ je spojitá funkce. Potom f je stejnoměrně spojitá.*

15.3. **Úplné metrické prostory.**

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků P. Řekneme, že $\{x_n\}$ je **cauchyovská**, jestliže platí

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ \ n,m\geq n_0:\ \ \varrho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

Poznámka. Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Obrácená implikace neplatí. Příkladem je posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$, která je cauchyovská, ale nikoli konvergentní v $(0,1)$.

Definice. Řekneme, že metrický prostor je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost jeho prvků je konvergentní.

konec 2. přednášky (05.10.2017)

Příklady.

(a) $\mathbb{R}$ je úplný,
(b) $(0,1)$ není úplný,
(c) diskrétní metrický prostor je úplný,
(d) $(\mathcal{C}([a,b]),\sup)$ je úplný,
(e) $(\mathcal{C}([a,b]),\mathrm{int})$ není úplný.

Věta 15.9 (vztah kompaktnosti a úplnosti)**.** *Každý kompaktní metrický prostor je úplný.*

Poznámka. Opačná implikace ve Větě 15.9 neplatí. Příkladem je $\mathbb{R}$ nebo nekonečný diskrétní prostor.

Věta 15.10 (vztah úplnosti a uzavřenosti)**.** *Nechť (P,ϱ) je úplný metrický prostor a $M\subset P$. Potom je (M,ϱ) úplný právě tehdy, když M je uzavřená.*

Věta 15.11 (Cantorova)**.** *Metrický prostor je úplný právě tehdy, když pro každou posloupnost jeho neprázdných uzavřených podmnožin $\{F_n\}$ splňující* $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}F_n=0$ *a $F_{n+1}\subset F_n$, $n\in\mathbb{N}$, je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ jednobodová.*

Poznámka. Bez předpokladu $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}F_n=0$ Cantorova věta neplatí. Příkladem je posloupnost $F_n=[n,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$.

Věta 15.12 (charakterisace kompaktních prostorů)**.** *Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, když pro libovolnou posloupnost jeho neprázdných uzavřených podmnožin $\{F_n\}$ splňující $F_{n+1}\subset F_n$, $n\in\mathbb{N}$, je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ neprázdná.*

konec 3. přednášky (09.10.2017)

Definice. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a $f:P\to Q$. Řekneme, že funkce f je **lipschitzovská**, jestliže

$$\exists K>0\ \forall x,y\in P\colon \sigma(f(x),f(y))\leq K\varrho(x,y).$$

Příklad. Každá lipschitzovská funkce je stejnoměrně spojitá.

Příklad. Funkce $f(x)=\sqrt{x}$ je stejnoměrně spojitá ale nikoli lipschitzovská na $[0,1]$.

Příklad. Každé lineární zobrazení $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ je lipschitzovské.

16. Funkce více proměnných

16.1. **Konvexita.**

Definice. Řekneme, že množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro každé její dva body platí, že úsečka, která je spojuje, je obsažena v G.

Věta 16.1 (vztah omezené derivace a lipschitzovskosti)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina v $\mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^m$ má derivaci v každém bodě G a*

$$\sup \{\|f'(x)\|;\, x \in G\} \leq K$$

pro nějaké $K > 0$. Pak f je lipschitzovská s konstantou K, tedy

$$\forall a, b \in G : \ \|f(b) - f(a)\| \leq K\|b - a\|.$$

16.2. **Parciální derivace a diferenciály vyšších řádů.**

Definice. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě a značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$, pokud $i = j$. Obdobně značíme parciální derivace vyšších řádů.

Poznámka. Povšimněte se pořadí symbolů:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a).$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : G \to \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Řekneme, že f je **třídy** $\mathcal{C}^k(G)$, jestliže jsou všechny parciální derivace funkce f až do řádu k včetně spojité na G. Dále značíme $\mathcal{C}^\infty(G) := \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{C}^k(G)$. Funkcemi třídy $\mathcal{C}^0(G)$ rozumíme množinu všech spojitých funkcí na G. Funkce tříd $\mathcal{C}^k(G)$ pro $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ souhrnně nazýváme **hladkými** funkcemi.

konec 4. přednášky (12.10.2017)

Příklad. Zobrazení $\Pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definovaná předpisem $\Pi_i(x) := x_i$, $i = 1, \ldots, n$, jsou třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Poznámka. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená.
(i) Jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$, potom f má totální diferenciál v každém bodě množiny G.
(ii) Zřejmě platí

$$\mathcal{C}^0(G) \supset \mathcal{C}^1(G) \supset \mathcal{C}^2(G) \supset \ldots,$$

přičemž funkcemi třídy $\mathcal{C}^0(G)$ rozumíme spojité funkce na G.
(iii) Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, pak symbolem $f \in \mathcal{C}^k(G)$ rozumíme $f|_G \in \mathcal{C}^k(G)$.
(iv) Pokud $f, g \in \mathcal{C}^k(G)$, potom také $f + g$ a fg patří do $\mathcal{C}^k(G)$. Pokud navíc g je nenulová na G, tak i $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^k(G)$.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{0\}$. Řekneme, že $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^k(G)$, jestliže jeho složky $f_1, \ldots, f_m$ jsou třídy $\mathcal{C}^k(G)$.

Poznámka. Zobrazení $f : G \to \mathbb{R}^k$ třídy $\mathcal{C}^1(G)$ má derivaci v každém bodě množiny G.

Věta 16.2 (skládání zobrazení třídy $\mathcal{C}^k$)**.** *Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{0\}$ a $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Nechť $f : G \to \mathbb{R}^m$, $g : H \to \mathbb{R}^s$ jsou zobrazení po řadě tříd $\mathcal{C}^k(G)$ a $\mathcal{C}^k(H)$ a platí $f(G) \subset H$. Pak zobrazení $g \circ f$ je třídy $\mathcal{C}^k(G)$.*

Věta 16.3 (záměnnost parciálních derivací)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Jestliže obě funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají totální diferenciál v a, potom*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Poznámka. Parciální derivace obecně nejsou záměnné.

konec 5. přednášky (16.10.2017)

Důsledek. *Je-li $f : G \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1(G)$, $a \in G$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Potom*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důsledek. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $k \in \mathbb{N}$, $f : G \to \mathbb{R}$ je třídy $\mathcal{C}^k(G)$, $a \in G$, $\pi : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$ je permutace a $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Potom*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(k)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(a).$$

Poznámka. Zavedení vyšších derivací:

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\\
&f' : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m);\\
&f'' : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m));\\
&f''' : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))\\
&\dots
\end{aligned}$$

Potom platí pro $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, $u, u_1, u_2, v, w \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&L(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m);\\
&L(u)(v) \in \mathbb{R}^m;\\
&L(u)(v + w) = L(u)(v) + L(u)(w);\\
&L(u)(\alpha v) = \alpha L(u)(v);\\
&L(u_1 + u_2)(v) = (L(u_1)(v) + L(u_2)(v));\\
&L(\alpha u)(v) = \alpha L(u)(v).
\end{aligned}$$

Tedy třídu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ lze ztotožnit s třídou všech bilineárních zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

Definice. Nechť $k, n, m \in \mathbb{N}$. Zobrazení $B \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazývá **bilineární**, jestliže pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ jsou zobrazení $u \mapsto B(u, v)$ a $u \mapsto B(v, u)$ lineární. Množinu všech bilineárních zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ značíme $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Poznámka. Pro $B \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ platí

$$B(u, v) = B(\sum_{i=1}^n u_i e^i, \sum_{j=1}^n v_j e^j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j B(e^i, e^j).$$

Lemma 16.4. *Nechť $B \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Potom existuje $C > 0$ takové, že pro každé $u, v \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\|B(u, v)\|_{\mathbb{R}^m} \leq C \|u\|_{\mathbb{R}^n} \|v\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Definice. Nechť $B \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Pak **normou** zobrazení B rozumíme číslo

$$\|B\| = \sup \left\{ \|L(u, v)\|_{\mathbb{R}^m},\ \|u\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1, \|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1 \right\}.$$

Poznámka. Zobrazení $\| \cdot \|$ v předchozí definici je skutečně norma na prostoru $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Definice. Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ a$a \in \mathbb{R}^n$. **Derivací druhého řádu** zobrazení f v bodě a nazýváme bilineární zobrazení B z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ splňující

$$\lim_{h \to o} \frac{\|f'(a + h) - f'(a) - B(h, \cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Značíme $B = f''(a)$.

Věta 16.5 (vztah druhé derivace a totálního diferenciálu)**.** *Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, nechť $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť $B \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je druhou derivací funkce f v a. Potom mají všechny parciální derivace funkce f totální diferenciál v bodě a a pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = B(e^i, e^j).$$

Poznámky. (i) Z předchozí věty plyne jednoznačnost $f''(a)$, a tedy i korektnost tohoto značení.

(ii) Pro $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existuje $f''(a)$ právě tehdy, když existují $f_j''(a)$ pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$.

Věta 16.6 (postačující podmínka pro existenci druhé derivace)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f \colon G \to \mathbb{R}^m$ je třídy $\mathcal{C}^2$ na G. Potom $f''(x)$ existuje pro každé $x \in G$.*

Důsledek (symetrie druhé derivace)**.** *Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom je $f''(a)$ symetrické zobrazení, tj.*

$$f''(a)(u, v) = f''(a)(v, u) \quad \text{pro každé } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

konec 6. přednášky (19.10.2017)

Poznámka. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom je $f''(a)$ bilineární zobrazení reprezentované maticí

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ & \dots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

ve smyslu

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad f''(a)(u, v) = u^T \mathbb{H} v.$$

Podle Důsledku je matice $\mathbb{H}$ symetrická.

Definice. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom matici $\mathbb{H}$ nazýváme **Hessovou maticí**.

Definice. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom **druhým diferenciálem** funkce f v bodě a nazýváme kvadratickou formu $h \mapsto f''(a)(h, h)$.

Definice. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom **Taylorovým polynomem druhého řádu** funkce f v bodě a rozumíme polynom n proměnných

$$T_2^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a, x - a).$$

Věta 16.7 (Lagrangeův tvar zbytku pro 2. řád)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $f : G \to \mathbb{R}$ je třídy $\mathcal{C}^2$ na G, kde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nechť $a, x \in G$. Potom existuje ξ ležící na úsečce spojující body a a x takové, že*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - a, x - a).$$

Věta 16.8 (Peanův tvar zbytku pro 2. řád)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je třídy $\mathcal{C}^2$ na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Potom platí*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_2^{f,a}(x)}{\|x - a\|^2} = 0.$$

16.3. **Věty o implicitních funkcích.**

Věta 16.9 (o implicitně zadané funkci)**.** *Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*
(i) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
(ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,
(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.
Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad \text{kde } j \in \{1, \ldots, n\},\ x \in U.$$

konec 7. přednášky (23.10.2017)

Věta 16.10 (o implicitně zadaných funkcích)**.** *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*
(i) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
(ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = o$,
(iii)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ & \ldots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = o$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$.

konec 8. přednášky (26.10.2017)

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a $f : G \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že v bodě a má funkce f totální diferenciál. **Tečnou nadrovinou** ke grafu f v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{n+1} - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j)\}.$$

Jestliže $n = 2$, pak hovoříme o **tečné rovině**. Je-li $n = 1$, pak hovoříme o **tečné přímce (tečně)**.

16.4. **Lokální extrémy funkcí více proměnných.**

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$, $a \in M$ a f je funkce z P do $\mathbb{R}$ splňující $M \subset D(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **maxima** (**minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall x \in M : \ f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **lokálního maxima** (**lokálního minima**) **na** M, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in B(a, \delta) \cap M : \ f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **ostrého lokálního maxima** (**ostrého lokálního minima**) **na** M, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in (B(a, \delta) \cap M) \setminus \{a\} : \ f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)).$$

Poznámka. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, $f : G \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $a + th \in G$ pro $|t| < \delta$ a definujeme funkci $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(a + th)$. Potom $g'(0) = f'(a)(h)$ a $g''(0) = f''(a)(h, h)$.

Věta 16.11 (nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Pak buď $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$.*

Věta 16.12 (elipticita positivně definitiní kvadratické formy)**.** *Nechť $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je positivně definitní kvadratická forma. Potom*

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n : \ Q(h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

Věta 16.13 (podmínky druhého řádu pro existenci lokálního extrému)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $\nabla f(a) = 0$. Potom platí:*

(i) *je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h,h)$ pozitivně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního minima;*

(ii) *je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h,h)$ negativně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního maxima;*

(iii) *je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h,h)$ indefinitní, pak funkce f nenabývá v bodě a lokálního extrému.*

Poznámka. Je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h,h)$ pouze semidefinitní, pak na základě těchto informací nelze rozhodnout, zda má funkce v daném bodě extrém, případně jakého typu, jak ilustrují příklady $f(x,y) = \pm x^4 \pm y^4$.

konec 9. přednášky (30.10.2017)

Věta 16.14 (Lagrangeova věta o multiplikátorech)**.** *Nechť $m, n \in \mathbb{R}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f, g_1, \dots, g_m : G \to \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$,*

$$M = \{z \in G; \ g_1(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\}$$

a bod $\tilde{z}$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(i) *vektory $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ jsou lineárně závislé;*

(ii) *existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ splňující*

$$\nabla f(\tilde{z}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{z}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{z}) = o.$$

konec 10. přednášky (02.11.2017)

16.5. **Regulární zobrazení.**

Definice. Řekneme, že zobrazení f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ je **difeomorfismus** na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$, jestliže je prosté na U, $W = f(U)$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(U)$ a $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(W)$.

Věta 16.15 (o lokálním difeomorfismu)**.** *Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na jistém okolí V bodu $a \in \mathbb{R}^n$, a $J_f(a) \neq 0$. Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu a takové, že $f|_U$ je difeomorfismus na U.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že zobrazení $f \colon G \to \mathbb{R}^n$ je **regulární**, jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a pro každé $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$.

Věta 16.16 (o vztahu difeomorfismu a regulárního zobrazení)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f \colon G \to \mathbb{R}^n$. Pak f je difeomorfismus na G právě když je f regulární a prosté.*

17. Číselné řady II

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom **kladnou částí** čísla a rozumíme číslo $a^+ = \max\{a, 0\}$. Podobně **zápornou částí** čísla a rozumíme číslo $a^- = \max\{-a, 0\}$. Je-li $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde M je libovolná množina, pak obdobně definujeme **kladnou a zápornou část funkce** f předpisy $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ a $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

Poznámky. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom platí

- $0 \leq a^+, a^- \leq |a|$,
- $a = a^+ - a^-$,
- $|a| = a^+ + a^-$.

17.1. Přerovnání řad.

Definice. Nechť $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Potom řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 17.1 (přerovnání absolutně konvergentní řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní a má stejný součet jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Navíc má řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{p(n)}|$ stejný součet jako $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.*

konec 11. přednášky (06.11.2017)

Věta 17.2 (Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentní řady)**.** *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konvergentní řada a $s \in \mathbb{R}^*$, pak existuje bijekce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s$.*

17.2. Součin řad.

Definice. **Cauchyovým součinem** řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ budeme rozumět řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} b_k \right).$$

Příklad. Položme $a_n = b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, ale jejich Cauchyův součin diverguje.

Věta 17.3 (Mertensova)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Potom jejich Cauchyův součin konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} b_k \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

Věta 17.4 (Abelova)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Potom platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} b_k \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

konec 12. přednášky (09.11.2017)

17.3. **Zobecněné řady.** Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je dáno reálné číslo x_α. Je-li I konečná, pak je součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ dobře definován. V tomto oddílu ukážeme, že součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ lze v jistých případech definovat i pro I nekonečnou, přičemž některé vlastnosti obvyklé pro součet konečně mnoha čísel zůstanou v platnosti. Přístup použitý v tomto oddílu je odlišný od způsobu, jakým jsme definovali součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V definici součtu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jsme totiž podstatným způsobem využili uspořádání sčítaných členů, zatímco pro definici součtu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ žádné uspořádání k dispozici nemáme. Příkladem takového součtu je $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{(n,m)}$.

Značení. Nechť I je množina. Potom symbolem $\mathcal{F}(I)$ označíme množinu všech konečných podmnožin I.

Definice. Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je x_α reálné číslo. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ nazýváme **zobecněnou řadou**. Prvek $x \in \mathbb{R}^*$ nazveme **součtem zobecněné řady** $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(I)\ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(x,\varepsilon).$$

V takovémto případě pak píšeme $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$ a říkáme, že zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **má součet**. Je-li $x \in \mathbb{R}$, je zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **konvergentní**. Pokud není zobecněná řada konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Pokud je konvergentní zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$, nazveme zobecněnou řadu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ **absolutně konvergentní**.

Věta 17.5 (jednoznačnost součtu zobecněné řady)**.** *Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má nejvýše jeden součet.*

Důkaz. Předpokládejme, že dvě různá čísla $x, y \in \mathbb{R}^*$ jsou součtem řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zvolíme $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ splňující

$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_1\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \in B(x,\varepsilon),$$
$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_2\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \in B(y,\varepsilon).$$

Pak pro konečnou množinu $F_1 \cup F_2$ platí

$$\sum_{\alpha\in F_1\cup F_2} x_\alpha \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset,$$

což je spor. □

Poznámka. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ značí jednak zobecněnou řadu, jednak součet této řady, pokud existuje. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ můžeme tedy používat k označení prvku z $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada konverguje. S podobnou dvojznačností jsme se již setkali u nekonečných řad.

Poznámka. Je-li indexová množina I konečná, pak je součet zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ roven obvyklému součtu. Vskutku, je-li $\varepsilon > 0$, pak můžeme položit $F = I$. Potom pro každou $F' \in \mathcal{F}(I)$ splňující $F' \supset F$ platí $F' = I$. Tedy $\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha \in B\big(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \varepsilon\big)$. Pokud $I = \emptyset$, pak klademe $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = 0$. Ve shodě s touto úmluvou platí právě uvedená úvaha o zobecněném součtu i v případě, kdy je I prázdná množina.

Věta 17.6 (linearita zobecněného součtu)**.** *Nechť řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ mají součet. Je-li definován výraz $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha)$ součet a platí*

$$\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha.$$

Je-li $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je definován, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha$ součet a platí

$$\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha = c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

Důkaz. Označme $x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $y = \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$. Důkaz prvního tvrzení provedeme pouze pro případ, kdy $x, y \in \mathbb{R}$, v ostatních případech lze tvrzení dokázat obdobně. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ takové, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1\colon \left|\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2\colon \left|\sum_{\alpha\in F_2'} y_\alpha - y\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $F = F_1 \cup F_2$. Pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme

$$\left|\sum_{\alpha\in F'} (x_\alpha + y_\alpha) - (x+y)\right| \le \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| + \left|\sum_{\alpha\in F'} y_\alpha - y\right| < \varepsilon.$$

Odtud plyne tvrzení.

Dokážeme druhé tvrzení, a to pouze v případě, kdy $x \in \mathbb{R}$. Jestliže $c = 0$, pak je tvrzení zřejmé. Předpokládejme že $c \neq 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F$, pak máme

$$\left|\sum_{\alpha\in F'} cx_\alpha - cx\right| = |c|\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha = cx$.

$\square$

Věta 17.7 (vlastnosti zobecněného součtu)**.** *Pro zobecněnou řadu $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ platí následující tvrzení.*

(a) *Jsou-li čísla x_α, $\alpha \in I$, nezáporná, pak $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má součet a platí*

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(I)\right\}. \tag{1}$$

(b) *Zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ mají vždy součet a platí*

$$\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha| = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-. \tag{2}$$

(c) *Zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má součet právě tehdy, když je definován výraz $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$. V tomto případě pak platí*

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-. \tag{3}$$

Důkaz. (a) Nechť x_α, $\alpha \in I$, jsou nezáporná čísla. Označme

$$s = \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(I)\right\}.$$

Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = s$. Nejprve si povšimneme, že platí

$$\forall F \in \mathcal{F}(I)\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \le s. \tag{4}$$

Mějme nyní dáno libovolné $s' < s$. Z definice suprema nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že $\sum_{\alpha\in F} x_\alpha > s'$. Pak pro libovolnou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F platí

$$\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \ge \sum_{\alpha\in F} x_\alpha > s'.$$

Odtud a z (4) již snadno dostaneme rovnost $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = s$.

(b) Díky (a) mají zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ vždy součet. Rovnost (2) plyne z Věty 17.6(a), neboť $|x_\alpha| = x_\alpha^+ + x_\alpha^-$ a součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ je definován.

(c) Položme $P = \{\alpha \in I; x_\alpha \geq 0\}$, $M = \{\alpha \in I; x_\alpha < 0\}$, $p = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $m = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$. Dokážeme nejprve, že platí

$$p = \sum_{\alpha\in P} x_\alpha \qquad \text{a} \qquad m = -\sum_{\alpha\in M} x_\alpha. \tag{5}$$

Zřejmě platí rovnosti

$$\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^+; F \in \mathcal{F}(I)\Big\} = \Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(P)\Big\}, \tag{6}$$

$$\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^-; F \in \mathcal{F}(I)\Big\} = \Big\{-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(M)\Big\}, \tag{7}$$

a tedy máme

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ &= \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^+; F \in \mathcal{F}(I)\Big\} \\
&= \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(P)\Big\} && \text{(podle (6))} \\
&= \sum_{\alpha\in P} x_\alpha, \\
-\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^- &= -\sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^-; F \in \mathcal{F}(I)\Big\} \\
&= -\sup\Big\{-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(M)\Big\} && \text{(podle (7))} \\
&= \inf\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(M)\Big\} \\
&= \sum_{\alpha\in M} x_\alpha.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nejprve dokážeme, že rozdíl $p - m$ je dobře definován. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tj. $p = m = \infty$. Nechť $F \subset I$ je konečná. Z (5) plyne

$$\sup\Big\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha; G \in \mathcal{F}(P \setminus F)\Big\} = \infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_1 \subset P \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_1} x_\alpha > -\sum_{\alpha\in F} x_\alpha + 1.$$

Z (5) dále plyne

$$\inf\Big\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha; G \in \mathcal{F}(M \setminus F)\Big\} = -\infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_2 \subset M \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_2} x_\alpha < -\sum_{\alpha\in F} x_\alpha - 1.$$

Položíme $F_1 = F \cup G_1$ a $F_2 = F \cup G_2$. Pro každou konečnou množinu $F \subset I$ jsme tedy nalezli $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(I)$, které obsahují F a splňují $\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha > 1$ a $\sum_{\alpha\in F_2} x_\alpha < -1$. Toto je ale ve sporu s předpokladem existence součtu řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Rozdíl $p - m$ je tedy dobře definován.

$\Leftarrow$ Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje podle Věty 17.6.

Rovnost (3) plyne z právě dokázané ekvivalence a Věty 17.6, neboť $x_\alpha = x_\alpha^+ + (-1)\cdot x_\alpha^-, \alpha \in I$. □

Věta 17.8 (srovnávací kritérium pro zobecněné řady). *Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ jsou zobecněné řady s nezápornými členy a nechť platí $y_\alpha \le x_\alpha$ pro každé $\alpha \in I$. Potom součty řad existují a platí $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Jestliže tedy navíc řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$.*

Důkaz. Existence součtů obou řad plyne z Věty 17.7(a). Z nerovností $0 \le y_\alpha \le x_\alpha$, $\alpha \in I$, dostáváme

$$0 \le \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} y_\alpha; F \in \mathcal{F}(I)\right\} \le \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(I)\right\}.$$

Odtud pomocí Věty 17.7(a) ihned plyne dokazovaná nerovnost. Z ní pak snadno vyplývá i tvrzení o konvergenci. □

konec 13. přednášky (13.11.2017)

Věta 17.9 (absolutní konvergence zobecněné řady). *Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je konvergentní právě tehdy, když je absolutně konvergentní. V tom případě jsou též konvergentní řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ a (opět)*

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-. \tag{8}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Podle Věty 17.7(c) platí (8), tedy řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují. Podle Věty 17.7(b) konverguje pak i řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$.

$\Leftarrow$ Pro každé $\alpha \in I$ platí nerovnosti $0 \le x_\alpha^+ \le |x_\alpha|$ a $0 \le x_\alpha^- \le |x_\alpha|$, a proto podle Věty 17.8 řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují. Podle Věty 17.7(c) konverguje tedy i řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. □

Věta 17.10 (přerovnání zobecněné řady). *Nechť má zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ součet a $\pi\colon I \to I$ je bijekce. Potom má součet i řada $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$ a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$.*

Důkaz. Označme s součet řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Položme $G = \pi^{-1}(F)$ a vezměme libovolnou konečnou množinu $G' \subset I$ obsahující G. Pak množina $F' = \pi(G')$ je konečná, obsahuje F a platí

$$\sum_{\alpha\in G'} x_{\pi(\alpha)} = \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Tedy $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)} = s$. □

Věta 17.11 (spočetnost nosiče zobecněné řady). *Nechť zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom*

(a) *Pro každé $c > 0$ je množina je množina $\{\alpha \in I; |x_\alpha| > c\}$ konečná.*

(b) *množina $\{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ je spočetná.*

Důkaz. (a) Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je absolutně konvergentní dle Věty 17.9. Označme $s = \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$I_c = \{\alpha \in I; |x_\alpha| \ge c\}.$$

Máme-li pak libovolnou konečnou množinu $F \subset I_c$, platí pro počet jejích prvků odhad

$$c|F| = \sum_{\alpha\in F} c \le \sum_{\alpha\in F} |x_\alpha| \le s.$$

Tedy množina I_c má nejvýše s/c prvků a je tedy konečná.

(b) Množina $\{\alpha \in I; |x_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty I_{1/n}$ je spočetná. □

Poznámka. Tvrzení (a) Věty 17.11 můžeme chápat jako analogii nutné podmínky pro konvergenci číselné řady.

Pro množinu reálných čísel $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ máme nyní dva různé pojmy součtu jejích prvků. Totiž součet definovaný jako limita částečných součtů a součet zobecněné řady z Definice 17.3. Symboly $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ pro příslušné součty rozlišují použité metody. Následující věta ukazuje jejich vzájemný vztah.

Věta 17.12 (zobecněný součet na $\mathbb{N}$)**.** *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost.*

(a) *Zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je konvergentní právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní. V tomto případě pak platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.*

(b) *Jestliže má zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ součet, má ho i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a tyto součty se rovnají.*

Důkaz. Nezáporné členy: Nechť nejprve $x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sup\left\{\sum_{i\in F} x_i; F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\} \leq \sup\left\{\sum_{i=1}^{\max F} x_i; F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\} \leq \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i; n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$\leq \sup\left\{\sum_{i\in F} x_i; F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\},$$

tedy podle Věty 17.7(a)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sup\left\{\sum_{i\in F} x_i; F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i; n \in \mathbb{N}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Obecný případ:

(a) Podle Věty 17.9 konverguje řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ právě tehdy, když konverguje absolutně, což je podle první části důkazu právě tehdy, když konverguje absolutně řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Navíc z Věty 17.9 dostaneme, že v tom případě konvergují i řady $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^+$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^-$ a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^+ - \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

(b) Díky tvrzení (a) zbývá ověřit případ, kdy je součet zobecněné řady $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nevlastní. Předpokládejme nejprve, že platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \infty$. Zvolme $s \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset \mathbb{N}$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{n\in F'} x_n > s.$$

Položíme $n_0 = \max F$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dostáváme $F \subset \{1, \dots, n\}$, a tedy $\sum_{i=1}^{n} x_i > s$. Tím jsme ukázali, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je ∞.

Případ $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty$ je analogický. □

Poznámka. Neabsolutně konvergentní číselná řada nemůže mít zobecněný součet. Tvrzení (b) Věty 17.12 tedy nelze obrátit.

Věta 17.13 (asociativita zobecněného součtu)**.** *Nechť J je množina a $\{I_\beta; \beta \in J\}$ je systém množin splňující $I_\beta \cap I_{\beta'} = \emptyset$ pro různé indexy $\beta, \beta' \in J$. Nechť $I = \bigcup_{\beta\in J} I_\beta$ a zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom pro každé $\beta \in J$ řada $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$ konverguje. Označíme-li $y_\beta = \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$, $\beta \in J$, pak řada $\sum_{\beta\in J} y_\beta$ konverguje a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\beta\in J} y_\beta$.*

Důkaz. Nezáporné členy: Nechť nejprve $x_\alpha \geq 0$, $\alpha \in I$. Zvolme konečnou množinu $G \subset J$ a konečné množiny $F_\beta \subset I_\beta$, $\beta \in G$. Potom množina

$$F := \bigcup_{\beta\in G} F_\beta$$

je konečná a tedy

$$\sum_{\beta\in G}\sum_{\alpha\in F_\beta} x_\alpha = \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

Přechodem k supremu přes $F_\beta \in \mathcal{F}(I_\beta)$ pro každé $\beta \in G$ (Věta 17.7(a)) dostaneme

$$\sum_{\beta\in G} y_\beta = \sum_{\beta\in G}\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

a přechodem k supremu přes $G \in \mathcal{F}(J)$ konečně

$$\sum_{\beta\in J} y_\beta \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

Naopak, zvolme konečnou $F \subset I$. Pro každé $\beta \in J$ je

$$\sum_{\alpha\in F\cap I_\beta} x_\alpha \le \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha = y_\beta,$$

tedy podle srovnávacího kritéria (Věta 17.8) je

$$\sum_{\alpha\in F} x_\alpha = \sum_{\beta\in J}\sum_{\alpha\in F\cap I_\beta} x_\alpha \le \sum_{\beta\in J} y_\beta.$$

Přechodem k supremu přes $F \in \mathcal{F}(I)$ dostaneme

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha \le \sum_{\beta\in J} y_\beta.$$

Obecný případ: Jestliže zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje, pak podle Věty 17.9 konvergují i zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ a aplikací první části důkazu dostaneme

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ = \sum_{\beta\in J}\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^+, \qquad \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^- = \sum_{\beta\in J}\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^-.$$

Speciálně pro každé jednotlivé $\beta \in J$ tedy konvergují $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^+$ a můžeme položit

$$y_\beta = \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^-.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in I} x_\alpha &= \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ = \sum_{\beta\in J}\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^+ - \sum_{\beta\in J}\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^- \\ &= \sum_{\beta\in J}\left(\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha^-\right) = \sum_{\beta\in J} y_\beta.\end{aligned}$$

□

Poznámka. Ve Větě 17.13 nestačí předpokládat, že konvergují jednotlivé zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$ a řada $\sum_{\beta\in J} y_\beta$. Jestliže $J = \mathbb{N}$, $I_\beta = \{-\beta, \beta\}$ pro každé $\beta \in J$ a $x_\alpha = \alpha$ pro každé $\alpha \in I = \mathbb{Z}$, pak $y_\beta = 0$ pro každé $\beta \in \mathbb{N}$, ale zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ nemá součet.

konec 14. přednášky (16.11.2017)

18. Stejnoměrná konvergence

18.1. **Úvod a základní pojmy.**

Definice. Nechť M je množina, (Q,σ) je metrický prostor, f, f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ **konverguje bodově** k f na M, jestliže $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$, neboli

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Bodovou konvergenci značíme symbolem $f_n \to f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje stejnoměrně** k f na M, jestliže

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Stejnoměrnou konvergenci značíme symbolem $f_n \rightrightarrows f$.

Definice. Nechť (M,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory. Nechť f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** k f na M, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ takové, že $f_n|_{B(x,r)} \rightrightarrows f|_{B(x,r)}$ na $B(x,r)$. Lokálně stejnoměrnou konvergenci značíme symbolem $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$.

Příklady. (a) Nechť $g_n(x) := \frac{1}{2^n}\sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť g je identicky nulová funkce na $\mathbb{R}$. Potom $g_n \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$.

(b) Nechť $f_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1); \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Potom $f_n \to f$, ale $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0,1]$. Navíc $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $[0,1)$, ale nikoli na $[0,1]$.

Poznámka. Rovnost $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ obecně neplatí. Například pro $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, máme $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1-} x^n = 1$, ale $\lim_{x\to 1-}\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Věta 18.1 (Mooreova–Osgoodova)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a nechť funkce f_n, f, $n \in \mathbb{N}$, z P do $\mathbb{R}$ splňují*

(a) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $(B(x_0,r) \setminus \{x_0\})$ *pro nějaké* $r > 0$,

(b) $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$, *přičemž* $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny.*

konec 15. přednášky (20.11.2017)

Poznámka. Nechť M je množina, (Q,σ) je metrický prostor a f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Potom posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně k f na M právě tehdy, když existují $\varepsilon > 0$, rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ a posloupnost $\{x_k\}$ prvků M splňující

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \sigma(f_{n_k}(x_k), f(x_k)) \geq \varepsilon.$$

Věta 18.2 (charakterisace stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí)**.** *Nechť M je neprázdná množina, (Q,σ) je metrický prostor, $f_n\colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$, a $f\colon M \to Q$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na M právě tehdy, když*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} = 0.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Pak tedy pro každé $n \geq n_0$, platí

$$0 \leq \sup\{\sigma(f_n(x), f(x)); x \in M\} \leq \varepsilon.$$

Odtud plyne tvrzení.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$, platí

$$\sup\{\sigma(f_n(x), f(x)); x \in M\} < \varepsilon.$$

Potom zřejmě pro každá $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí

$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na M. □

Věta 18.3 (vztah stejnoměrné konvergence a spojitosti)**.** *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f_n \colon P \to Q$ jsou spojitá zobrazení, $n \in \mathbb{N}$, $f \colon P \to Q$ je zobrazení a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na P. Potom f je spojité.*

Důkaz. Zvolme $a \in P$. K němu nalezneme $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows$ na $B(a, r)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in B(a, r) \colon |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

K tomuto n_0 dále nalezneme $\delta \in (0, r)$ takové, že

$$\forall x \in B(a, \delta) \colon |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $x \in (a, \delta)$ platí

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| < 3\varepsilon.$$

Funkce f je tedy spojitá v bodě a. Protože bod a byl zvolen libovolně, je f spojitá na P. □

Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že funkce $f \colon P \to Q$ je **první Baireovy třídy** na P, jestliže existuje posloupnost spojitých funkcí $f_n \colon P \to Q$, která bodově konverguje k funkci f na P.

Příklady. (a) Každá spojitá funkce je 1. Baireovy třídy.

(b) Funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = 1 \\ 0 & \text{pokud } x \in [0, 1), \end{cases}$$

je 1. Baireovy třídy, ale není spojitá.

Věta 18.4 (charakterisace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f_n \colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) právě tehdy, když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$, kde $c, d \in (a, b)$, $c < d$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $c, d \in (a, b)$. Pro každé $x \in [c, d]$ existuje otevřený interval $I_x \subset (a, b)$ takový, že $x \in I_x$ a $f_n \rightrightarrows f$ na I_x. Potom

$$[c, d] \subset \bigcup_{x \in (a,b)}^{k} I_x.$$

Podle Borelovy věty (Věta 2.23) existují body $x_1, \dots, x_k \in [c, d]$ takové, že $[c, d] \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_{x_j}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ platí

$$\forall x \in I_{x_i}\ \forall n \geq n_i \colon |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Položme $n^* = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Potom pro každé $n \geq n^*$ a každé $x \in I_{x_i}$ platí $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$.

$\Leftarrow$ Pro $x_0 \in (a, b)$ nalezneme $r > 0$ takové, že $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (a, b)$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $(x_0 - r, x_0 + r)$. □

Definice. Nechť M je množina a $g_n \colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{g_n\}$ je **cauchyovská** na M, jestliže v každém bodě $x \in M$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, tedy

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že posloupnost $\{g_n\}$ je **stejnoměrně cauchyovská** na M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in M : |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

Věta 18.5 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť M je množina a $g_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{g_n\}$ je stejnoměrně konvergentní na M právě tehdy, když je stejnoměrně cauchyovská na M.*

Důkaz. $\Leftarrow$ Pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, a má tedy vlastní limitu, kterou označíme symbolem $g(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí

$$\forall x \in M\colon |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

Protože $\lim_{m\to\infty} g_m(x) = g(x)$, dostáváme odtud

$$\forall x \in M\colon |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{g_n\}$ je tedy stejnoměrně konvergentní na M.

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\forall x \in M\colon |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Nechť $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$. Potom

$$\forall x \in M\colon |g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g(x)| + |g(x) - g_m(x)| < 2\varepsilon,$$

a tedy je posloupnost $\{g_n\}$ stejnoměrně cauchyovská na M. □

konec 16. přednášky (23.11.2017)

Věta 18.6 (stejnoměrná konvergence derivací)**.** *Nechť (a, b) je omezený interval, $f_n\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť*

(i) *f_n má vlastní derivaci na intervalu (a, b) pro každé $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že posloupnost reálných čísel $\{f_n(x_0)\}$ je konvergentní;*

(iii) *$\{f'_n\}$ konverguje stejnoměrně k nějaké funkci na (a, b).*

Potom existuje funkce f taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), f má vlastní derivaci na (a, b) a platí $f'_n \rightrightarrows f'$ na (a, b).

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci limitní funkce f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0,\ \forall x \in (a, b)\colon |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$$

(to je možné díky Větě 18.5) a zároveň

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0, : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon.$$

Potom pro libovolné $x \in (a, b)$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$

Podle Lagrangeovy věty pro funkci $f_n - f_m$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \cdot |x - x_0|.$$

Dle předpokladu platí

$$|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \varepsilon$$

a navíc zřejmě

$$|x - x_0| \leq b - a$$

(připomeňme, že interval (a, b) je dle předpokladu omezený). Celkem tedy dostáváme odhad

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon(b - a) + \varepsilon = \varepsilon(b - a + 1).$$

Posloupnost $\{f_n\}$ je tedy stejnoměrně cauchyovská na (a, b), a podle Věty 18.5 tedy také stejnoměrně konvergentní na (a, b). Její limitu označíme f. Zbývá dokázat, že $f'_n \rightrightarrows f'$ na (a, b). Vzhledem k tomu, že víme, že f'_n konverguje stejnoměrně, stačí dokázat, že $f'_n \to f'$ na (a, b).

Zvolme $z \in (a, b)$ a $n \in \mathbb{N}$ a definujme funkci φ_n předpisem

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z}, \quad x \in (a, b) \setminus \{z\}.$$

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$. Podle Lagrangeovy věty existuje η ležící mezi x a $z$takové, že

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f_n'(\eta) - f_m'(\eta)| \cdot |x - z|.$$

Potom dle předpokladu platí pro každé $x \in (a, b) \setminus \{z\}$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{|f_n'(\eta) - f_m'(\eta)| \cdot |x - z|}{|x - z|} = |f_n'(\eta) - f_m'(\eta)| < \varepsilon.$$

To znamená, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ je stejnoměrně cauchyovská, a tedy také stejnoměrně konvergentní na $(a, b) \setminus \{z\}$. Podle Mooreovy–Osgoodovy věty (Věta 18.1) tedy existují vlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to z} \varphi_n(x) \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to z} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

a jsou si rovny. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to z} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$$

a

$$\lim_{x\to z} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{x\to z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z),$$

existuje vlastní $f'(z)$ a platí $f'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$. Protože z bylo zvoleno libovolně, plyne odtud tvrzení věty. $\square$

Poznámka. Použijeme-li Větu 18.4, pak můžeme zformulovat variantu předchozí věty na libovolném otevřeném intervalu pro lokálně stejnoměrnou konvergenci.

Věta 18.7 (záměna limity a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na neprázdném omezeném intervalu (a, b) a nechť $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí*

$$\lim_{n\to\infty} (N) \int_a^b f_n(x)\, dx = (N) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Věta 18.8 (Diniova)**.** *Nechť (K, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Nechť $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých funkcí na K, která na K bodově konverguje ke spojité funkci $f\colon K \to \mathbb{R}$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na K.*

Definice. Nechť M je množina a $A \subset M$. Pak **charakteristickou funkcí** množiny A nazýváme funkci $\chi_A\colon M \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in A; \\ 0, & \text{pokud } x \in M \setminus A. \end{cases}$$

Poznámka. Žádný z předpokladů Diniovy věty není možné vynechat.

konec 17. přednášky (27.11.2017)

18.2. **Weierstrassova věta.**

Definice. Řekneme, že lineární operátor (zobrazení) L z $\mathcal{C}([0, 1])$ do $\mathcal{C}([0, 1])$ je **positivní**, jestliže platí implikace

$$f \in \mathcal{C}([0, 1]), f \geq 0 \text{ na } [0, 1] \quad \Rightarrow \quad L(f) \geq 0 \text{ na } [0, 1].$$

Poznámka. Každý positivní lineární operátor L na $\mathcal{C}([0, 1])$ zachovává monotonii v následujícím smyslu: je-li $f \leq g$ na $[0, 1]$, pak $L(f) \leq L(g)$ na $[0, 1]$.

Věta 18.9 (Korovkinova věta o třech funkcích)**.** *Nechť $\{L_n\}$ je posloupnost positivních lineárních operátorů z $\mathcal{C}([0, 1])$ do $\mathcal{C}([0, 1])$. Potom $L_n f \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ právě tehdy, když $L_n(g_j) \rightrightarrows (g_j)$ na $[0, 1]$ pro každou ze tří funkcí $g_j(x) = x^j$, $x \in [0, 1]$, $j = 0, 1, 2$.*

Definice. Nechť $f \in \mathcal{C}[0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom polynom

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Bernsteinovým polynomem** funkce f stupně n. Symbolem B_n značíme operátor z $\mathcal{C}([0,1])$ do $\mathcal{C}([0,1])$ definovaný předpisem $B_n \colon f \mapsto B_n(f)$.

Poznámka. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je B_n positivní lineární operátor na $\mathcal{C}[0,1]$.

Věta 18.10 (Weierstrassova)**.** *Nechť $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje polynom $P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takový, že*

$$\forall x \in [a,b] \colon |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Weierstrassova věta neplatí pro interval, který není omezený a uzavřený. Například pro $f(x) = e^x$ na $(0,\infty)$ a libovolný polynom P platí $\lim_{x\to\infty} |f(x) - P(x)| = \infty$, podobně pro $f(x) = \frac{1}{x}$ a libovolný polynom P platí $\lim_{x\to 0+} |f(x) - P(x)| = \infty$.

konec 18. přednášky (30.11.2017)

18.3. **Stejnoměrná konvergence řad funkcí.**

Definice. Nechť M je množina, $(Q, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, $f_n \colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je **bodově konvergentní** na M, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{n} f_k\}_{n=1}^{\infty}$ je bodově konvergentní na M. Pojmy **stejnoměrné konvergence** a **lokálně stejnoměrné konvergence** řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ definujeme obdobně. Stejnoměrnou konvergenci značíme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, lokálně stejnoměrnou konvergenci symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$.

Poznámky. Nechť M je množina a $f_n, g_n \colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, \ m \geq n \geq n_0 \ \forall x \in M \colon \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Toto tvrzení plyne z Věty 18.5.

(b) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M, potom $f_n \rightrightarrows 0$ na M. Toto tvrzení plyne z toho, že $|f_n(x)| = \left|\sum_{j=n}^{n} f_j(x)\right|$, takže stačí v (a) položit $n_0 = n = m$.

(c) Jestliže řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konvergují stejnoměrně na M a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak také řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha f_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n \pm g_n)$ konvergují stejnoměrně na M.

Věta 18.11 (Weierstrassovo kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině M. Označme*

$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

Příklad. Nechť $\alpha > 1$. Potom je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$$

stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Lemma 18.12 (zobecněná parciální sumace)**.** *Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť $m \in \mathbb{N}$. Pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$, definujeme $\sigma_k = a_m + \cdots + a_k$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, platí*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \right| \leq \max_{k=m,\dots,n-1} |\sigma_k| \left(|b_m| + |b_n|\right) + |\sigma_n||b_n|.$$

Věta 18.13 (Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence řad funkcí)**.** *Nechť M je množina, $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $g_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť platí*

(i) *pro každé $x \in M$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ monotónní,*

(ii) *$\{g_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí, tj.*

$$\exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\colon |g_n(x)| \le K,$$

(iii) *$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na M.*

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na } M.$$

Věta 18.14 (Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence řad funkcí)**.** *Nechť M je množina, $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $g_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť platí*

(i) *pro každé $x \in M$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ monotónní,*

(ii) *$\{g_n\}$ stejnoměrně konverguje k nulové funkci na M,*

(iii) *řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ má stejně omezené částečné součty na M, tj.*

$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\colon \left|\sum_{j=1}^{m} f_j(x)\right| \le K.$$

Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na } M.$$

konec 19. přednášky (04.12.2017)

Příklad. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in (0,\infty)$, jsou lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0,\pi)$.

Věta 18.15 (záměna sumy a derivace)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ splňující*

(i) *f_n má vlastní derivaci na omezeném intervalu (a,b), $n \in \mathbb{N}$,*

(ii) *existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že je číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergentní,*

(iii) *$\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ na (a,b).*

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na (a,b) a pro každé $x \in (a,b)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Věta 18.16 (záměna sumy a Newtonova integrálu)**.** *Nechť (a,b) je omezený neprázdný interval a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí splňující*

(i) *$f_n \in \mathcal{N}(a,b)$,*

(ii) *řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k funkci f na (a,b).*

Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N)\int_a^b f_n = (N)\int_a^b f.$$

Věta 18.17 (o lokálně stejnoměrné konvergenci mocninné řady)**.** *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada, přičemž $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, s poloměrem konvergence $\varrho \in (0,\infty]$. Potom tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$.*

konec 20. přednášky (07.12.2017)

19. Diferenciální rovnice

19.1. **Základní pojmy.**

Definice. Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

Definice. Řešením diferenciální rovnice (1) rozumíme reálnou funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x) = 0.$$

Řešení y rovnice (1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $D(y) \subsetneq D(z)$ a které se na $D(y)$ shoduje s y.

19.2. **Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.**

Definice. Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \tag{2}$$

Věta 19.1 (lepení řešení)**.** *Nechť (a,b) je otevřený interval, $c \in (a,b)$ a f je spojitá reálná funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$. Nechť y_l je řešením diferenciální rovnice*

$$y' = f(x,y) \tag{3}$$

na intervalu (a,c) a y_r je řešením této rovnice na (c,b). Nechť $A \in \mathbb{R}$, $[c,A] \in G$ a platí

$$\lim_{x\to c_-} y_l(x) = \lim_{x\to c_+} y_r(x) = A.$$

Pak funkce y definovaná předpisem

$$y(x) = \begin{cases} y_l(x), & x \in (a,c),\\ A, & x = c,\\ y_r(x), & x \in (c,b), \end{cases}$$

je řešením rovnice (3) na intervalu (a,b).

konec 21. přednášky (11.12.2017)

Poznámka (algoritmus pro řešení rovnice (2))**.** Nechť g, h jsou spojité funkce reálné proměnné. Při hledání maximálních řešení rovnice (2) postupujeme následujícím způsobem.

(a) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v $D(h)$.

(b) Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z (a) je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (2). Těmto řešením se říká **singulární** nebo také **stacionární**.

(c) Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je g nenulová.

(d) Vezmeme interval I z (a) a interval J z (c). Tedy h je spojitá na I a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na I a G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí $G(y(x)) = H(x) + c$ na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

(e) Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině
$$\{x \in I; H(x) + c \in G(J)\}.$$
Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar
$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$
Zde je $G^{-1}: G(J) \to \mathbb{R}$ inverzní funkce k funkci G, která existuje, neboť g je na intervalu J spojitá a nenulová, tudíž nemění znaménko, a tedy G je intervalu J ryze monotónní.)

(f) Z řešení nalezených v (e) a singulárních řešení z (b) „slepíme" všechna maximální řešení pomocí Věty 19.1.

Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = x\sqrt[3]{y^2}$.

19.3. **Lineární diferenciální rovnice prvního řádu.**

Definice. Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.

Věta 19.2 (tvar řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu)**.** *Maximální řešení rovnice* (4) *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$*, kde* $x_0 \in (a, b)$*,* $y_0 \in \mathbb{R}$*, má tvar*
$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\right)e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$
kde P *je primitivní funkce k* p *na* (a, b) *splňující* $P(x_0) = 0$*.*

konec 22. přednášky (14.12.2017)

19.4. **Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficenty.**

Definice. Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{5}$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je spojitá funkce na daném intervalu (a, b). **Homogenní rovnicí** příslušející k rovnici (5) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{6}$$

Věta 19.3 (existence a jednoznačnost řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty)**.** *Nechť* $x_0 \in (a, b)$ *a* $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$*. Pak existuje právě jedno maximální řešení* y *rovnice* (5)*, které splňuje podmínky*
$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$
Toto řešení je definováno na celém intervalu (a, b)*.*

Věta 19.4 (množina řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty)**.** (a) *Maximální řešení homogenní rovnice* (6) *jsou definována na celém* $\mathbb{R}$ *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ *dimenze* n*.*

(b) *Nechť* y_p *je nějaké maximální řešení rovnice* (5)*. Pak funkce* y *je jejím maximálním řešením právě tehdy, když ji lze zapsat ve tvaru* $y = y_p + y_h$*, kde* y_h *je řešení rovnice* (6)*.*

Definice. Bázi prostoru všech maximálních řešení rovnice (6) nazýváme **fundamentálním systémem** rovnice (6).

Příklad. Fundamentálním systémem diferenciální rovnice
$$y'' + y = x^3 + 6x$$
je (například) dvojice $\{\cos x, \sin x\}$. Partikulárním řešením je (například) funkce $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Z Věty 19.4(b) plyne, že všechna maximální řešení rovnice jsou tvaru
$$y(x) = x^3 + \alpha\cos x + \beta\sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Definice. **Charakteristickým polynomem** rovnice (6) rozumíme polynom
$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Definice. **Banachovým prostorem** nazýváme úplný normovaný lineární prostor.

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor, nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků X a $x \in X$. Řekneme, že x je **součtem řady** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **v prostoru** X, jestliže
$$\lim_{n\to\infty} \| \sum_{j=1}^{n} x_j - x\|_X = 0.$$
V takovém případě říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **je konvergentní** v prostoru X.

Věta 19.5 (Rieszova–Fischerova). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Potom X je Banachův právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků X splňující $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergentní v X.*

Definice. **Imaginární jednotkou** nazýváme prvek i splňující $i^2 = -1$. **Komplexním číslem** nazýváme každý výraz tvaru $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Čísla x, y pak nazýváme po řadě **reálnou částí** a **komplexní částí** čísla z a píšeme $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$. Množinu všech komplexních čísel značíme symbolem $\mathbb{C}$.

Poznámka. Každé komplexní číslo $z = x + iy$ je možné chápat jako uspořádanou dvojici $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Vzhledem k bijekci $z \mapsto [x, y]$ jsou množiny $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ izomorfní a lze je ztotožnit. V tomto smyslu také znázorňujeme komplexní čísla graficky jako prvky roviny. Reálnému číslu x odpovídá komplexní číslo $[x, 0]$. v tomto smyslu platí $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Číslu i odpovídá dvojice $[0, 1]$.

konec 23. přednášky (18.12.2017)

Definice. Nechť $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, přičemž $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$. Na množině $\mathbb{C}$ jsou zavedeny následující relace a operace:

(a) **rovnost**: $z_1 = z_2$ právě tehdy, když $x_1 = x_2$ a zároveň $y_1 = y_2$
(b) **sčítání**: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
(c) **násobení**: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
(d) **absolutní hodnota (norma)**: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
(e) **komplexně sdružené číslo**: $\overline{z} = x - iy$
(f) **dělení**: jestliže $z_2 \neq 0$, pak $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, kde pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ máme
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Poznámky. (a) Početní operace na $\mathbb{C}$ mají stejné vlastnosti jako na $\mathbb{R}$.

(b) Množina $\mathbb{C}$ je důležitým příkladem tělesa skalárů, vektorového prostoru dimenze 2 (nad $\mathbb{R}$) nebo dimenze 1 (nad $\mathbb{C}$), metrického prostoru (vzhledem k metrice $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$) a normovaného lineárního prostoru (vzhledem k normě $|\cdot|$).

(c) Konvergence v $\mathbb{C}$ je definována jako konvergence vzhledem k normě $|\cdot|$. Odtud plyne, že konvergence $\mathbb{C}$ je ekvivalentní konvergenci po složkách, tedy
$$z_n \stackrel{\mathbb{C}}{\to} z \quad \Leftrightarrow \quad x_n \stackrel{\mathbb{R}}{\to} x \ \&\ y_n \stackrel{\mathbb{R}}{\to} y,$$
kde $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$, a $z = x + iy$. Dále odtud plyne, že posloupnost $\{z_n\}$ je cauchyovská v $\mathbb{C}$ právě tehdy, když jsou obě posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ cauchyovské v $\mathbb{R}$. Důsledkem je, že $\mathbb{C}$ je Banachův prostor.

Definice. Na množině $\mathbb{C}$ jsou definovány následující základní funkce:

(a) **polynomy**
$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i,\ a_i \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C};$$

(b) **exponenciální funkce**

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ z \in \mathbb{C};$$

(c) **goniometrické funkce**

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Poznámky. (a) Všechny nekonečné řady v předcházející definici jsou absolutně konvergentní. Například pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{z^n}{n!} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} < \infty,$$

obdobně pro sin a cos. Prostor $\mathbb{C}$ je Banachův, a tedy jsou dle Rieszovy–Fischerovy věty tyto řady také konvergentní v $\mathbb{C}$.

(b) Komplexní funkce se vyznačují některými důležitými rozdíly oproti odpovídajícím reálným funkcím. Například:

- každý komplexní polynom stupně alespoň 1 má alespoň jeden komplexní kořen,
- exponenciální funkce není prostá na $\mathbb{C}$,
- funkce sin a cos nejsou omezené na $\mathbb{C}$.

Věta 19.6 (Eulerova formule)**.** *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí*

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t.$$

Důsledek. (a) *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $|e^{it}| = 1$.*

(b) *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí* $\mathrm{Re}(e^{it}) = \cos t$, $\mathrm{Im}(e^{it}) = \sin t$.

(c) *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí $(e^{it})^n = e^{int}$, a tedy*

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt.$$

(d) *Pro každé $t \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$ platí $e^{it} = e^{i(t+2k\pi)}$, a tedy komplexní exponenciála není prostá.*

(e) *Pro speciální volbu $t = \pi$ dostaneme* ***nejkrásnější matematickou formuli všech dob:***

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

která spojuje pět nejdůležitějších matematických konstant do jedné jednoduché identity.

Věta 19.7 (fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty)**.** *Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu P s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_l + i\beta_l$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu P s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_l$. Pak funkce*

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1}(x), & \dots & x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s x}, & xe^{\lambda_s}(x), & \dots & x^{r_s-1}e^{\lambda_s x}, \\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, & xe^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, & \dots & x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, \\
e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, & xe^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, & \dots & x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x
\end{array}$$

tvoří fundamentální sytém rovnice (6).

Věta 19.8 (řešení rovnice se speciální pravou stranou)**.** *Nechť*

$$f(x) = e^{\mu x} \cdot \left(P(x)\cos\nu x + Q(x)\sin\nu x\right), \quad x \in (a,b),$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Nechť $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je násobnost čísla $\mu + i\nu$ jakožto kořenu charakteristického polynomu. Pak existuje řešení rovnice (5) *ve tvaru*

$$y(x) = x^m e^{\mu x} \cdot \left(R(x)\cos\nu x + S(x)\sin\nu x\right),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$.

Lemma 19.9. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice* (6)*. Pak je matice*

$$\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

regulární pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Z Věty 19.4 vyplývá, že k úplnému popisu množiny všech řešení rovnice (5) stačí určit fundamentální systém příslušné homogenní rovnice (6) a nalézt libovolné jedno partikulární řešení (nehomogenní) rovnice (5). První krok (nalezení fundamentálního systému) byl proveden ve Větě 19.7. Druhý krok (nalezení partikulárního řešení) byl proveden zatím pouze v případě, kdy pravá strana (tedy funkce f) má speciální tvar (Věta 19.8). V obecném případě tento krok provedeme pomocí následující **metody variace konstant pro rovnice vyššího řádu.**

Řešení (nehomogenní) rovnice (5) hledáme ve tvaru

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x), \quad x \in (a,b),$$

kde $c_1, \dots, c_n$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na (a,b) a $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice (6). Pak

$$y' = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n.$$

Položme $c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0$. Dále

$$y''(t) = c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n',$$

a opět položíme $c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' = 0$. Pokračováním tohoto procesu se dostaneme až k rovnici

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}.$$

Dosadíme-li naše hypotetické řešení y do (5), dostaneme následující soustavu podmínek:

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f, \end{aligned}$$

neboli

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_{n-1}' \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

To je soustava n lineárních rovnic pro neznámé c_i', přičemž matice soustavy je podle Lemmatu 19.9 regulární, takže existuje právě jedno řešení. Z Cramerova pravidla vyplývá, že pro každé $x \in (a,b)$

$$c_i'(x) = \frac{\det \mathbb{A}_i(x)}{\det \mathbb{A}(x)},$$

kde

$$\mathbb{A}_i(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_{i-1}(x) & 0 & y_{i+1}(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_{i-1}'(x) & 0 & y_{i+1}'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_{i-1}^{(n-2)}(x) & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{i-1}^{(n-1)}(x) & f(x) & y_{i+1}^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Funkce $\frac{\det \mathbb{A}_i(x)}{\det \mathbb{A}(x)}$ jsou spojité na (a,b), a tedy mají primitivní funkci. Odtud plyne existence hledaných funkcí $c_1, \dots, c_n$.

konec 24. přednášky (21.12.2017)

19.5. **Soustavy diferenciálních rovnic.** Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{7}$$

kde f_i, $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Tuto soustavu můžeme také zapsat ve vektorovém tvaru:

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

kde $y(x) = [y_1(x), \dots, y_n(x)]$, $y'(x) = [y_1'(x), \dots, y_n'(x)]$ a $f = [f_1, \dots, f_n]$.

Definice. **Řešením** soustavy (7) rozumíme vektorovou funkci $y = [y_1, \dots, y_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $x \in J$ a každé $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje vlastní derivace $y_i'(x)$ a platí (7).

Počáteční úlohou pro (7) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení (7) splňující navíc předem zadanou podmínku $y(x_0) = y^0$, kde $[x_0, y^0] \in G$ (této podmínce se říká **počáteční podmínka**).

Maximálním řešením soustavy (7) rozumíme takové řešení y definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li z řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $z(x) = y(x)$ pro každé $x \in J$, pak $J = I$.

Poznámka. Mějme rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{8}$$

Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \tag{9}$$

Pokud y řeší (9), pak y_1 řeší (8). Obráceně, pokud z řeší (8), pak $[z, \dots, z^{(n-1)}]$ řeší (9).

Věta 19.10 (Peanova). *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[x_0, y_0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice* (7) *splňující $y(x_0) = y_0$.*

Věta 19.11 (Picardova). *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f\colon [x, y] \to y(x, y) \in \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení na G a je „lokálně lipschitzovské v y“, tj. pro každý bod $[x, y] \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ a $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé dva body $[s, y^1], [s, y^2] \in B([x, y], \varepsilon)$ máme*

$$\left\| f(s, y^1) - f(s, y^2) \right\| \leq L \left\| y^1 - y^2 \right\|.$$

Jestliže $[x_0, y^0] \in G$*, potom existuje právě jedno maximální řešení* y *rovnice* (7) *splňující* $y(x_0) = y^0$.

Poznámka. Pokud f je třídy $\mathcal{C}^1$ na G, potom f splňuje podmínky Věty 19.11. Stačí použít například větu o přírůstku vektorové funkce.

19.6. **Soustavy lineárních diferenciálních rovnic.** Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{aligned} \tag{10}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce. Vektorový tvar:

$$y' = \mathbb{A}(x)y + b(x),$$

kde

$$\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Věta 19.12 (existence a jednoznačnost řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic)**.** *Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $y^0 \in \mathbb{R}^n$*. Nechť* $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení* y *soustavy* (10) *splňující* $y(x_0) = y^0$*. Toto řešení je definováno na celém intervalu* (α, β).

Definice. Homogenní soustavou k (10) rozumíme soustavu

$$y' = \mathbb{A}(x)y. \tag{11}$$

konec 25. přednášky (04.01.2018)

Věta 19.13 (množina řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic)**.** *Nechť* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, *a* $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ *je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy* (11) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$*. Dimenze tohoto podprostoru je rovna* n.

Věta 19.14 (tvar řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic)**.** *Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$*. Nechť* $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Nechť* y_p *je řešení* (10) *na intervalu* (α, β)*. Potom každé řešení* y *soustavy* (10) *na intervalu* (α, β) *má tvar* $y = y_p + y_h$*, kde* y_h *je jisté řešení* (11).

Definice. Nechť vektorové funkce $y^1, \dots, y^n$ tvoří bázi prostoru řešení soustavy (11) na (α, β). Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální systém** soustavy (11). Označme

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & \dots & y_2^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ nazýváme **fundamentální maticí** soustavy (11).

Poznámka. Řešení (11) uvažujeme na (α, β), neboť (11) chápeme jako homogenní soustavu příslušnou soustavě (10).

Lemma 19.15 (regularita fundamentálního systému)**.** *Nechť* Φ *je fundamentální matice soustavy* (11)*. Pak* $\Phi(x)$ *je regulární pro každé* $x \in (\alpha, \beta)$*.*

Věta 19.16 (variace konstant pro soustavu lineárních diferenciálních rovnic)**.** *Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$*,* $\alpha < \beta$*,* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $y^0 \in \mathbb{R}^n$*. Pak maximální řešení* y *rovnice* (10) *s počáteční podmínkou* $y(x_0) = y^0$ *má tvar*

$$y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y^0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)b(t)\,dt, \quad x \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ *je fundamentální matice soustavy* (11)*.*

Poznámka. Výraz „variace konstant“ v názvu Věty 19.16 souvisí s tím, že tvar řešení lze odvodit, hledáme-li ho ve tvaru

$$y(x) = \Phi(x)c(x).$$

konec 26. přednášky (08.01.2018)

19.7. Řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Věta 19.17 (řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *a vektorová funkce* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *je řešením soustavy* $y' = \mathbb{A}y$*. Pak* y *je třídy* $\mathcal{C}^\infty$ *a pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí* $y^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k y(x)$ *pro* $x \in \mathbb{R}$*.*

Definice. Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami** λ-matice rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Lemma 19.18 (úprava sloupce)**.** *Nechť* $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^T$ *je* λ*-matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na* λ*-matici* $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$*, kde nejvýše jeden z polynomů* $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ *je nenulový.*

Věta 19.19 (úprava matice $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$*. Pak lze* λ*-matici* $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ *převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou* λ*-matici. Výsledná* λ*-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je* n*.*

Značení.

- Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n-tého řádu na $\mathbb{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y.$$
- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu
$$\begin{aligned} P_{11}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{1n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\ P_{21}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{2n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\ &\vdots\\ P_{n1}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{nn}(\frac{d}{dx})y_n &= 0. \end{aligned}$$

Poznámka. Nechť P, Q jsou polynomy a $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Potom platí

- $(P + Q)(\frac{d}{dx})y = P(\frac{d}{dx})y + Q(\frac{d}{dx})y,$
- $(PQ)(\frac{d}{dx})y = P(\frac{d}{dx})(Q(\frac{d}{dx})y).$

Věta 19.20 (řešení soustavy vzniklé pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav)**.** *Nechť λ-matice $\tilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav λ-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající matici $\mathbb{P}$ právě tehdy, když je řešením soustavy odpovídající $\widetilde{\mathbb{P}}$.*

Poznámka (metoda řešení soustavy $y' = \mathbb{A}y + b$)**.** Homogenní soustava odpovídá matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$, kterou pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav převedeme na horní trojúhelníkovou matici. Odpovídající soustavu diferenciálních rovnic pak vyřešíme „odzadu“. Nehomogenní soustavu vyřešíme pomocí variace konstant.

Příklad. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\ y_2 &= -2y_1 - 2y_2. \end{aligned}$$

Řešení.

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 + \frac{1}{2}y_2' + y_2 &= 0 \\ y_2'' - 2y_2' + 2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t \\ y_1 &= \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^t \cos t \end{aligned}$$

$\square$

konec 27. přednášky (11.01.2018)