MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, ZIMNÍ SEMESTR 2017–2018
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA D

LUBOŠ PICK

Příklad D1. Dokažte, že vztahy

$$x^4 + xu + yv + u^4 + v^4 = 1$$
$$y^3 + uv + yxu = 1$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y] = [1, 1]$ hladké funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ takové, že $u(1, 1) = 0$ a $v(1, 1) = 0$. Rozhodněte, zda existuje okolí bodu $[1, 1]$, na kterém je zobrazení

$$\Phi\colon [x, y] \mapsto [u(x, y), v(x, y)]$$

difeomorfismus. **(10 bodů)**

Příklad D2. Nalezněte maximum a minimum funkce

$$f(x, y, z) = x - y - z$$

na množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z,\ x + y + z \le 1\}.$$ **(10 bodů)**

Příklad D3. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\log x)^{3n}}{\sqrt{n}}.$$

(a) Určete definiční obor funkce f.
(b) Rozhodněte, zda na definičním oboru funkce f uvedená řada konverguje stejnoměrně.
(c) Rozhodněte, zda na definičním oboru funkce f uvedená řada konverguje lokálně stejnoměrně.
(15 bodů)

Příklad D4. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{x}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(-e) = 0,$$

určete jejich definiční obory, jednostranné limity v krajních bodech jejich definičních oborů a určete, zda jsou tato řešení na svém definičním oboru monotónní. **(15 bodů)**