**MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, ZIMNÍ SEMESTR 2017–2018**
**ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA C**

LUBOŠ PICK

**Příklad C1.** Dokažte, že vztahy

$$x^2 + 2y^3 + 4u^2 - v = 0$$
$$x^2u^2 + y + 2v = 11$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y] = [1, 0]$ hladké funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ takové, že $u(1, 0) = 1$ a $v(1, 0) = 5$. Rozhodněte, zda existuje okolí bodu $[1, 0]$, na kterém je zobrazení

$$\Phi\colon [x, y] \mapsto [u(x, y), v(x, y)]$$

difeomorfismus. **(10 bodů)**

**Příklad C2.** Nalezněte maximum a minimum funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + y + z$$

na množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z,\ x^2 + y^2 \le -z + 1\}.$$ **(10 bodů)**

**Příklad C3.** Nechť funkce $f$ je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\operatorname{arctg} x)^n \operatorname{arccotg} n.$$

(a) Určete definiční obor funkce $f$.
(b) Rozhodněte, zda na definičním oboru funkce $f$ uvedená řada konverguje stejnoměrně.
(c) Rozhodněte, zda na definičním oboru funkce $f$ uvedená řada konverguje lokálně stejnoměrně.
**(15 bodů)**

**Příklad C4.** Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = 2\sqrt{|y|}e^{-x}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(\log \tfrac{1}{2}) = -1,$$

jejich definiční obory a jejich jednostranné limity v krajních bodech jejich definičních oborů.
**(15 bodů)**