MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, ZIMNÍ SEMESTR 2017–2018
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA B

LUBOŠ PICK

Příklad B1. Dokažte, že vztahy

$$\cos(x+y)+\cos(u+v)-u=0$$
$$\sin(xy)+\operatorname{arctg}(uv)+v=0$$

definují na jistém okolí bodu $[x,y]=[0,\pi]$ hladké funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ takové, že $u(0,\pi)=0$ a $v(0,\pi)=0$. Nechť $h=[-\frac{1}{2},7e]$. Rozhodněte, zda existuje $D_h v(0,\pi)$ (derivace funkce v podle vektoru h v bodě $[0,\pi]$) a pokud ano, spočtěte ji. **(10 bodů)**

Příklad B2. Rozhodněte, zda funkce

$$f(x,y,z)=x-y+2z$$

nabývá na množině

$$M=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ z\le 1,\ x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$$

svého maxima a svého minima a pokud ano, spočtěte je. Existenci či neexistenci maxima a minima podrobně zdůvodněte. **(10 bodů)**

Příklad B3. Nechť je funkce f definována předpisem

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{arctg}(x^n)}{n}.$$

(a) Určete definiční obor funkce f.
(b) Rozhodněte, zda na definičním oboru funkce f uvedená řada konverguje stejnoměrně.
(c) Rozhodněte, zda na definičním oboru funkce f uvedená řada konverguje lokálně stejnoměrně. **(15 bodů)**

Příklad B4. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'=\frac{\sqrt{1-y^2}\arccos y}{1+x^2}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(1)=\cos(\pi e^{-\frac{\pi}{4}})$$

a jejich definiční obory. **(15 bodů)**