MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, ZIMNÍ SEMESTR 2017–2018
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA A

LUBOŠ PICK

Příklad A1. Dokažte, že vztahy

$$x^u - yu - u = 0,$$
$$\operatorname{arctg}(xv) + \sin(x - y - u) = 2y$$

definují na okolí bodu $[x, y] = [1, 0]$ hladké funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$, pro které platí $u(1, 0) = 1$, $v(1, 0) = 0$. Rozhodněte, zda má funkce $G(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$ totální diferenciál v bodě $[1, 0]$, a pokud ano, spočtěte jej. **(10 bodů)**

Příklad A2. Nalezněte maximum a minimum funkce

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

na množině

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ z \le x^2 + y^2 + 1,\ 2x^2 + 2y^2 \le z\right\}. \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad A3. Nechť je funkce f definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + x^2(1 - \cos(\tfrac{1}{n}))\right).$$

Určete definiční obor f a rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkcí f a f' na jejich definičním oboru. **(15 bodů)**

Příklad A4. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = (1 + y^2)\sqrt{\operatorname{arctg}|y|}$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$ a jejich definiční obory. **(15 bodů)**