MATEMATICKÁ ANALÝZA 4 - LETNÍ SEMESTR 2017–2018 PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

20. Metrické prostory III

20.1. Úplné prostory - pokračování.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **hustá**, jestliže $\overline{A} = P$.

Poznámka. Množina A je hustá v metrickém prostoru P právě tehdy, když pro každé $x \in P$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků A splňující $x_n \to x$.

Příklady. (a) $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $\mathbb{R}$,
(b) množina všech polynomů na $[a, b]$, kde $[a, b] \subset \mathbb{R}$, je hustá v $C([a, b], \varrho_{\text{sup}})$,
(c) podmnožina A diskrétního prostoru P je hustá právě tehdy, když $A = P$.

Věta 20.1 (charakterisace hustých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom je $A \subset P$ je hustá právě tehdy, když pro každou otevřenou neprázdnou množinu $G \subset P$ platí $G \cap A \neq \emptyset$.*

Věta 20.2 (průnik hustých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $G \subset P$ je otevřená hustá a $H \subset P$ je hustá. Potom $G \cap H$ je hustá.*

Poznámka. Tvrzení Věty 20.2 neplatí bez předpokladu otevřenosti alespoň jedné z množin. Například $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté a disjunktní v $\mathbb{R}$.

Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $n \in \mathbb{N}$ a $G_1, \dots, G_n$ jsou otevřené husté podmnožiny P. Potom $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ je otevřená a hustá. Toto tvrzení neplatí pro spočetný průnik. Například pro každé $r \in \mathbb{Q}$ je množina $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$ hustá a otevřená v $\mathbb{Q}$, ale množina $\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \setminus \{r\})$ je prázdná, a tedy není hustá v $\mathbb{R}$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **řídká**, jestliže $P \setminus \overline{A}$ je hustá.

Příklady. (a) Prázdná množina je řídká v libovolném metrickém prostoru,
(b) A je řídká v diskrétním prostoru právě tehdy, když $A = \emptyset$,
(c) každá jednobodová množina je řídká v $\mathbb{R}$,
(d) $\mathbb{N}$ je řídká v $\mathbb{R}$,
(d) $\mathbb{Q}$ není řídká v $\mathbb{R}$,
(f) množina

$$A = \{f \in C[a, b],\ -1 \leq f(x) \leq 1,\ x \in [a, b]\}$$

je řídká v $(C[a, b], \varrho_{\text{int}})$, ale není řídká v $(C[a, b], \varrho_{\text{sup}})$.

Věta 20.3 (charakterisace řídkých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $A \subset P$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní:*
(i) *A je řídká v P,*
(ii) $\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right) = \emptyset$,
(iii) *$P \setminus A$ obsahuje hustou otevřenou množinu.*

Definice. Nechť P je množina. Strukturu $\mathfrak{M} \subset \exp P$ nazveme **množinovým ideálem**, jestliže je uzavřená na podmnožiny a konečná sjednocení, a **množinovým σ-ideálem**, jestliže je uzavřená na podmnožiny a spočetná sjednocení.

Věta 20.4 (vlastnosti řídkých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.*
(a) *Množina všech řídkých podmnožin P tvoří ideál, nemusí ale tvořit σ-ideál.*
(b) *Množina A je řídká právě tehdy, když $\overline{A}$ je řídká.*

konec 1. přednášky (19.02.2018)

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hromadný bod** množiny A, jestliže existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků A, $x_n \neq x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, splňující $x_n \to x$. Množinu všech hromadných bodů A nazýváme **derivací** množiny A a značíme A'. Řekneme, že A je **dokonalá**, jestliže $A \subset A'$. Každý bod množiny $A \setminus A'$ nazýváme **isolovaným bodem** množiny A.

Příklad. Cantorovým diskontinuem nazýváme množinu definovanou předpisem

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

kde

$$\begin{aligned}
F_1 &= [0, 1],\\
F_2 &= [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1],\\
F_3 &= [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, 1],\\
&\ \ldots
\end{aligned}$$

Množina C je nespočetná, uzavřená (kompaktní), dokonalá, řídká a míry 0.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **první kategorie**, jestliže existuje posloupnost řídkých množin $\{A_n\}$ splňující $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Řekneme, že A je **druhé kategorie**, jestliže není první kategorie. Řekneme, že A je **residuální**, jestliže $P \setminus A$ je první kategorie.

Příklady. (a) $\mathbb{Q}$ je první kategorie v $\mathbb{R}$,
(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je druhé kategorie a residuální v $\mathbb{R}$,
(c) $(C([a, b]), \varrho_{\text{int}})$ je první kategorie.

Poznámka. Systém všech množin první kategorie v metrickém prostoru tvoří σ-ideál.

Věta 20.5 (charakterisace prostorů druhé kategorie)**.** *Metrický prostor (P, ϱ) je druhé kategorie právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{G_n\}$ otevřených hustých množin v P platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.*

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **Baireův**, jestliže je každá jeho neprázdná otevřená podmnožina druhé kategorie.

Věta 20.6 (charakterisace Baireových prostorů)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak jsou následující tři výroky ekvivalentní.*
(i) *P je Baireův,*
(ii) *je-li $\{G_n\}$ posloupnost otevřených hustých množin, pak je $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ hustá,*
(iii) *je-li $A \subset P$ residuální, pak je A hustá.*

Věta 20.7 (Baireova–Osgoodova)**.** *Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor. Potom je P Baireův.*

Poznámka. Pro libovolný neprázdný metrický prostor P platí implikace

$$P \text{ je kompaktní} \;\Rightarrow\; P \text{ je úplný} \;\Rightarrow\; P \text{ je Baireův} \;\Rightarrow\; P \text{ je druhé kategorie,}$$

přičemž žádnou z implikací není možné obrátit.

Příklady. (a) Prostory $\mathbb{R}$ a $[0, 1]$ jsou Baireovy,
(b) diskrétní metrický prostor je Baireův,
(c) prostor $(C([0, 1]), \varrho_{\mathrm{sup}})$ je Baireův,
(d) prostor $(C([0, 1]), \varrho_{\mathrm{int}})$ není Baireův,
(e) prostor $(0, 1)$ je Baireův, ale není úplný,
(f) prostor $(0, 1) \cup \{2\}$ je Baireův,
(g) prostor $(0, 1) \cup (\mathbb{Q} \cap (2, 3))$ je druhé kategorie, ale není Baireův.

konec 2. přednášky (22.02.2018)

Věta 20.8 (o algebraické bázi Banachova prostoru)**.** *Nechť X je Banachův prostor. Potom je jeho algebraická dimense buď konečná, nebo nespočetná.*

Poznámka (metoda kategorií)**.** Nechť X je množina a $V(x)$, $x \in X$, je nějaká výroková forma na X. Chceme-li dokázat výrok $\exists\, x \in X : V(x)$, stačí na X najít metriku ϱ, vzhledem k níž je metrický prostor (X, ϱ) úplný a dokázat, že vzhledem k této metrice je množina $\{x \in X,\ \neg V(x)\}$ první kategorie. Metoda kategorií představuje důkazovou techniku, která je *nekonstruktivní*.

Věta 20.9 (existence spojité funkce bez derivace)**.** *Existuje spojitá funkce na $[0, 1]$, která nemá v žádném bodě ani jednu jednostrannou derivaci.*

konec 3. přednášky (26.02.2018)

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f : P \to P$ je **kontrakce**, jestliže existuje $\gamma \in [0, 1)$ takové, že pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(f(x), f(y)) \leq \gamma \varrho(x, y)$. Řekneme, že f je **neexpansivní**, jestliže pro každé $x, y \in P$, $x \neq y$, platí $\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y)$.

Poznámka. Každá kontrakce je neexpansivní, ale opačná implikace neplatí. Například funkce sin na $[0, \frac{\pi}{2}]$ je neexpansivní, ale není kontrakce. Každé neexpansivní zobrazení je lipschitzovské (s konstantou 1), a tedy spojité.

Definice. Nechť P je množina. Řekneme, že $x \in P$ je **pevným bodem** zobrazení $f : P \to P$, jestliže $f(x) = x$.

Věta 20.10 (Banachova věta o kontrakci). *Nechť (P, ϱ) je úplný neprázdný metrický prostor a $f\colon P \to P$ je kontrakce. Potom f má právě jeden pevný bod.*

Věta 20.11 (o pevném bodu neexpansivního zobrazení). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní neprázdný metrický prostor a $f\colon P \to P$ je neexpansivní. Potom f má právě jeden pevný bod.*

Věta 20.12 (o pevném bodu zobrazení, jehož mocnina je kontrakcí). *Nechť (P, ϱ) je úplný neprázdný metrický prostor a $f\colon P \to P$ je zobrazení, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že že f^n je kontrakce na P, kde $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n-krát). Potom f má právě jeden pevný bod.*

20.2. **Separabilní prostory.**

Definice. Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá **separabilní**, jestliže existuje spočetná množina $A \subset P$, která jeho hustá v P.

Příklady. (a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ jsou separabilní,
(ii) $(C([0,1]), \sup)$ je separabilní,
(iii) diskrétní prostor je separabilní právě tehdy, když je spočetný.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\mathcal{B}$ je nějaký systém otevřených podmnožin P. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je **báze otevřených množin** (P, ϱ), jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ taková, že $\bigcup \mathcal{B}^* = G$.

Věta 20.13 (charakterisace separabilních prostorů). *Metrický prostor je separabilní právě tehdy, když v něm existuje spočetná báze otevřených množin.*

konec 4. přednášky (01.03.2018)

Důsledek. *Podprostor separabilního prostoru je separabilní.*

Věta 20.14 (nutná podmínka separability). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Nechť existují nespočetná množina A a $\delta > 0$ taková, že pro každá $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \geq \delta$. Potom P není separabilní.*

Definice. Označme

$$\ell^\infty = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty,\ x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

(prostor všech omezených posloupností reálných čísel) a

$$\|\{x_n\}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Označme dále

$$c_0 = \{\{x_n\}_{n=1} \in \ell^\infty,\ \lim x_n = 0\}$$

(prostor všech posloupností reálných čísel s nulovou limitou).

Poznámka. Prostory $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ a $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ jsou Banachovy.

Věta 20.15 (prostory ℓ^∞, c_0 a separabilita). (a) *Prostor ℓ^∞ všech omezených posloupností není separabilní.*
(b) *Prostor c_0 všech posloupností konvergujících k nule je separabilní.*

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\varepsilon > 0$. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **ε-síť** v P, jestliže pro každé $x \in P$ existuje $y \in A$ takové, že $\varrho(x, y) < \varepsilon$.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **totálně omezený**, jestliže v něm existuje pro každé $\varepsilon > 0$ konečná ε-síť.

Věta 20.16 (vlastnosti totálně omezených prostorů)**.** *Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom*

(a) *P je omezený,*
(b) *P je separabilní,*
(c) *každý podprostor P je totálně omezený.*

Příklad. Položme

$$A = \{f \in C([0,1]), \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq 1\}.$$

Potom $(A, \varrho_{\mathrm{sup}})$ je omezený úplný separabilní metrický prostor, který není totálně omezený.

Věta 20.17 (charakterisace kompaktnosti)**.** *Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, když je úplný a totálně omezený.*

konec 5. přednášky (05.03.2018)

Důsledek. *Každý kompaktní metrický prostor je separabilní.*

Věta 20.18 (kompaktnost a otevřená pokrytí)**.** *Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, když pro každý systém $\mathcal{G}$ otevřených množin splňující $P = \bigcup \mathcal{G}$ existuje konečný systém $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ takový, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.*

20.3. **Souvislé prostory.**

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je **obojetná**, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená.

Příklady. (a) V každém metrickém prostoru (P, ϱ) jsou množiny $\emptyset$ a P obojetné.
(b) V metrickém prostoru $[0,1] \cup (2,3)$ jsou množiny $[0,1]$ i $(2,3)$ obojetné.
(c) Každá podmnožina diskrétního prostoru je obojetná.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **souvislý**, jestliže není sjednocením dvou disjunktních neprázdných otevřených množin. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **souvislá**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) souvislý.

Příklady. (a) V každém metrickém prostoru jsou prázdná množina a každá jednobodová množina souvislé.
(b) Podmnožina diskrétního prostoru je souvislá právě tehdy, když je prázdná, nebo jednobodová.
(c) Má-li souvislý metrický prostor více než jeden bod, pak je nespočetný.

Věta 20.19 (charakterisace souvislých prostorů)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak jsou následující čtyři výroky ekvivalentní:*

(i) *P není souvislý;*
(ii) *existují dvě uzavřené neprázdné disjunktní množiny F_1, F_2 takové, že $P = F_1 \cup F_2$;*
(iii) *existuje obojetná množina $H \subset P$, která je navíc neprázdná a různá od P;*
(iv) *existuje spojité surjektivní zobrazení $f \colon P \to (\{0,1\}, \mathrm{diskr})$.*

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Víme, že $P = G_1 \cup G_2$, přičemž G_1 a G_2 jsou neprázdné, otevřené a disjunktní. Položme $F_1 = G_1$ a $F_2 = G_2$. Množiny F_1 a F_2 pak zřejmě mají požadované vlastnosti.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Položme $H = F_1$. Potom H zřejmě má požadované vlastnosti.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Položme $f = \chi_H$. Potom platí $f^{-1}(\{0\}) = P \setminus H$ a $f^{-1}(\{1\}) = H$. Množiny $f^{-1}(\{0\})$ a $f^{-1}(\{1\})$ jsou neprázdné a otevřené, takže f je surjektivní a spojité.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Položme $G_1 = f^{-1}(\{0\})$ a $G_2 = f^{-1}(\{1\})$. Potom $P = G_1 \cup G_2$. Ze spojitosti f plyne, že G_1 a G_2 jsou otevřené. Ze surjektivity f plyne, že G_1 a G_2 jsou neprázdné. Jsou navíc zřejmě disjunktní, takže P není souvislý. $\square$

konec 6. přednášky (08.03.2018)

Věta 20.20 (spojitý obraz souvislého prostoru). *Nechť (P, ϱ) je souvislý metrický prostor, (Q, σ) je metrický prostor a $f\colon P \to Q$ je spojité. Potom $f(P)$ je souvislá množina.*

Poznámka (na přednášce nevysloveno, ale užitečné). Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A, B \subset P$ jsou neprázdné disjunktní, $M = A \cup B$. Potom A a B jsou otevřené v M, právě když $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Příklad. Nechť A a B jsou disjunktní otevřené kruhy v $P = \mathbb{R}^2$, jejichž hranice se dotýkají v bodě z. Potom A a B jsou otevřené v $A \cup B$, ačkoli $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Věta 20.21 (souvislost uzávěru). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Nechť $A \subset P$ je souvislá a $A \subset B \subset \overline{A}$. Pak B je souvislá. Speciálně $\bar{A}$ je souvislá.*

Důkaz. Nechť G, H jsou neprázdné disjunktní množiny otevřené v B. Ukážeme, že $G \cap A$ je neprázdná. Vezmeme $x \in G$, ta neprázdná je. Jelikož $x \in \overline{A}$, existují $x_j \in A$ tak, že $x_j \to x$. Ale G je okolí x v B, tedy existuje k tak, že $x_k \in G$. Tedy $G \cap A$ je neprázdná, podobně $H \cap A$ je neprázdná, tyto množiny jsou disjunktní a otevřené v A. Jelikož A je souvislý, existuje $z \in A \setminus (G \cup H)$. Tento bod je v $B \setminus (G \cup H)$. Ukázali jsme, že pro každé neprázdné disjunktní množiny G, H otevřené v B je $G \cup H \neq B$, tedy B je souvislý. $\square$

Věta 20.22 (souvislost sjednocení). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Nechť I je neprázdná množina a $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ jsou souvislé podmnožiny P. Nechť každé dvě množiny A_α, A_β, $\alpha, \beta \in I$, se protínají. Potom $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je souvislá.*

Důkaz. Nejprve uvažujme jen dvě souvislé množiny S, T, a $x \in S \cap T$. Nechť G, H jsou disjunktní neprázdné množiny otevřené v $S \cup T$. Předpokládejme pro spor, že $G \cup H = S \cup T$. Potom můžeme předpokládat, že $x \in G$. Zvolme $y \in H$. Potom y náleží do jedné z množin S, T, dejme tomu do S. Pak $S \cap G$ a $S \cap H$ jsou neprázdné disjunktní množiny otevřené v S, které dávají dohromady S, spor.

V obecném případě předpokládejme pro spor, že existují disjunktní neprázdné množiny G, H otevřené v A, jejichž sjednocení je A. Najděme α, $\beta \in I$ (ne nutně různé) tak, že $G \cap A_\alpha \neq \emptyset$ a $H \cap A_\beta \neq \emptyset$. Podle předchozího kroku je $B := A_\alpha \cup A_\beta$ souvislá, ale $B \cap G$ a $B \cap H$ jsou neprázdné disjunktní množiny otevřené v B jejichž sjednocení je B, spor. $\square$

Příklad. Nechť

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \sqrt{1 - x^2}\,\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = -\sqrt{1 - x^2}\,\}.$$

Potom A, B jsou souvislé (zatím vezměme jako fakt), ale $A \cap B$ není souvislá.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množiny $A, B \subset P$ jsou **oddělené**, jestliže existují disjunktní otevřené množiny G, H v P tak, že $A \subset G$ a $B \subset H$.

Věta 20.23 (normalita metrických prostorů)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Nechť $E, F \subset P$ jsou disjunktní uzavřené množiny. Potom E a F jsou oddělené.*

Důkaz. Ke každému $x \in E$ najdeme $\delta_x > 0$ tak, že $B(x, 2\delta_x) \cap F = \emptyset$. Podobně, ke každému $y \in F$ najdeme $\delta_y > 0$ tak, že $B(y, 2\delta_y) \cap E = \emptyset$. Položme

$$G = \bigcup_{x \in E} B(x, \delta_x), \qquad H = \bigcup_{y \in F} B(y, \delta_y).$$

Potom samozřejmě G, H jsou otevřené, $E \subset G$ a $F \subset H$. Předpokládejme pro spor, že existuje $z \in G \cap H$. Potom existují $x \in E$ a $y \in F$ tak, že $\varrho(x, z) < \delta_x$ a $\varrho(y, z) < \delta_y$. Můžeme předpokládat $\delta_x \le \delta_y$. Potom

$$\varrho(x, y) \le \varrho(x, z) + \varrho(z, y) \le \delta_x + \delta_y \le 2\delta_y,$$

tedy $x \in E \cap B(y, 2\varrho_y)$, spor. □

Věta 20.24 (charakterisace souvislých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom M je nesouvislá, právě když existují disjunktní neprázdné oddělené množiny $A, B \subset M$ tak, že $A \cup B = M$.*

Důkaz. Nechť M je nesouvislá. Najděme disjunktní neprázdné množiny A, B otevřené v M tak, že $A \cup B = M$. Najděme otevřené množiny $U, V \subset P$ tak, že $A = M \cap U$ a $B = M \cap V$. Položme $Y = U \cup V$, $E = Y \setminus V$ a $F = Y \setminus U$. Potom E a F jsou disjunktní množiny uzavřené v Y, $A \subset E$ a $B \subset F$. Podle věty 20.23 existují disjunktní $G, H \subset Y$ otevřené v Y tak, že $E \subset G$ a $F \subset H$, tedy $A \subset G$ a $B \subset H$. Množiny G, H jsou otevřené i v P. Obrácená imlikace je zřejmá. □

Definice. Řekneme, že množina A je **komponenta** P, jestliže A je maximální souvislá podmnožina P.

Věta 20.25 (charakterisace komponent)**.** *Nechť (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor. Potom*

(a) *komponenty P jsou neprázdné a uzavřené,*
(b) *každý bod P je obsažen v některé komponentě,*
(c) *komponenty jsou navzájem disjunktní.*

Důkaz. (a) Jelikož jednobodové množiny jsou souvislé, prázdná množina nemůže být maximální. Nechť A je komponenta P. Podle Věty 20.21 je $\overline{A}$ souvislá, z maximality je $\overline{A} = A$.

(b) Nechť $x \in P$ a

$$A = \bigcup \{B \colon B \text{ souvislá, } x \in B\}.$$

Podle Věty 20.22 je A souvislá, maximalita plyne z konstrukce.

(c) Nechť A, B jsou různé komponenty P. Předpokládejme pro spor, že nejsou disjunktní, potom podle Věty 20.22 je $A \cup B$ souvislá. Z maximality je $A \cup B \subset A$, $A \cup B \subset B$, takže A, B nemohou být různé. □

konec 7. přednášky (12.03.2018)

Věta 20.26 (souvislé podmnožiny $\mathbb{R}$)**.** *Množina $A \subset \mathbb{R}$ je souvislá právě tehdy, když je to interval.*

Důkaz. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, $a = \inf A$, $b = \sup A$. Nechť A není interval s krajními body a a b. Potom existuje $x \in (a, b) \setminus A$. Množiny $(-\infty, x) \cap A$ a $(x, \infty) \cap A$ jsou potom neprázdné, disjunktní a otevřené v A, tedy A není souvislá.

Nyní předpokládejme, že A je interval a pro spor, že není souvislá. Pak máme neprázdné disjunktní množiny G, H otevřené v A tak, že $G \cup H = A$. Zvolme $x \in G$, $y \in H$, můžeme předpokládat $x < y$. Položme

$$s = \sup\{t \in A\colon (x, t) \subset G\}.$$

Množina G obsahuje pravé okolí x a H obsahuje levé okolí y. Odtud vidíme $x < s < y$, tedy s je vnitřní bod A. Jestliže $s \in G$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $(s - \delta, s + \delta) \subset G$. Jestliže $s \in H$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $(s - \delta, s + \delta) \subset H$. V obou případech dostaneme spor s definicí s. □

Důsledek. *Nechť f je spojité zobrazení intervalu I do metrického prostoru. Potom $f(I)$ je souvislá množina.*

Příklady. (a) Prostor $\mathbb{R}$ je souvislý.

(b) Prostor $[0, 1] \cup (2, 3)$ není souvislý a má dvě komponenty souvislosti.

(c) Vraťme se k příkladu 20.3. Množiny A, B z tohoto příkladu jsou spojité obrazy intervalu, tedy souvislé.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **křivkově souvislý**, jestliže pro každé $x, y \in P$ existuje spojité zobrazení $\gamma\colon [0, 1] \to (P, \varrho)$ takové, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **křivkově souvislá**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) křivkově souvislý.

Věta 20.27 (souvislost souvislosti s křivkovou souvislostí)**.** *Každý křivkově souvislý metrický prostor je souvislý.*

Důkaz. Nechť P je křivkově souvislý. Předpokládejme pro spor, že P je nesouvislý. Máme neprázdné disjunktní otevřené množiny $G, H \subset P$ tak, že $G \cup H = P$. Zvolme $x \in G$ a $y \in H$ a najděme $\gamma\colon [0, 1] \to (P, \varrho)$ takovou, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$. Buď $A = \gamma([0, 1])$. Potom A je spojitý obraz intervalu, tedy podle vět 20.20 a 20.26 je A souvislá. Ale $A \cap G$ a $A \cap H$ jsou neprázdné disjunktní a otevřené v A, spor. □

Příklady. (a) Graf spojité funkce na intervalu je křivkově souvislý.

(b) Podmnožina prostoru $\mathbb{R}^2$ definovaná jako graf funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0] \\ \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

je příkladem souvislého metrického prostoru, který není křivkově souvislý.

Poznámky. (a) Spojitý obraz křivkově souvislého metrického prostoru je křivkově souvislý.

(b) Uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislý.

(c) Sjednocení křivkově souvislých množin s neprázdným průnikem je křivkově souvislá množina.

Věta 20.28 (souvislost v NLP)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Potom*

(a) *Každá konvexní množina v X je křivkově souvislá.*

(b) *Každá souvislá otevřená podmnožina $G \subset X$ je křivkově souvislá.*

(c) *Nechť $G \subset X$ je otevřená. Potom komponenty G jsou otevřené v X.*

Důkaz. (a) Nechť $A \subset X$ je konvexní a $x, y \in A$. Položme $\gamma(t) = x + t(y - x)$, $t \in [0, 1]$. Potom γ "parametrizuje" úsečku spojující x a y, tedy $\gamma([0, 1]) \subset A$. Spojitost γ je zřejmá.

(b) Zvolme $x \in G$ a definujme H jako sjednocení všech otevřených křivkově souvislých podmnožin G obsahujících x. Podle předchozí poznámky (c) je H křivkově souvislá, stačí ukázat, že $H = G$. Zřejmě H je otevřená v G. Dokážeme ještě, že H je uzavřená v G. Nechť $y \in G \cap \overline{H}$. Najdeme otevřenou kouli $B \subset G$ se středem v y. Potom B je křivkově souvislá podle bodu (a). Z definice $\overline{H}$ najdeme $z \in B \cap H$. Potom libovolný bod $u \in B$ můžeme spojit křivkou s x, neboť u spojíme se z v B a z spojíme s x v H. Z maximality plyne $B \cup H \subset H$. Tím jsme dokázali $y \in H$ pro každé $y \in G \cap \overline{H}$, tedy H je uzavřená v G. Shrneme: H je neprázdná a obojetná v G, jelikož G je souvislý, máme $H = G$.

(c) Nechť H je komponenta G a $x \in H$. Najděme kouli $B \subset G$ se středem v x. Potom B je souvislá podle bodu (a) a věty 20.27, $B \cup H$ je souvislá podle věty 20.22, tedy z maximality $B \subset H$. Bod x má tedy okolí B ležící v H. □

Věta 20.29 (struktura otevřených podmnožin $\mathbb{R}$)**.** *Je-li $G \subset \mathbb{R}$ otevřená, pak existuje spočetný disjunktní systém otevřených intervalů $\mathcal{I}$ takový, že $G = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$.*

Důkaz. Uvažujme systém všech komponent G. Tyto komponenty jsou otevřené podle věty 20.28, intervaly podle věty 20.26, disjunktní podle věty 20.25(c).

□

Věta 20.30 (aplikace souvislosti)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná souvislá otevřená množina a $f\colon G \to \mathbb{R}$ je zobrazení splňující $f'(x) = 0$ pro každé $x \in G$. Potom f je konstantní na G.*

Důkaz. Zvolme $x \in G$ a položme $H = \{x \in G\colon f(y) = f(x)\}$. Potom H je neprázdná, neboť obsahuje x. Dokážeme-li, že H je obojetná, máme ze souvislosti $H = G$, což dokazuje tvrzení. Uzavřenost H v G je zřejmá, zbývá otevřenost. Nechť $z \in H$ a B je otevřená koule se středem v z obsažená v G. Zvolme $y \in B$ a definujme funkci $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ předpisem $g(t) = f(z + t(y - z))$. Potom g je spojitá na $[0, 1]$ a $g'(t) = f'(z + t(y - z))(y - x) = 0$ pro všechna $t \in (0, 1)$. Tedy g je konstantní a tudíž $f(y) = g(1) = g(0) = f(z) = f(x)$. K danému $z \in H$ jsme našli jeho okolí B ležící v H, tedy H je otevřená. □

konec 8. přednášky (15.03.2018)

21. Křivkový a plošný integrál

Lebesgueova míra je matematickým vyjádřením intuitivního pojmu objem (v dimenzi 3) nebo povrch (v dimenzi 2). Podobně chceme matematicky vyjádřit pojem délky nebo povrchu v dimenzi 3.

21.1. Kulová teorie míry.

Značení. Symbolem λ^n budeme značit n-dimenzionální Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$. Symbolem $\mathcal{L}^n$ budeme značit n-dimenzionální vnější Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť $\mathcal{V}$ je systém podmnožin $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\mathcal{V}$ **pokrývá** množinu A neboli je její **pokrytí**, jestliže A je podmnožinou sjednocení $\mathcal{V}$. Řekneme, že pokrytí $\mathcal{V}$ množiny A je **vitaliovsky jemné**, jestliže množina A je pokryta každým ze systémů

$$\{U \in \mathcal{V}\colon \operatorname{diam} U < \delta\}, \qquad \delta > 0.$$

Věta 21.1 (Vitaliova věta o pokrytí)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je množina, $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Nechť $\mathcal{V}$ je vitaliovsky jemné pokrytí A uzavřenými koulemi. Potom existuje spočetný po dvou disjunktní podsystém $\mathcal{W}$ systému $\mathcal{V}$, který pokrývá A až na množinu Lebesgueovy míry nula. Navíc, systém*

$$\hat{\mathcal{W}} = \{B(x, 5r)\colon \overline{B}(x, r) \in \mathcal{W}\}$$

pokrývá A beze zbytku.

Důkaz. Je-li K koule o poloměru r, budeme značit $r(K) = r$. Pokud k pokrytí A stačí konečný po dvou disjunktní podsystém, není co řešit. Jinak konstruujme indukcí posloupnost $\{\overline{B}(x_j, r_j)\}_j$ koulí z $\mathcal{V}$. Budeme značit

$$\begin{aligned} K_j &= \overline{B}(x_j, r_j), \\ \hat{K}_j &= B(x_j, 5r_j). \end{aligned}$$

Najděme otevřenou množinu $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $A \subset G_1$ a $\lambda^n(G) < \infty$. Označme

$$s_1 = \sup\{r(K)\colon K \in \mathcal{V},\ K \subset G_1\}$$

a najděme $K_1 \in \mathcal{V}$ tak, že $K_1 \subset G_1$ a $r(K_1) > s_1/2$. V obecném kroku ($j > 1$) označme

$$\begin{aligned} G_j &= G_1 \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_{j-1}), \\ s_j &= \sup\{r(K)\colon K \in \mathcal{V},\ K \subset G_j\}. \end{aligned}$$

Množina G_j je otevřená. Jelikož jsme předpokládali, že konečný podsystém nestačí, existuje bod $x \in A$ nepokrytý koulemi $K_1, \dots, K_{j-1}$. Jelikož pokrytí $\mathcal{V}$ je Vitaliovsky jemné, existuje $K \in \mathcal{V}$ tak, že $x \in K \subset G_j$. Tedy $s_j > 0$ a můžeme najít $K_j \in \mathcal{V}$ tak, že $K_j \subset G_j$ a $r(K_j) > s_j/2$. Tím je konstrukce ukončena. Ukážeme, že systém $\mathcal{W} = \{K_j : j \in \mathbb{N}\}$ má požadované vlastnosti. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z konstrukce je zřejmé, že koule K_j jsou po dvou disjunktní a obsažené v G_1, tedy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(K_j) \le \lambda^n(G_1) < \infty. \tag{1}$$

Jelikož $\lambda^n(\hat{K}_j) = 5^n \lambda^n(K_j)$ pro každé $j \in \mathbb{N}$, je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(\hat{K}_j) < \infty.$$

Existuje tedy $m \in \mathbb{R}^n$ tak, že

$$\lambda^n\Big(\bigcup_{j=m}^{\infty} \hat{K}_j\Big) \le \sum_{j=m}^{\infty} \lambda^n(\hat{K}_j) < \varepsilon.$$

Důkaz završíme tím, že ukážeme

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \subset \bigcup_{j=m}^{\infty} \hat{K}_j, \tag{2}$$

čímž ověříme, že nepokrytá množina má libovolně malou míru. Zvolme $x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Najděme kouli $\overline{B}(z,r) \in \mathcal{V}$ tak, že $x \in \overline{B}(z,r) \subset G_m$ a $r \le s_m$. Taková koule existuje, protože $x \in G_m$ a pokrytí $\mathcal{V}$ je vitaliovsky jemné. Z konstrukce je zřejmé srovnání

$$s_j/2 < r_j \le s_j.$$

Z (1) dostaneme

$$\sum_j r_j^n < \infty,$$

takže

$$\lim_{j\to\infty} s_j = \lim_{j\to\infty} r_j = 0.$$

Najdeme $p > m$ tak, že $s_p < r \le s_{p-1}$. Koule $\overline{B}(z,r)$ není v G_p, protože $s_p < r$, ale je v G_m. Musí tedy existovat koule K_q, $m \le q < p$, tak, že $K_q \cap \overline{B}(z,r) \ne \emptyset$. Jelikož $x \in \overline{B}(z,r)$, je

$$|x - x_q| \le r_q + 2r \le r_q + 2s_{p-1} \le r_q + 2s_q < r_q + 4r_q = 5r_q.$$

Tedy $x \in \hat{K}_q$ a tím je ověřeno (2). Z důkazu je zřejmé, že systém $\hat{W}$ pokrývá A beze zbytku. □

Poznámky. Předpoklad $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ lze vynechat za cenu komplikování důkazu.

V dimenzi 1 se jedná o pokrývání uzavřenými intervaly.

Varianta Vitaliovy věty s důrazem na pokrývání systémem $\hat{\mathcal{W}}$ platí i v metrických prostorech, není potřeba míry.

Věta 21.2 (o vyplnění koulemi)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\delta > 0$. Potom existuje posloupnost $\{\overline{B}(x_j,r_j)\}_j$ pod dvou disjunktních koulí obsažených v G tak, že*

$$\operatorname{diam} B(x_j,r_j) < \delta,$$
$$G \subset \bigcup_j B(x_j, 5r_j)$$

a

$$\lambda^n\Big(G \setminus \bigcup_j \overline{B}(x_j,r_j)\Big) = 0.$$

Důkaz. Uvažujme systém $\mathcal{V}$ všech koulí, které můžeme použít. Podle Vitaliovy věty 21.1 existuje spočetný po dvou disjunktní podsystém $\mathcal{W}$, který srovnán do posloupnosti poskytuje požadované vlastnosti. Systém $\mathcal{W}$ je nekonečný, protože otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^n$ nejde napsat jako sjednocení konečně mnoha uzavřených koulí. □

Věta 21.3 (o kulové míře)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$. Potom*

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\Big\{\sum_j \lambda_n(B(x_j,r_j))\colon A \subset \bigcup_j \overline{B}(x_j,r_j),\ 2r_j < \delta\Big\}.$$

Důkaz. Pravou stranu dokazované nerovnosti označme $\mathcal{K}^n(A)$. V důkazu nerovnosti $\mathcal{K}^n(A) \geq \mathcal{L}^n(A)$ můžeme předpokládat, že $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Víme, že

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \big\{ \lambda^n(G) \colon G \supset A \text{ otevřená} \big\}.$$

Zvolíme $\varepsilon > 0$ a najdeme $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou tak, že

$$\lambda^n(G) < \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$

Použijeme koule $K_j = \overline{B}(x_j, r_j)$ z věty 21.2, které jsou po dvou disjunktní, jejich poloměr je menší než $\delta/10$ a vyplní G až na množinu N míry 0. Zároveň víme, že koule $\hat{K}_j = B(x_j, 5r_j)$ pokrývají A, takže

$$\mathcal{K}^n(A) \leq \sum_j \lambda^n(\hat{K}_j) = 5^n \sum_j \lambda^n(K_j) \leq 5^n \lambda^n(G),$$

tedy přechodem $\varepsilon \to 0$

$$\mathcal{K}^n(A) \leq 5^n \mathcal{L}^n(A). \tag{3}$$

To není ještě zcela uspokojivé. $\mathcal{K}^n$ je však vnější míra, a použijeme-li (3) na množinu N, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^n(A) &\leq \mathcal{K}^n\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\Big) + \mathcal{K}^n(N) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(K_j) + 5^n \mathcal{L}^n(N) \leq \mathcal{L}^n(G) \\ &< \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon\end{aligned}$$

Pošleme ε k nule a dostaneme nerovnost $\mathcal{K}^n(A) \geq \mathcal{L}^n(A)$. Opačná nerovnost plyne se spočetné subaditivity Lebesgueovy míry. □

konec 9. přednášky (19.03.2018)

Značení. Pro $k > 0$ označme

$$\alpha_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)}, \tag{4}$$

kde

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} \, dx, \quad s > 0.$$

V přednášce z teorie míry a integrálu se dokazuje, že pro koule v $\mathbb{R}^n$ platí

$$\lambda^n(B(x,r)) = \alpha_n r^n.$$

Věta 21.4 (isodiametrická nerovnost)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha_n \big(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} A\big)^n.$$

Poznámky. Důkaz je poněkud delší, přednáší se v kursu Reálné funkce. Obtížnost je v tom, že ne každá množina o diametru $2r$ se vejde do koule o poloměru r.

Pro koule nastává v isodiametrické nerovnosti rovnost.

21.2. **Hausdorffovy míry.**

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $k > 0$. Pro $A \subset P$ a $\delta > 0$ položme

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k(\tfrac{1}{2}\operatorname{diam} A_j)^k;\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,\ \operatorname{diam} A_j \le \delta\Big\}.$$

Definujme

$$\mathcal{H}^k(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^k_\delta(A).$$

Množinové funkci $\mathcal{H}^k_\delta$ se říká **k-rozměrný Hausdorffův δ-obsah**, $\mathcal{H}^k$ se nazývá **k-rozměrná Hausdorffova (vnější) míra**. Oprávněnost termínu "Hausdorffova vnější míra" ukážeme později. V geometrické teorii míry je zvykem používat pojem "míra" ve smyslu "vnější míra", proto v literatuře najdeme termín "Hausdorffova míra" používaný i pro Hausdorffovu vnější míru. Koeficient α_k je volen tak, abychom v $\mathbb{R}^n$ dostali $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ (věta 21.10), pro k necelé je jeho význam jen estetický.

Poznámky. Funkce $\delta \mapsto \mathcal{H}^k_\delta(A)$ je zřejmě nerostoucí, a proto existuje limita $\lim_{\delta\to 0+} \mathcal{H}^k_\delta(A)$, která se rovná $\mathcal{H}^k(A)$.

V definici $\mathcal{H}^k_\delta(A)$ můžeme pokrývat jen uzavřenými množinami a dostaneme stejnou hodnotu $\mathcal{H}^k_\delta(A)$. Pokrytí $\{A_j\}$ množiny A totiž můžeme nahradit pokrytím $\{\overline{A_j}\}$, neboť uzávěr množiny nezvětšuje diametr. Také můžeme pokrývat jen otevřenými množinami, neboť diametr množiny

$$\bigcup_{x\in A} B(x, \varepsilon)$$

je jen nejvýš o 2ε větší, než průměr A.

Nabízí se varianta definice, v níž by se pokrývalo jen koulemi. Tím bychom dostali trochu jinou vnější míru. Hausdorffova míra se chová lépe. Existují i konstrukce k-rozměrných měr založené na úplně jiných principech, ale standard je Hausdorffova míra.

Věta 21.5 (vnější míra)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $k, \delta > 0$. Potom množinové funkce $\mathcal{H}^k_\delta$ a $\mathcal{H}^k$ jsou vnější míry na P.*

Důkaz. V kursu Teorie míry a integrálu se ukazuje, že konstrukce použitá k definici $\mathcal{H}^k_\delta$ vede na vnější míru. Přechod od $\mathcal{H}^k_\delta$ k $\mathcal{H}^k$ je snadné cvičení. □

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množiny $A, B \subset P$ jsou **vzdálené**, jestliže

$$\inf\{\varrho(x, y);\ x \in A, y \in B\} > 0.$$

Řekneme, že vnější míra γ na P je **metrická**, jestliže pro každé dvě vzdálené množiny $A, B \subset P$ platí $\gamma(A \cup B) \ge \gamma(A) + \gamma(B)$. (Opačná nerovnost je splněna pro každou vnější míru.)

Věta 21.6 (měřitelnost borelovských množin)**.** *Nechť γ je metrická vnější míra na metrickém prostoru (P, ϱ). Potom je každá borelovská podmnožina P γ-měřitelná.*

Důkaz. Viz přednášku Teorie míry a integrálu. □

Věta 21.7 (metričnost Hausdorffovy míry)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $k > 0$. Potom $\mathcal{H}^k$ je metrická vnější míra na P.*

Důkaz. Nechť A, $B \subset P$ jsou vzdálené a $0 < \delta < \frac{1}{2} \inf\{\varrho(x,y);\ x \in A, y \in B\}$. Nechť $\{E_j\}_j$ je posloupnost podmnožin P takových, že $\operatorname{diam} E_j \leq \delta$ a

$$A \cup B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Položme

$$I = \{j\colon E_j \cap A \neq \emptyset\}, \qquad J = \{j\colon E_j \cap B \neq \emptyset\}.$$

Potom $I \cap J = \emptyset$. Tedy

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) + \mathcal{H}^k_\delta(B) \leq \sum_{j\in I} \alpha_k(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} A_j)^k + \sum_{j \in J} \alpha_k(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} A_j)^k \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} A_j)^k.$$

Přechodem k infimu přes všechna taková pokrytí $\{E_j\}_j$ dostaneme

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) + \mathcal{H}^k_\delta(B) \leq \mathcal{H}^k_\delta(A \cup B) \leq \mathcal{H}^k(A \cup B).$$

Důkaz dokončíme přechodem k supremu přes $\delta > 0$. □

Důsledek. *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $k > 0$. Potom každá borelovská množina $A \subset P$ je $\mathcal{H}^k$-měřitelná.*

Úmluva. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $k > 0$. Termín k-rozměrná Hausdorffova míra by se měl používat (a budeme používat) pro množinovou funkci, která každé $\mathcal{H}^k$-měřitelně množině $A \subset P$ přiřadí $\mathcal{H}^k(A)$ a na ostatních množinách není definovaná. Nechť $A \subset P$ je $\mathcal{H}^k$-měřitelná množina a $f\colon A \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{H}^k$-měřitelná funkce. Potom symbol

$$\int_A f \, d\mathcal{H}^k$$

budeme používat pro integrál f podle Hausdorffovy míry, ačkoli, striktně vzato, Hausdorffova míra by se měla značit jinak než vnější Hausdorffova míra (podobně jako rozlišujeme $\mathcal{L}^n$ a λ^n). Kdybychom však zavedli různé symboly pro Hausdorffovu míru a vnější Hausdorffovu míru, aspoň v jednom případě bychom se odchýlili od zbytku světa.

Věta 21.8 (regularita Hausdorffovy míry)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $k > 0$. Nechť $A \subset P$. Potom existuje borelovská množina $B \subset P$ taková, že $A \subset B$ a $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $\mathcal{H}^k(A) < \infty$. Pro $m \in \mathbb{N}$ najdeme otevřené pokrytí $\{A_{m,j}\}_j$ množiny A tak, že $\operatorname{diam} A_{m,j} \leq 2^{-m}$ a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k \big(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} A_{m,j}\big)^k < \mathcal{H}^k(A) + 2^{-m}$$

Položme

$$B = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{m,j}.$$

Potom

$$\mathcal{H}^k_{2^{-m}}(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k \big(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} A_{m,j}\big)^k \leq \mathcal{H}^k(A) + 2^{-m}.$$

Odtud dostaneme, že $\mathcal{H}^k(B) \leq \mathcal{H}^k(A)$. Opačná nerovnost je zřejmá. □

Věta 21.9 (vlastnosti Hausdorffovy míry)**.** *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory.*

(a) *Nechť $k > 0$, $A \subset P$ a $f\colon A \to Q$ je β-lipschitzovské. Potom*

$$\mathcal{H}^k\big(f(A)\big) \leq \beta^k \mathcal{H}^k(A).$$

(b) *Nechť $k > 0$, $A \subset P$ a $f\colon A \to Q$ je izometrie. Potom*

$$\mathcal{H}^k\big(f(A)\big) = \mathcal{H}^k(A).$$

(c) *Nechť $0 < p < q$, $A \subset P$ a platí $\mathcal{H}^p(A) < \infty$. Potom $\mathcal{H}^q(A) = 0$.*

Důkaz. (a) Zvolme $\delta > 0$ a uvažujeme pokrytí $\{A_j\}$ množiny A, $\operatorname{diam} A_j \leq \delta$. Potom množiny $f(A_j)$ splňují $\operatorname{diam} f(A_j) \leq \beta \operatorname{diam} A_j \leq \beta\delta$ a pokrývají $f(A)$. Tedy

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\beta\delta}(f(A)) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k \big(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} f(A_j)\big)^k \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \beta^k \alpha_k \big(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} A_j\big)^k\end{aligned}$$

a přechodem k infimu přes všechna takové pokrytí dostaneme

$$\mathcal{H}_{\beta\delta}(f(A)) \leq \beta^k \mathcal{H}^k_\delta(A) \leq \beta^k \mathcal{H}^k(A).$$

Nyní provedeme přechod $\delta \to 0$.

(b) je zřejmý důsledek (a).

(c) Zvolme $\delta > 0$ a uvažujeme pokrytí $\{A_j\}$ množiny A, $\operatorname{diam} A_j \leq \delta$. Potom

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^q_\delta(A) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_q \big(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} A_j\big)^q \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_q \big(\tfrac{\delta}{2}\big)^{q-p} \big(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} A_j\big)^p.\end{aligned}$$

Přechodem k infimu přes všechna takové pokrytí dostaneme

$$\mathcal{H}^q_\delta(A) \leq \tfrac{\alpha_q}{\alpha_p} \big(\tfrac{\delta}{2}\big)^{q-p} \mathcal{H}^p(A)$$

Přechod $\delta \to 0$ dává $\mathcal{H}^q(A) = 0$. □

Věta 21.10 (souvislost Hausdorffovy a Lebesgueovy míry)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$.*

Důkaz. Uvažujme pokrytí množiny A množinami A_j. Potom z isodiametrické nerovnosti dostaneme

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_j \mathcal{L}^n(A_j) \leq \sum_j \alpha_n \big(\tfrac{1}{2} \operatorname{diam} A_j\big)^n$$

a přechodem k infimu přes všechna taková pokrytí dostaneme

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n_\infty(A) \leq \mathcal{H}^n(A).$$

Obráceně, zvolme $\delta > 0$. Z věty 21.3 dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n_\delta(A) &\leq \inf\Big\{\sum_j \alpha_n\big(\tfrac{1}{2}\operatorname{diam} A_j\big)^n \colon A \subset \bigcup_j A_j,\ \operatorname{diam} A_j \leq \delta\Big\}\\ &\leq \inf\Big\{\sum_j \alpha_n r_j^n \colon A \subset \bigcup_j \overline{B}(x_j, r_j),\ 2r_j \leq \delta\Big\}\\ &\leq \mathcal{L}^n(A).\end{aligned}$$

□

konec 10. přednášky (22.03.2018)

Lemma 21.11. *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, a $L \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je prosté lineární zobrazení. Potom pro každou λ^k-měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}^k$ platí*

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = \sqrt{\det L^T L} \cdot \lambda^k(A).$$

Značení. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, a $L \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení. Budeme značit $\operatorname{vol} L = \sqrt{\det L^T L}$.

Poznámka. Symbol vol je zvolen podle anglického slova **volume**, které znamená objem. Matice $L^T L$ se nazývá Gramova matice. Podle Lemmatu 21.11 platí $\mathcal{H}^k(L([0,1]^k)) = \operatorname{vol} L$, takže číslo $\operatorname{vol} L$ vyjadřuje k-dimenzionální objem rovnoběžnostěnu $L([0,1]^k)$. Je-li $\varphi \in \mathcal{C}^1(G)$, pak je zobrazení $t \mapsto \operatorname{vol} \varphi'(t)$ spojité na množině G.

Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi \colon G \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že φ je **regulární** na G, jestliže je třídy $\mathcal{C}^1$ na G a $\varphi'(x)$ je prosté pro každé $x \in G$.

Lemma 21.12. *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi \colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\beta > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že*

(a) *zobrazení $y \mapsto \varphi\big(\varphi'(x)^{-1}(y)\big)$ je β-lipschitzovské na $\varphi'(x)(V)$,*
(b) *zobrazení $z \mapsto \varphi'(x)\big(\varphi^{-1}(z)\big)$ je β-lipschitzovské na $\varphi(V)$.*

Lemma 21.13. *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi \colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\alpha > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že pro každou λ^k-měřitelnou $E \subset V$ platí*

$$\alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k(\varphi(E)) \leq \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

Věta 21.14 (area formule)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi \colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení a $f \colon \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je borelovská. Potom platí*

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t),$$

pokud integrál na pravé straně konverguje.

konec 11. přednášky (26.03.2018)

Poznámka. Area formule platí i v případě, kdy je zobrazení φ lokálně lipschitzovské.

Poznámka (coarea formule)**.** Nechť $k,n \in \mathbb{N}, k > n$, $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je lipschitzovské zobrazení, $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je λ^k-integrovatelná funkce. Potom platí

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\sqrt{\det(\varphi'(x)\varphi'(x)^T)}\, d\lambda^k(x) = \int_{R^n} \left(\int_{\varphi^{-1}(\{y\})} f(x)\, d\mathcal{H}^{k-n}(x) \right) d\lambda^n(y).$$

Věta 21.15 (důsledek coarea formule)**.** *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, a $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ je λ^k-integrovatelná funkce. Potom platí*

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\, d\lambda^k(x) = \int_0^\infty \Big(\int_{\{x \in \mathbb{R}^k; \|x\|=r\}} f(x)\, d\mathcal{H}^{k-1}(x) \Big)\, d\lambda^1(r).$$

21.3. **Křivky, plochy a jejich orientace.**

Definice. Nechť $k,n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Řekneme, že neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **k-plocha**, jestliže pro každé $x \in M$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ takový, že $x \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M.

Příklady. (a) Množina $\{0\} \times (0,1)^2$ je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$,
(b) je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pak $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$ je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$,
(c) je-li $n,k \in \mathbb{N}$, $k < n$, $H \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $F\colon H \to \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy C^1, $\operatorname{rank} F'(x) = n-k$ pro každé $x \in H$ a $M = \{x \in H;\ F(x) = 0\}$ je neprázdná, pak M je k-plocha v $\mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť $k,n \in \mathbb{R}^n, k \leq n$, M je k-plocha a $x \in M$. Pak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazveme **tečným vektorem** k ploše M v bodě x, jestliže existuje otevřený interval I, a spojité zobrazení $c\colon I \to M$ a $t_0 \in I$ takové, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$.

Množinu všech tečných vektorů k ploše M v bodě x nazýváme **tečným prostorem** k ploše M v bodě x a značíme $T_x(M)$.

Věta 21.16 (popis tečného prostoru)**.** *Nechť $k,n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha a $x \in M$.*

(a) *Potom $T_x(M)$ je k-dimenzionální vektorový prostor.*
(b) *Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $a \in G$ a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus takový, že $x = \varphi(a) \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M. Potom $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) = T_x(M)$.*

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha a $x \in M$. Řekneme, že $v \in \mathbb{R}^n$ je **normálový vektor** k ploše M v bodě x, jestliže $v \in T_x(M)^\perp$.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Pak definujeme **vektorový součin** vektorů $u^1, \dots, u^{n-1}$ předpisem

$$u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = \big(\det([e^i, u^1, \dots, u^{n-1}]\big)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n.$$

Věta 21.17 (vlastnosti vektorového součinu)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbb{R}^n$.*

(a) *Pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ platí*
$$\langle v, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = \det[v, u^1, \dots, u^{n-1}].$$
(b) *Vektory $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když $u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = o$.*
(c) *Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle u^i, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = 0$.*
(d) *Platí $\|u^1 \times \cdots \times u^{n-1}\| = \operatorname{vol}[u^1, \dots, u^{n-1}]$.*

Poznámka. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha, $x \in M$, $G \subset \mathbb{R}^k$ a φ je příslušný regulární homeomorfismus $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ splňující $\varphi(a) = x \in \varphi(G) \subset M$. Potom

$$\nu(x) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(\varphi^{-1}(x))}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(\varphi^{-1}(x))\|},$$

kde $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t) = (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(t), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(t))$, je jednotkový normálový vektor k ploše M. Zobrazení ν je spojité na jisté otevřené množině v M obsahující x.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, a $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\nu(x) \in T_x(M)^\perp$ a $\|\nu(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$.

Poznámka. Zobrazení ν je spojité pole jednotkových normálových vektorů.

konec 12. přednášky (29.03.2018)

Příklad. Pro plochu $M = \{0\} \times (0,1)^2$ určete $\nu(x), x \in M$.

Příklad. Pro plochu $M = \mathbb{S}_2$ určete $\nu(x), x \in M$.

Lemma 21.18. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$. Nechť je splněna podmínka*

(R) *existuje okolí U bodu z a* ***rozhraničující*** *funkce $h\colon U \to \mathbb{R}$ taková, že $h \in \mathcal{C}^1(U)$, $\nabla h(z) \neq o$ a $U \cap \Omega = \{x \in U; h(x) < 0\}$.*

Potom existuje okolí $V \subset U$ bodu z takové, že $V \cap H(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha. Vektor $\nu_\Omega(z) = \frac{\nabla h(z)}{\|\nabla h(z)\|}$ je jednotkový normálový vektor v bodě z k $V \cap H(\Omega)$ a nezávisí na volbě rozhraničující funkce h.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$. Řekneme, že bod z je **regulárním bodem** hranice Ω, pokud je splněna podmínka (R) z Lemmatu 21.18. Vektor $\nu_\Omega(z)$ nazýváme **vnějším jednotkovým normálovým vektorem** k Ω v bodě z. Množinu všech regulárních bodů hranice Ω značíme $H_*(\Omega)$.

Věta 21.19 (o $(n-1)$-ploše). *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená otevřená množina. Pokud $H_*(\Omega) \neq \emptyset$, pak $H_*(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν_Ω.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je 1-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\tau\colon M \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\tau(x) \in T_x(M)$ a $\|\tau(x)\| = 1$.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(a) Řekneme, že zobrazení $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojité.

(b) Řekneme, že parametrická křivka $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je **skoro regulární**, pokud existuje dělení $\{t_i\}_{i=0}^p$ intervalu $[a,b]$ takové, že
- c je třídy $\mathcal{C}^1$ na $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, p$,
- $\forall t \in [a,b] \setminus \{t_0, \dots, t_p\}\colon c'(t) \neq 0$.

(c) Řekneme, že křivka $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je **jednoduchá** a **uzavřená**, jestliže $c|_{[a,b)}$ je prosté a $c(a) = c(b)$.

konec 13. přednášky (05.04.2018)

Věta 21.20 (Jordanova). *Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená křivka. Pak existují disjunktní otevřené souvislé množiny $\operatorname{Int} c$ a $\operatorname{Ext} c$ takové, že $\operatorname{Int} c$ je omezená, $\operatorname{Ext} c$ je neomezená a platí $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c \cup c([a,b])$. Navíc platí $H(\operatorname{Int} c) = H(\operatorname{Ext} c) = c([a,b])$.*

Věta 21.21 (regulární body skoro regulární jednoduché křivky). *Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je skoro regulární jednoduchá uzavřená křivka. Potom všechny body množiny $H(\operatorname{Int} c)$ až na konečně mnoho jsou regulárními body $H(\operatorname{Int} c)$.*

21.4. **Gaussova, Greenova a Stokesova věta.**

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν a $f\colon M \to \mathbb{R}^n$. **Tok vektorového pole** f orientovanou plochou (M, ν) definujeme jako

$$\int_M \langle f(y), \nu(y) \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

pokud integrál konverguje.

Definice. Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **divergenci vektorového pole** f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

Věta 21.22 (Gaussova věta o divergenci). *Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^{n-1}\big(H(\Omega)\big) < \infty$, $\mathcal{H}^{n-1}\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$ a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Pak platí*

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y) \big\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x).$$

Definice.

(a) Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$

(b) Nechť $U \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \Big(\tfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \tfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \Big).$$

Věta 21.23 (Greenova). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega)\big) < \infty$, $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$ a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Nechť $\tau_\Omega\colon H_*(\Omega) \to \mathbb{R}^2$ je tečné vektorové pole k $H_*(\Omega)$ definované předpisem $\tau_\Omega(y) = - \times \nu_\Omega(y)$. Pak platí*

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \tau_\Omega(y) \big\rangle d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{rot} f(x) d\lambda^2(x).$$

Definice. Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je skoro regulární křivka.

(a) Nechť g je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. **Křivkový integrál prvního druhu** $\int_c g\,ds$ definujeme předpisem
$$\int_a^b g(c(t)) \cdot \|c'(t)\| dt,$$
pokud tento integrál konverguje.

(b) Nechť f je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. **Křivkový integrál druhého druhu** $\int_c f \cdot dc$ definujeme předpisem
$$\int_a^b \langle f(c(t)), c'(t)\rangle dt,$$
pokud tento integrál konverguje.

Věta 21.24 (křivkový integrál druhého druhu v $\mathbb{R}^2$)**.** *Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je skoro regulární jednoduchá uzavřená křivka a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\operatorname{Int} c}$. Jestliže existuje $t \in [a,b]$ takové, že $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)] > 0$, pak platí*
$$\int_c f \cdot dc = \int_{\operatorname{Int} c} \operatorname{rot} f(x) d\lambda^2(x).$$

Poznámka. Podmínka $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)] > 0$ v předchozí větě zaručuje kladný (proti směru hodinových ručiček) směr obíhání.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha orientovaná normálovým polem ν, $\Omega \subset G$ je relativně otevřená v G a $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subset G$. Řekneme, že $z \in H_G(\Omega)$ je **regulárním** bodem hranice Ω vzhledem ke G, jestliže existuje okolí U bodu z a funkce $h\colon U \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1$ taková, že $\nu(z) \times \nabla h(z) \neq 0$ a $\{x \in G \cap U; h(x) < 0\} = \Omega \cap U$. V takovém bodě definujeme
$$\tau_{\Omega,\nu}(z) = \frac{\nu(z) \times \nabla h(z)}{\|\nu(z) \times \nabla h(z)\|}.$$

Poznámka. Definice $\tau_{\Omega,\nu}(z)$ je korektní, neboť lze ukázat nezávislost na rozhraničující funkci.

Věta 21.25 (o regulárních bodech)**.** *Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Označme $H_G(\Omega)_*$ množinu všech regulárních bodů hranice Ω vzhledem ke G. Potom je $H_G(\Omega)_*$ 1-plocha a $\tau_{\Omega,\nu}$ je orientace $H_G(\Omega)_*$.*

Věta 21.26 (Stokesova)**.** *Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Předpokládejme dále, že Ω je omezená, $\mathcal{H}^1(H_G(\Omega)) < \infty$ a $\mathcal{H}^1(H_G(\Omega) \setminus H_G(\Omega)_*) = 0$. Nechť vektorové pole f z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Potom*
$$\int_{H_G(\Omega)} \langle f(y), \tau_{\Omega,\nu}(y)\rangle d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \langle \operatorname{rot} f(x), \nu(x)\rangle d\mathcal{H}^2(x).$$

konec 14. přednášky (09.04.2018)

21.5. **Hlavní věta teorie pole.**

Věta 21.27 (věta o potenciálu)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $c\colon [a,b] \to \Omega$ je skoro regulární křivka a $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1$. Potom*
$$u\big(c(b)\big) - u\big(c(a)\big) = \int_c \nabla u \cdot dc.$$

Definice. Řekneme, že množina $U \subset \mathbb{R}^n$ je **hvězdicovitá**, jestliže existuje bod $a \in U$ takový, že pro každé $x \in U$ platí $\{a + t(x-a); t \in [0,1]\} \subset U$.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je množina, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole a $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Řekneme, že u je **potenciál** pole f na Ω, jestliže pro každé $x \in \Omega$ platí $\nabla u(x) = f(x)$. Vektorové pole, které má potenciál, nazýváme **potenciální**.

Věta 21.28 (hlavní věta teorie pole)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité vektorové pole. Uvažujme následující výroky:*

(i) *vektorové pole f je potenciální,*
(ii) *pro každé skoro regulární křivky $c_i\colon [a,b] \to \Omega, i \in \{1,2\}$, splňující $c_1(a) = c_2(a)$ a $c_1(b) = c_2(b)$ platí $\int_{c_1} f \cdot dc_1 = \int_{c_2} f \cdot dc_2$,*
(iii) *pro každé $i,j \in \{1,\dots,n\}$ a $x \in \Omega$ platí $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.*

Potom platí:

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii)
(b) *Je-li f třídy $\mathcal{C}^1$, pak* (i) $\Rightarrow$ (iii).
(c) *Je-li f třídy $\mathcal{C}^1$ a Ω je hvězdicovitá, pak* (iii) $\Rightarrow$ (i).

Definice.

(a) Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ a g je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. **Plošný integrál prvního druhu** $\int_\Phi g dS$ definujeme předpisem
$$\int_G g(\Phi(t)) \cdot \operatorname{vol} \Phi'(t) dt,$$
pokud tento integrál konverguje.
(b) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ a f je vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. **Plošný integrál druhého druhu** $\int_\Phi f \cdot d\Phi$ definujeme předpisem
$$\int_G \Big\langle f(\Phi(t)), \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}}(t) \Big\rangle dt,$$
pokud tento integrál konverguje.

konec 15. přednášky (12.04.2018)
konec 16. přednášky (16.04.2018)

Větička. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $z \in G$, $h\colon G \to \mathbb{R}$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1(G)$, $\nabla h(z) \neq o$ a $v \in \mathbb{R}^n$ je vektor splňující $\langle \nabla h(z), v \rangle < 0$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (0,\delta)$ platí $h(z+tv) < h(z)$.*

konec 17. přednášky (19.04.2018)

Důkaz Gaussovy věty.

Lemma 1 (rozklad jednotky)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon > 0$. Pak existují funkce $\omega_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

(a) ω_j je nezáporná,
(b) ω_j je třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$,
(c) $\operatorname{diam} \operatorname{supp} \omega_j < \varepsilon$,
(d) $\sum_{j=1}^\infty \omega_j = 1$,

(e) pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu x takové, že množina $\{j \in \mathbb{N}; \operatorname{supp} \omega_j \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná.

Lemma 2 (otáčení prostoru)**.** Nechť V je reálný unitární prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$, $v \in V$ a $v \neq 0$. Potom existují vektory $u^1, \dots, u^n \in V$, které tvoří ortonormální bázi V a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle v, u^i \rangle > 0$.

Lemma 3 (popis oblasti)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $z \in H(\Omega)$ je regulární bod hranice Ω a $\nu_\Omega(z)_n > 0$. Potom existuje otevřená množina $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ obsahující bod $[z_1, \dots, z_{n-1}]$, otevřená množina $H \subset \mathbb{R}$ obsahující bod z_n a funkce $\varphi\colon W \to H$ taková, že $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$ a

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n < \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})\} \cap (W \times H) = \Omega \cap (W \times H).$$

Lemma 4 (lineární isometrie to nezkazí)**.** Nechť Ω a f jsou jako ve Větě 21.22 a $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární isometrie. Potom pro každý regulární bod z hranice Ω je bod $S(z)$ regulárním bodem hranice $S(\Omega)$ a platí $\nu_{S(\Omega)}(S(z)) = S(\nu_\Omega(z))$. Dále platí

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x) = \int_{S(\Omega)} \operatorname{div}(S \circ f \circ S^{-1})(\tilde{x}) d\lambda^n(\tilde{x}),$$

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y) \big\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$
$$= \int_{H(S(\Omega))} \big\langle S \circ f \circ S^{-1}(\tilde{y}), \nu_{S(\Omega)}(\tilde{y}) \big\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{y}).$$

Lemma 5 (jádro pudla)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená množina a $z \in H_*(\Omega) \cup \Omega$. Potom existuje otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ obsahující z taková, že pro každé vektorové pole f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$ a $\operatorname{supp} f \subset U$, platí

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y) \big\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x).$$

Lemma 6 (zbavíme se neregulárních bodů)**.** Nechť Ω a f jsou jako ve Větě 21.22 a $\operatorname{supp} f \cap (H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = \emptyset$. Potom

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y) \big\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x).$$

Lemma 7 (aproximace to nezkazí)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $N \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní a $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$. Potom existují $\mathcal{C}^1$ funkce $v_m\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $m \in \mathbb{N}$, takové, že platí:

(a) $v_m \to \chi_{\mathbb{R}^n \setminus N}$,
(b) $\int \|\nabla v_m(x)\| d\lambda^n(x) \to 0$,
(c) pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje otevřená množina $G_m \subset \mathbb{R}^n$ obsahující N taková, že $v_m|_{G_m} = 0$.

konec 18. přednášky (23.04.2018)

22. Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

Všechny integrály v této kapitole jsou Lebesgueovy.

22.1. **Derivace monotonní funkce.**

Definice. Nechť I je interval, x je vnitřní bod I a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujeme **horní a dolní derivaci** funkce f v bodě x následovně:

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ (horní derivace)},$$

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ (dolní derivace)}.$$

Poznámka. Každá monotónní funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.

Věta 22.1 (míra vzoru a obrazu)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce, $M \subset I$ a $c > 0$.*
(a) *Je-li $\overline{D}f(x) > c$ na M, potom $\mathcal{L}(f(M)) \geq c\mathcal{L}(M)$.*
(b) *Je-li $\underline{D}f(x) < c$ na M, potom $\mathcal{L}(f(M)) \leq c\mathcal{L}(M)$.*

Důkaz. (a) Zřejmě můžeme předpokládat, že $\mathcal{L}(f(M)) < \infty$. Buď S množina bodů nespojitosti f. Víme, že tato množina je spočetná. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ takovou, že

$$G \supset f(M), \quad \mathcal{L}(G) < \mathcal{L}(f(M)) + \varepsilon.$$

Ke každému bodu $x \in M \setminus S$ uvažujme intervaly tvaru $[a, b]$ takové, že

$$x \in [a, b], \quad f(b) - f(a) \geq c(b-a) \quad \text{a} \quad [f(a), f(b)] \subset G.$$

Tyto intervaly najdeme z definice horní derivace ve tvaru $[x, x+h]$ nebo $[x-h, x]$. Tyto intervaly zřejmě tvoří vitaliovsky jemné pokrytí množiny $M \setminus S$. Vybereme disjunktní intervaly $[a_j, b_j]$ takové, že

$$\mathcal{L}\Big(M \setminus \bigcup_j [a_j, b_j]\Big) = 0.$$

Pak máme

$$c\mathcal{L}(M) \leq c\sum_j (b_j - a_j) \leq \sum_j (f(b_j) - f(a_j)) \leq \mathcal{L}(G) \leq \mathcal{L}(f(M)) + \varepsilon.$$

(b) Buď A množina bodů $y \in f(I)$ takových, že $f^{-1}(y)$ není jednobodová, A je spočetná množina. Zvolme $\varepsilon > 0$ a najděme otevřenou množinu $H \subset \mathbb{R}$ tak, že

$$H \supset M, \quad \mathcal{L}(H) < \mathcal{L}(M) + \varepsilon.$$

Ke každému bodu $y = f(x) \in f(M) \setminus A$ najdeme intervaly $[a, b]$ tak, že

$$x \in [a, b], \quad 0 < f(b) - f(a) \leq c(b-a) \quad \text{a} \quad [a, b] \subset H.$$

Tyto intervaly najdeme z definice dolní derivace ve tvaru $[x, x+h]$ nebo $[x-h, x]$. Intervaly $[f(a),\, f(b)]$ tvoří vitaliovsky jemné pokrytí množiny $f(M) \setminus A$. Vybereme distjunktní $[f(a_j), f(b_j)]$ tak, že

$$\mathcal{L}\Big(f(M) \setminus \bigcup_j [f(a_j), f(b_j)]\Big) = 0.$$

a máme (povšimněme si, že intervaly (a_j, b_j) jsou po dvou disjunktní)

$$\mathcal{L}(f(M)) \leq \sum_j (f(b_j) - f(a_j)) \leq c\sum_j (b_j - a_j) \leq c\mathcal{L}(H) \leq c(\mathcal{L}(M) + \varepsilon).$$

$\square$

Věta 22.2 (derivace monotónní funkce)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Potom v skoro každém bodě $x \in I$ existuje $f'(x)$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je neklesající. Nechť $p < q$ a buď $M_{p,q}$ množina všech bodů, v nichž

$$\underline{D}f(x) < p < q < \overline{D}f(x).$$

Podle Věty 22.1 platí

$$q\mathcal{L}(M_{p,q}) \leq \mathcal{L}(f(M_{p,q})) \leq p\mathcal{L}(M_{p,q}),$$

tedy

$$\mathcal{L}(M_{p,q}) = 0.$$

Pro množinu M všech bodů neexistence derivace platí

$$M = \bigcup_{\substack{0<p<q \\ p,q\in\mathbb{Q}}} M_{p,q},$$

a tedy $\mathcal{L}(M) = 0$. □

konec 19. přednášky (26.04.2018)

Věta 22.3 (integrál derivace monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce a $M \subset [a,b]$ je měřitelná množina. Nechť v každém bodě $x \in M$ existuje vlastní $f'(x)$. Potom f' je lebesgueovsky integrovatelná na M, $f(M)$ je měřitelná a platí*

$$\int_M f'(x)\,dx = \lambda(f(M)).$$

Důkaz. Jestliže $N \subset M$ má míru nula, potom z Věty 22.1 dostaneme odhad

$$\mathcal{L}(f(\{x \in N\colon f'(x) \leq k\})) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

tedy $\lambda(f(N)) = 0$. Množina M se dá napsat jako sjednocení borelovské množiny a množiny míry nula. Monotónní obraz borelovské množiny je borelovský, tedy díky odhadu (5) je $f(M)$ měřitelná. Funkce $x \mapsto f'(x)$ je limitou posloupnosti měřitelných funkcí

$$f_k(x) = k\Big(f\big(x + \tfrac{1}{k}\big) - f(x)\Big),$$

a tedy je měřitelná. Zvolme $\tau > 1$ a položme

$$E_k = \{x \in M\colon \tau^k \leq f'(x) < \tau^{k+1}\}.$$

Podle Věty 22.1 platí

$$\tau^{-2}\int_{E_k} f(x)\,dx \leq \tau^{k-1}\lambda(E_k) \leq \lambda(f(E_k)) \leq \tau^{k+1}\lambda(E_k) \leq \tau\int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Sečteme-li přes $k \in \mathbb{Z}$, dostaneme

$$\tau^{-2}\int_M f(x)\,dx \leq \lambda(f(M)) \leq \tau\int_M f(x)\,dx$$

a můžeme poslat $\tau \to 1_+$. □

22.2. **Funkce s konečnou variací.**

Definice. Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Definujme veličiny

- $V^+(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+\right\}$ (kladná variace),
- $V^-(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-\right\}$ (záporná variace),
- $V(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|\right\}$ (totální variace),

kde supremum bereme přes všechna dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ tvaru $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Dále zaveďme značení

$$\begin{aligned} V_f^+(x) &= V^+(f;a,x), \\ V_f^-(x) &= V^-(f;a,x), \\ V_f(x) &= V(f;a,x). \end{aligned}$$

Řekneme, že funkce f má na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ **omezenou variaci**, jestliže $V(f;a,b) < \infty$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathrm{BV}([a,b])$.

Poznámka. Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval. Pak třída $\mathrm{BV}([a,b])$ je lineární prostor a algebra.

Poznámky. Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Potom

(a) je-li f neklesající na $[a,b]$, pak $V(f;a,b) = V^+(f;a,b) = f(b) - f(a)$, tedy f má konečnou variaci na $[a,b]$.

(b) $V(f;a,b) \geq |f(a) - f(b)|$;

(c) je-li $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, pak $V(f;a,b) = \sum_{i=1}^n V(f;x_{i-1},x_i)$;

Příklad. Mezi třídami $\mathrm{BV}([a,b])$ a $C([a,b])$ není vztah. Funkce $x \sin \frac{1}{x^2}$ dodefinovaná nulou v nule je spojitá, ale nemá konečnou variaci na $[0,1]$. Charakteristická funkce intervalu $[0,1]$ má konečnou variaci, ale není spojitá na $[-1,1]$.

Příklad. Nechť R je Riemannova funkce na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda

(a) $R \in \mathrm{BV}([0,1])$,

(b) $R^2 \in \mathrm{BV}([0,1])$.

Věta 22.4 (vztah omezené variace a monotonie)**.** *Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

(a) *Má-li f omezenou variaci na $[a,b]$, potom $V_f(x) = V_f^+(x) + V_f^-(x)$ a $f(x) - f(a) = V_f^+(x) - V_f^-(x)$.*

(b) *$f \in \mathrm{BV}(a,b)$ právě tehdy, když existují neklesající funkce u, $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ takové, že $f = v - u$ na $[a,b]$.*

Důkaz. (a) Stačí dokázat pro $x = b$. Uvažujme dělení $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Potom

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \geq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f;a,b).$$

Přechodem k supremu přes všechna dělení dostaneme

$$f(b) - f(a) \geq V^+(f;a,b) - V^-(f;a,b).$$

Ostatní vztahy dostaneme analogicky. □

Věta 22.5 (vlastnosti funkcí s omezenou variací)**.** *Nechť $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. Potom f je omezená, má jen spočetně mnoho bodů nespojitosti, v každém bodě má limitu zleva a zprava a skoro všude má vlastní derivaci.*

22.3. **Absolutně spojité funkce.**

Definice. Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že intervaly $[a_j, b_j]$ tvoří nepřekrývající se systém, jestliže pro $i \neq j$ je $(a_j, b_j) \cap (a_i, b_i) = \emptyset$. Řekneme, že f je **absolutně spojitá** na $[a,b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pro každý nepřekrývající se systém intervalů $\{[a_j, b_j]\}_{j=1}^n$, $[a_j, b_j] \subset [a,b]$, $j = 1, \dots, n$, splňující

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta,$$

platí

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathrm{AC}([a,b])$.

Poznámky. (a) $\mathrm{AC}([a,b])$ je lineární prostor a algebra.

(b) Platí $f \in \mathrm{Lip}([a,b]) \;\Rightarrow\; f \in \mathrm{AC}([a,b]) \;\Rightarrow\; f \in \mathrm{BV}([a,b]) \cap C([a,b])$, žádnou z implikací nelze obrátit.

konec 20. přednášky (30.04.2018)

Lemma 22.6. *Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pro každý nepřekrývající se systém intervalů $\{[a_j, b_j]\}_{j=1}^n$, $[a_j, b_j] \subset [a,b]$, $j = 1, \dots, n$, splňující*

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta,$$

platí

$$\sum_{j=1}^{n} V(f; a_j, b_j) < \varepsilon.$$

Věta 22.7 (variace absolutně spojité funkce)**.** *Nechť f je absolutně spojitá funkce na $[a,b]$. Potom funkce V_f^+, V_f^- a V_f jsou také absolutně spojité.*

Důkaz. Tvrzení bezpostředně plyne z Lemmatu 22.6. □

Věta 22.8 (Luzinova N vlastnost)**.** *Nechť $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ a $N \subset [a,b]$, $\lambda(N) = 0$. Potom*

$$\mathcal{L}(f(N)) = 0.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a najděme $\delta > 0$ jako v definici absolutní spojitosti. Nechť $G \subset (a,b)$ je otevřená, obsahuje $N \cap (a,b)$ a $\lambda(G) < \delta$. Potom existují (konečný nebo spočetný) disjunktní systém otevřených intervalů $\{(a_j, b_j)\}_j$ tak, že $G = \bigcup_j (a_j, b_j)$. Obraz každého intervalu $[a_j, b_j]$ je uzavřený interval $[\alpha_j, \beta_j]$. Najděme $[x_j, y_j] \subset [a_j, b_j]$ tak, že $\{f(x_j), f(y_j)\} = \{\alpha_j, \beta_j\}$. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ je

$$\sum_{j \le m} (y_j - x_j) < \delta$$

takže

$$\sum_{j \le m} (\beta_j - \alpha_j) = \sum_{j \le m} |f(y_j) - f(x_j)| < \varepsilon.$$

Limitním přechodem $m \to \infty$ dostaneme

$$\mathcal{L}(f(N)) \leq \sum_j (\beta_j - \alpha_j) \leq \varepsilon.$$

□

Věta 22.9 (integrál derivace absolutně spojité funkce)**.** *Nechť $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. Potom $f' \in L^1([a,b])$ a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx. \tag{6}$$

Důkaz. Nechť nejprve f je neklesající. Buď N množina všech bodů z $[a,b]$ v nichž f nemá derivaci. Podle Vět 22.3 a 22.8 je

$$f(b) - f(a) = \lambda(f([a,b] \setminus N)) + \lambda(f(N)) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

V obecném případě najdeme podle Věty 22.7 neklesající absolutně spojité funkce u, v tak, že $f = u - v$, potom $f' = u' - v'$ a (6) dostaneme z předchozího případu odečtením. □

Věta 22.10 (neurčitý Lebesgueův integrál)**.** *Nechť $\theta \in L^1([a,b])$ a f je neurčitý Lebesgueův integrál θ, tj. existuje konstanta C tak, že*

$$f(x) = \int_a^x \theta(t)\,dt + C, \qquad x \in [a,b]. \tag{7}$$

Potom f je absolutně spojitá a $f' = \theta$ s.v.

Důkaz. 1. KROK. Ukážeme, že f je absolutně spojitá. V Teorii míry a integrálu se dokazuje, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou měřitelnou množinu M platí

$$\lambda(M) < \delta \implies \int_M |\theta|\,dx < \varepsilon.$$

Mějme takové δ k danému ε a uvažujme konečný systém nepřekrývajících se intervalů $\{[a_j, b_j]\}_{j=1}^n$. Potom

$$\lambda\Big(\bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]\Big) = \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta,$$

tedy

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| \leq \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |\theta(x)|\,dx = \int_{\bigcup_{j=1}^n [a_j,b_j]} |\theta(x)|\,dx < \varepsilon.$$

2. KROK. Víme (s pomocí Věty 22.9), že f je neurčitý Lebesgueův integrál funkcí θ a f'. Potom 0 je neurčitý Lebesgueův integrál funkce $\psi := \theta - f'$. Nechť $\mathcal{A}$ je systém všech množin A, pro které je $\int_A \psi(x)\,dx = 0$. Potom $\mathcal{A}$ zahrnuje intervaly, limitním přechodem zahrneme do $\mathcal{A}$ postupně otevřené množiny a měřitelné množiny. Volbou $A^+ = \{x \colon \psi(x) > 0\}$ a $A^- = \{x \colon \psi(x) < 0\}$ dostaneme $\psi = 0$ s.v. □

Důsledek. *Funkce $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá, právě když je neurčitým Lebesgueovým integrálem Lebesgueův nějaké funkce $\theta \in L^1([a,b])$.*

Věta 22.11 (integrace per partes pro absolutně spojité funkce). *Nechť* $f, g \in \mathrm{AC}([a,b])$*. Potom*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

konec 21. přednášky (30.04.2018)

23. Fourierovy řady

23.1. Základní pojmy.

Značení. Symbolem $\mathcal{P}_{2\pi}$ značíme množinu všech lokálně integrovatelných 2π-periodických funkcí na $\mathbb{R}$.

Definice. Nechť a_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a b_k, $k \in \mathbb{N}$, jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **trigonometrickou řadou**. Je-li navíc $n \in \mathbb{N}$, pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **trigonometrickým polynomem stupně** n.

Definice. Množinu funkcí $\mathcal{T} = \{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ nazýváme **trigonometrickým systémem**.

Poznámka. Trigonometrický systém je ortogonální v následujícím smyslu: pro každé dvě různé funkce $f, g \in \mathcal{T}$ platí

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Dále platí

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot 1\,dx = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} (\cos(kx))^2\,dx = \int_0^{2\pi} (\sin(kx))^2\,dx = \pi, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Věta 23.1 (Fourierovy vzorce). *Nechť* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *a* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti reálných čísel a řada*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

konverguje stejnoměrně k funkci f *na* $\mathbb{R}$*. Potom*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, definované předpisy

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

nazýváme **Fourierovými koeficienty** funkce f. Trigonometrickou řadu

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Fourierovou řadou** funkce f. Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou Sf značíme symbolem $f \sim Sf$. Pro $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ dále definujeme **částečný součet Fourierovy řady** funkce f předpisem

$$S_nf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Poznámky. (a) Konvence „$\frac{a_0}{2}$“ je zavedena proto, abychom měli stejný vzorec pro a_k v případě $k = 0$ i v případech $k \in \mathbb{N}$.

(b) V definici $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$ lze integrovat přes libovolný interval délky 2π, tedy

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

pro jakékoli $\alpha \in \mathbb{R}$. Nejčastěji se používá $\alpha = 0$ nebo $\alpha = -\pi$.

(c) Symbol $f \sim Sf$ označuje pouze fakt, že řada stojící vpravo je Fourierovou řadou funkce stojící vlevo. Nevypovídá nic o případné konvergenci řady Sf (stejnoměrné ani bodové). Nelze jej zaměňovat za symbol $f = Sf$, který by znamenal, že řada vpravo bodově konverguje a jejím bodovým součtem je funkce f.

(d) Fourierovy řady lze definovat pro funkce s libovolnou periodou $\ell > 0$. Řada má pak tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(\frac{2\pi x}{\ell}) + b_k\sin(\frac{2\pi x}{\ell})\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

a vzorce pro koeficienty mají odpovídající tvar.

Poznámka. Je-li $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ sudá, potom $b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, a

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Je-li f lichá, potom $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, a

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **cosinovou řadou** a trigonometrickou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **sinovou řadou**.

Příklad. Nechť $f(x) = x^2$ pro $x \in [-\pi, \pi)$ a nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kx)}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kdybychom věděli, že řada Sf konverguje k funkci f (alespoň bodově), získali bychom po dosazení postupně $x = 0$ a $x = \pi$ vzorce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

konec 22. přednášky (03.05.2018)

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom funkci

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Dirichletovým jádrem**.

Poznámky (vlastnosti D_n)**.** Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom

(a) D_n je sudá spojitá 2π-periodická funkce splňující $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$,

(b) platí

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

(c) platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \pi.$$

Věta 23.2 (o částečných součtech Fourierovy řady)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_n(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+y) + f(x-y)) D_n(y)\,dy.$$

Definice. Jednoduchou funkcí nazýváme každou funkci tvaru

$$s(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

kde $J \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $E_1, \dots, E_J$ jsou měřitelné podmnožiny $\mathbb{R}$ splňující $\lambda(E_j) < \infty$ pro každé $j \in \{1, \dots, J\}$.

Poznámka. Množina všech jednoduchých funkcí je hustá v prostoru L^1.

Věta 23.3 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je omezený interval a nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom*

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx)\,dx = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx)\,dx = 0.$$

Důsledek. *Jsou-li posloupnosti* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *Fourierovými koeficienty nějaké funkce* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$*, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Poznámka. Existují posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

které nejsou Fourierovými koeficienty žádné funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Tato situace nemůže nastat, je-li konvergence k nule dostatečně rychlá, například jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ konverguje. Obecně platí, že čím „hladší" je funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, tím „rychlejší" je konvergence jejích Fourierových koeficientů k nule. Je-li například $f \in \mathcal{P}_{2\pi} \cap C^k(\mathbb{R})$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, potom $a_n = o(n^{-k})$ a $b_n = o(n^{-k})$, $n \to \infty$.

Příklad. Dokažte, že

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

je-li integrál Newtonův.

Věta 23.4 (Riemannova věta o lokalizaci)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$*,* $x \in \mathbb{R}$ *a* $s \in \mathbb{R}$*. Potom* $Sf(x) = s$ *právě tehdy, když existuje* $\delta \in (0, \pi)$ *takové, že*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) D_n(t)\,dt = 0.$$

konec 23. přednášky (10.05.2018)

Poznámka. Z Riemannovy věty o lokalizaci plyne, že konvergence Fourierovy řady funkce f v bodě x závisí pouze na hodnotách funkce f na libovolně malém prstencovém okolí bodu x.

Věta 23.5 (Diniovo kritérium)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$*,* $x \in \mathbb{R}$ *a* $s \in \mathbb{R}$*. Nechť existuje* $\delta > 0$ *takové, že Lebesgueův integrál*

$$\int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{t}\,dt \qquad \text{konverguje.}$$

Potom $Sf(x) = s$.

Značení. Nechť $x \in \mathbb{R}$ a f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu x. Značíme $f(x+) = \lim_{t\to x_+} f(t)$ a $f(x-) = \lim_{t\to x_-} f(t)$, pokud tyto limity existují.

Věta 23.6 (důsledky Diniova kritéria)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *a nechť* $x \in \mathbb{R}$.

(a) *Nechť existují vlastní limity* $f(x+)$ *a* $f(x-)$ *a nechť dále existují vlastní limity*

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \qquad \text{a} \qquad \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}.$$

Potom řada Sf *konverguje v bodě* x *a platí*

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, má-li funkce f *konečné jednostranné derivace v bodě* x*, potom* $Sf(x) = f(x)$.

(b) *Jestliže existují* $\delta > 0$*,* $\alpha > 0$ *a* $K > 0$ *takové, že pro každé* $t \in (x - \delta, x + \delta)$ *platí*

$$|f(x+t) - f(x)| \le K|t|^{\delta},$$

pak $Sf(x) = f(x)$.

Věta 23.7 (Jordanovo–Dirichletovo kritérium). *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$*,* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a nechť* $f \in \mathrm{BV}([a, b])$*. Potom*

(a) *pro každé* $x \in (a, b)$ *konverguje Fourierova řada* $Sf(x)$ *a platí*

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2};$$

(b) *je-li funkce* f *navíc spojitá na* $[a, b]$*, potom*

$$S_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } (a, b).$$

Poznámka. Je-li funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ po částech monotónní na (a, b) nebo po částech třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b), pak pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

23.2. **Fejérova věta.**

Definice. Sčítací metodou (případně **limitovací metodou**) A nazýváme nekonečnou dolní trojúhelníkovou matici $A = (c_{n,k})$, kde $c_{n,k} \in \mathbb{R}$, $c_{n,k} = 0$ pro $k > n$. Sčítací metodu chápeme jako předpis, který dané posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ přiřazuje posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou předpisem

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} a_k, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Jestliže $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost, pak definujeme A-součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ předpisem $(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} s_k$.

Příklad. Cesàrovou sčítací metodou nazveme sčítací metodu danou maticí $A = (c_{n,k})$, kde $c_{n,k} = \frac{1}{n+1}$ pro $k \le n$ a $c_{n,k} = 0$ pro $k > n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Poznámka. Cesàrova sčítací metoda je **regulární** v následujícím smyslu: jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, pak $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Opačná implikace neplatí, protože například pro $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergentní, ale $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Toeplitzova věta. Nechť A je sčítací metoda daná maticí $A = (c_{n,k})$. Nechť jsou splněny následující tři podmínky.

(a) pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$,

(b) platí $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = 1$,

(c) existuje $C > 0$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\sum_{k=0}^{n} |c_{n,k}| \le C$.

Potom je sčítací metoda A regulární.

Poznámka. Metoda Fejérových součtů je aplikací Cesàrovy sčítací metody na posloupnost částečných součtů Fourierovy řady dané funkce.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom funkci

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Fejérovým jádrem**.

Poznámky. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom

(a) K_n je sudá spojitá 2π-periodická funkce, splňující $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$,

(b) platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx = \pi,$$

(c) platí

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Poznámka. Fejérovo jádro má některé „lepší“ vlastnosti než Dirichletovo jádro. Například je nezáporné a navíc splňuje $K_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(0, 2\pi)$. To neplatí pro Dirichletovo jádro, neboť například $D_n(\pi) = \frac{(-1)^n}{2}$.

konec 24. přednášky (14.05.2018)

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme n-tým **částečným Fejérovým součtem** funkce f.

Poznámka. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) K_n(t)\, dt.$$

Věta 23.8 (Fejérova)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$.*

(a) *Jestliže pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

(b) *Je-li funkce f spojitá na nějakém intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, potom*

$$\sigma_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } (a, b).$$

Poznámka. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$. Fejérova věta ukazuje, že jediným možným kandidátem na $Sf(x)$ je hodnota $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ (tedy $f(x)$, je-li f spojitá v x).

Příklad. Nechť $f(x) = x^2$ pro $x \in [-\pi, \pi)$ a nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $Sf(x) = f(x)$. Tudíž

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Věta 23.9 (Weierstrassova - trigonometrická verze)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje trigonometrický polynom $T \in \mathcal{T}$ splňující*

$$\|f - T\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Věta 23.10 (Fourierovy koeficienty určují funkci)**.** *Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom $f = g$ skoro všude.*

Poznámka. Obecně připouštíme komplexní funkce reálné proměnné. Protože pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí vzorce

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{a} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

je možné přepsat trigonometrický polynom

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve tvaru

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}).$$

K dané komplexní funkci $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ pak dostaneme komplexní Fourierovu řadu

$$Sf(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}),$$

kde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx.$$

konec 25. přednášky (17.05.2018)

Důkaz Picardovy věty

Lemma (o ekvivalenci obyčejné diferenciální rovnice a integrální rovnice)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce, $I \subset \mathbb{R}$ je neprázdný otevřený interval, $x_0 \in I$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$, $[x_0, y^0] \in G$ a $y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Potom y je na I řešením soustavy

$$y' = f(x, y)$$

splňující podmínku $y(x_0) = y^0$ právě tehdy, když platí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \, dt \quad \text{pro každé } x \in I.$$

konec 26. přednášky (21.05.2018)