PÍSEMNÁ ČÁST ZKOUŠKY Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 4, LETNÍ SEMESTR 2013–2014, TEST C

LUBOŠ PICK

Příklad C1. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x - 4y + z \\ z' &= -3x - y - 2z. \end{aligned}$$

(10 bodů)

Příklad C2. Vypočtěte křivkový integrál prvního druhu

$$\int_c x(z-y)\,\mathrm{d}c,$$

kde c je jednoduchá křivka, jejímž obrazem je množina $C = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ y^2+z^2=9,\ x=\frac{y+z}{3},\ |z| \le y\right\}$. **(15 bodů)**

Příklad C3. Vypočtěte plošný integrál druhého druhu

$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S},$$

kde funkce $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dána předpisem

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz, -yz, y^2x)$$

a M je plocha v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=z^2,\ \frac{1}{4} < x^2+y^2 < 1,\ z < 0\right\},$$

která je orientovaná směrem dolů (vzhledem k ose z).

Přesněji, nalezněte otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^2$ a prosté zobrazení $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^3$ třídy $\mathcal{C}^1(G)$ takové, aby $\mathcal{H}^2(M \setminus \Phi(G)) = 0$ a orientace souhlasila se zadáním výše, a spočtěte integrál

$$\int_\Phi \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\Phi.$$

To, že G a Φ mají požadované vlastnosti, *nemusíte* dokazovat. **(15 bodů)**

Příklad C4. Nalezněte $2\pi-$periodickou funkci f, která je na intervalu $(0,\pi]$ dána předpisem

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad x \in (0,\pi],$$

a má sinovou Fourierovu řadu. Tuto Fourierovu řadu spočtěte a pro každé $x \in \mathbb{R}$ nalezněte její součet. Dále určete maximální otevřené intervaly, na kterých tato řada konverguje lokálně stejnoměrně. Svá tvrzení zdůvodněte. **(10 bodů)**