PÍSEMNÁ ČÁST ZKOUŠKY Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 4, LETNÍ SEMESTR 2017–2018, TEST B

LUBOŠ PICK

Příklad B1. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2z + 3x + 2y \\ y' &= -3y \\ z' &= -6x - 2y - 5z, \end{aligned}$$

splňující podmínky $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = -1$. **(10 bodů)**

Příklad B2. Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu

$$\int_c \mathbf{F} \cdot dc,$$

kde c je jednoduchá křivka, jejíž obraz je množina C v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$C = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x - x^2 = z^2,\ y = 2z + 1,\ x \geq z \geq 0 \right\},$$

která je orientovaná tak, že v bodě $[\frac{3}{4}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$ je druhá složka tečného vektoru záporná. Zobrazení $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definované předpisem

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1, -z^2, 0).$$

Přesněji, nalezněte uzavřený interval $[a, b]$ a jednoduchou skoro regulární křivku $c \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ takovou, aby $c([a, b]) = C$ a druhá složka vektoru $c'(t_0)$ byla záporná, kde $t_0 \in [a, b]$ je takové, že $c(t_0) = [\frac{3}{4}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$, a spočtěte uvedený integrál. To, že má c požadované vlastnosti, nemusíte dokazovat. **(15 bodů)**

Příklad B3. Vypočtěte plošný integrál prvního druhu

$$\int_M f \, dS,$$

kde M je plocha v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$M = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ y^2 + z^2 \leq 2,\ y^2 + z^2 = 2 - x, \right\}$$

a $f \colon M \to \mathbb{R}$ je funkce daná předpisem

$$f(x, y, z) = \sqrt{x + y^2 + z^2}.$$

Přesněji, nalezněte otevřenou množinu $G \subseteq \mathbb{R}^2$ a prosté zobrazení $\Phi \colon G \to \mathbb{R}^3$ třídy $\mathcal{C}^1(G)$ takové, aby $\mathcal{H}^2(M \setminus \Phi(G)) = 0$, a spočtěte integrál

$$\int_\Phi f \, dS.$$

To, že G a Φ mají požadované vlastnosti, nemusíte dokazovat. **(15 bodů)**

Příklad B4. Nalezněte $2\pi-$periodickou funkci f, která je na intervalu $[-\pi, 0)$ dána předpisem

$$f(x) = -x - \pi.$$

a má sinovou Fourierovu řadu. Tuto Fourierovu řadu spočtěte a pro každé $x \in \mathbb{R}$ nalezněte její součet. Dále určete maximální otevřené intervaly, na kterých tato řada konverguje lokálně stejnoměrně. Svá tvrzení zdůvodněte. **(10 bodů)**