MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, LETNÍ SEMESTR 2017–2018
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA A

LUBOŠ PICK

Příklad A1. Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x' = y - x,$$
$$y' = y - 2x + \frac{3}{\cos t}.$$

(10 bodů)

Příklad A2. Vypočtěte křivkový integrál prvního druhu

$$\int_c g\,ds,$$

kde c je jednoduchá křivka, jejíž obraz je množina C v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$C = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + z^2 = 1,\ y = z - x,\ 0 \le x \le z\right\},$$

a $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná předpisem

$$g(x, y, z) = y(z + x).$$

Přesněji, nalezněte uzavřený interval $[a, b]$ a jednoduchou skoro regulární křivku $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ tak, aby $c([a, b]) = C$ a spočtěte uvedený integrál. To, že má c požadované vlastnosti, nemusíte dokazovat. **(15 bodů)**

Příklad A3. Vypočtěte plošný integrál druhého druhu

$$\int_M f \cdot dS,$$

kde M je orientovaná plocha v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = z,\ x^2 + y^2 \le 1\right\},$$

která je orientovaná směrem vzhůru, a $f\colon M \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení definované předpisem

$$f(x, y, z) = (z, 0, x^2 + y^2).$$

Přesněji, nalezněte otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^2$ a prosté zobrazení $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^3$ třídy $\mathcal{C}^1$ tak, aby $\mathcal{H}^2(M \setminus \Phi(G)) = 0$ a orientace souhlasila se zadáním výše, a spočtěte integrál

$$\int_\Phi f \cdot d\Phi.$$

To, že G a Φ mají požadované vlastnosti, nemusíte dokazovat. **(15 bodů)**

Příklad A4. Pro 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $[-\pi, \pi)$ definovaná předpisem

$$f(x) = \sin(\tfrac{x}{4}) - 2,$$

nalezněte Fourierovu řadu. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ nalezněte součet této řady a rozhodněte, zda tato řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Svá tvrzení zdůvodněte. **(10 bodů)**