MATEMATICKÁ ANALÝZA 4 - LETNÍ SEMESTR 2017–2018
POČETNÍ PŘÍKLADY

LUBOŠ PICK

Obsah

1. Obyčejné diferenciální rovnice	1
2. Metrické prostory	3
3. Křivkový a plošný integrál	5
3.1. Křivkový integrál 1. druhu	5
Výsledky	6
3.2. Křivkový integrál 2. druhu	6
Výsledky	7
3.3. Greenova věta	8
Výsledky	8
3.4. Plošný integrál 1. druhu	9
Výsledky	9
3.5. Plošný integrál 2. druhu	10
Výsledky	11
4. Funkce s omezenou variací a absolutně spojité funkce	14
5. Fourierovy řady	15

1. Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad 1.1. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte fundamentální systém řešení a uhodněte alespoň jedno partikulární řešení.

$$y'' - 5y' + 4y = e^{3x};$$
$$y''' - y'' + y' - y = \sin x;$$
$$y'' - y = e^x \left(x^2 + 1\right).$$

Návod: Partikulární řešení hledejte po řadě ve tvaru $y = ae^{3x}$, $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ a $y = ae^x x^2 + be^x x + ce^x$, dosaďte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c.

Příklad 1.2. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte reálný fundamentální systém řešení a uhodněte partikulární řešení.

$$y'' + 4y = \cos(nx); \quad y''' - y = x^3 - 1.$$

Návod: Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y = a\sin(nx) + b\cos(nx)$, respektive ve tvaru $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dosaďte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c, d.

Příklad 1.3. Zrekonstruujte nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, jestliže víte, že její fundamentální systém řešení je

$$[e^x, xe^x]; \quad \left[x, x^2\right].$$

Příklad 1.4. Metodou snižování řádu vyřešte rovnici

$$y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = y''(0) = 1.$$

Návod: Položte $z = y'$.

Příklad 1.5. Nalezněte reálný fundamentální systém řešení následujících lineárních homogenních diferenciálních rovnic:

$$y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0;$$
$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0;$$
$$y'' + 4y' + 13y = 0;$$
$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Příklad 1.6. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} - 3y'' + 2y = x^3 + \sin x.$$

Příklad 1.7. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = x \sin x.$$

Příklad 1.8. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x} + 5 \sin x.$$

Příklad 1.9. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = \sin(e^{-x}).$$

Příklad 1.10. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Příklad 1.11. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = \sin x.$$

Příklad 1.12. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 2x - y - 2z \\ z' &= 2z - x + y. \end{aligned}$$

Příklad 1.13. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y - z \\ y' &= 3x - 4y - 3z \\ z' &= 2x - 4y. \end{aligned}$$

Příklad 1.14. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2z - y \\ y' &= x + 2z \\ z' &= y - x - z. \end{aligned}$$

Příklad 1.15. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - z \\ y' &= y - x + z \\ z' &= x - y. \end{aligned}$$

Příklad 1.16. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 5y - 2z \\ y' &= -2x - 2y + z \\ z' &= -x - y + z. \end{aligned}$$

Příklad 1.17. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= 2z - y. \end{aligned}$$

Příklad 1.18. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 2y + 4z \\ z' &= x - z. \end{aligned}$$

Příklad 1.19. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 2y + z + e^t \\ y' &= -x + 2y - z \\ z' &= -2x + 3y - z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Příklad 1.20. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= -x + 3z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Příklad 1.21. Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + e^t \\ y' &= 2x + y + e^t, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Příklad 1.22. Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - z \\ y' &= 2x + y - 2z \\ z' &= 2x + y - 2z. \end{aligned}$$

(i) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

(ii) Určete množinu všech $[x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{R}^3$, pro která je maximální řešení uvedené soustavy (x, y, z) vyhovující podmínce $y(0) = [x_0, y_0, z_0]$ konstantní.

2. Metrické prostory

Příklad 2.1. Uvažujme prostor spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ s následující metrikou

$$\varrho_{\text{int}}(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ukažte, že tento metrický prostor je první kategorie a není úplný a že jeho jednotková koule je řídká.

Příklad 2.2. Nalezněte metrický prostor (P, ϱ) a posloupnost neprázdných uzavřených množin $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ takovou, že $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$.

Příklad 2.3. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ukažte, že množina

$$\{f \in \mathcal{C}([a, b]) \colon \exists x \in (a, b) \colon f'(x) \in \mathbb{R}\}$$

je 1. kategorie v prostoru $\mathcal{C}([a, b])$.

Příklad 2.4. Ukažte, že prostor ℓ_2 je separabilní a jeho jednotková koule není totálně omezená.

Příklad 2.5. Ukažte, že metrický prostor (P, ϱ) je totálně omezený právě tehdy, když z každé posloupnosti prvků P lze vybrat cauchyovskou podposloupnost.

Příklad 2.6. Je sjednocení dvou souvislých množin souvislá množina?

Příklad 2.7. Je průnik dvou souvislých množin souvislá množina?

Příklad 2.8. Je vzor souvislé množiny při spojitém zobrazení souvislá množina?

Příklad 2.9. Je množina $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ souvislá?

Příklad 2.10. Nechť P je souvislý metrický prostor, který obsahuje více než jeden bod. Dokažte, že P je nespočetný.

Příklad 2.11. Ukažte, že každý normovaný lineární prostor je souvislý.

Příklad 2.12. Nechť $P = \mathbb{R}$ a

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{je-li } x \neq 0, y = 0; \\ \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x = 0, y \neq 0; \\ 0 & \text{je-li } x = y; \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x \neq 0, y \neq 0, x \neq y. \end{cases}$$

Určete, zda
(i) (P, ϱ) je metrický prostor;
(ii) (P, ϱ) je úplný;
(iii) (P, ϱ) je kompaktní.
Určete diam P. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru (P, ϱ).

Příklad 2.13. Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Určete, zda
(i) (P, ϱ) je metrický prostor;
(ii) (P, ϱ) je úplný;
(iii) (P, ϱ) je kompaktní.
Určete diam P. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru (P, ϱ). Jsou jednobodové množiny otevřené?

Příklad 2.14. Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n + 1.$$

Zobrazení T zřejmě nemá pevný bod. Lze odtud usoudit, že T není kontrakce na P? Jestliže ne, dokažte to nějak jinak.

Příklad 2.15. Nechť $P = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $\varrho(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n^2.$$

Zobrazení T zřejmě nemá pevný bod. Dokažte, že přesto je T kontrakce na P. Jak je to možné?

Příklad 2.16. V prostoru $C([0, 1])$ se supremovou metrikou definujeme pro dvě dané funkce $g, h \in C([0, 1])$ *úsečku*:

$$f : [0, 1] \to C([0, 1]), \qquad f(a) = g + a(h - g).$$

Dokažte, že: (a) úsečka je křivka;
(b) f je stejnoměrně spojitá na $[0, 1]$;
(c) $C([0, 1])$ je křivkově souvislý prostor.
Všimněte se, že stačí dokázat jen jedno z tvrzení (i)–(iii). Které?

Příklad 2.17. Zkoumejte, jaké vlastnosti musíme vyžadovat od metrického prostoru, aby v něm bylo možno nějakým rozumným způsobem zadefinovat úsečku a aby platila analogie tvrzení z předcházejícího příkladu. Pro jakou třídu metrických prostorů takto automaticky zajistíme křivkovou souvislost?

Příklad 2.18. Ukažte na příkladu, že uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislá množina.
Návod: Graf funkce $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (0, 1)$.

Příklad 2.19. Ukažte příklad množin A, B takových, že $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$, A je křivkově souvislá množina, B není křivkově souvislá množina.
Návod: V $\mathbb{R}^2$ vezměte všechny úsečky délky 1 vycházející z počátku a mající směrnice $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. To je množina A. Množinu B vytvořte tak, že k A přidáte ještě úsečku $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \in [\frac{1}{2}, 1], y = 0\}$. Je A křivkově souvislá? Co je $\overline{A}$? Platí $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$? Je B křivkově souvislá?

3. Křivkový a plošný integrál

3.1. **Křivkový integrál 1. druhu.**

Příklad 3.1. Spočtěte délku oblouku

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3\}$$

mezi body $[0, 0, 0]$ a $[3, 3, 2]$.

Příklad 3.2. Spočtěte délku křivky

$$C = \left\{[r, \varphi] \in \mathbb{R}^2;\ r = a \sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right),\ \varphi \in [0, 3\pi]\right\}$$

kde $a > 0$.

Příklad 3.3. Spočtěte délku prostorové křivky C, zadané rovnicemi

$$y = a \arcsin \frac{x}{a}, \quad z = \frac{a}{4} \log \frac{a - x}{a + x}$$

od bodu $[0, 0, 0]$ do bodu $[x_0, y_0, z_0]$, kde $a > 0$.

Příklad 3.4. Určete, která křivka má větší délku, zda kružnice o poloměru a nebo elipsa s poloosami $\frac{a}{2}$, $2a$, kde $a > 0$.

Příklad 3.5. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds,$$

kde C je kružnice se středem v bodě $[\frac{1}{2}, 0]$ o poloměru $\frac{1}{2}$.

Příklad 3.6. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, ds,$$

kde C je konvexní uzavřená křivka složená ze tří oblouků, zadaných v polárních souřadnicích pomocí následujících parametrizací:

$$\begin{aligned} &\varphi = 0,\ r \in [0, a];\\ &r = a,\ \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{4}];\\ &\varphi = \frac{\pi}{4},\ r \in [0, a], \end{aligned}$$

kde $a > 0$.

Příklad 3.7. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_C \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, ds,$$

kde C je oblouk šroubovice, zadaný parametricky

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Příklad 3.8. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)\, ds,$$

kde C je obvod astroidy,

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}},$$

kde $a > 0$.

Příklad 3.9. Těžiště drátu tvaru rovinné křivky C, jehož lineární hustota je dána $f(x, y)$, má souřadnice $T = [x_0, y_0]$, kde

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_C x f(x, y)\, ds, \qquad y_0 = \frac{1}{M} \int_C y f(x, y)\, ds,$$

přičemž $M = \int_C f(x, y)\, ds$ je hmotnost drátu.

Určete souřadnice těžiště oblouku homogenní cykloidy, zadané parametricky

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \qquad t \in [0, \pi],$$

kde $a > 0$.

Příklad 3.10. Dokažte, že je-li křivka zadána v polárních souřadnicích v $\mathbb{R}^2$ tak, že $r = r(\varphi)$ (kde jako obvykle $x = r\cos t$, $y = r\sin t$), pak platí vztah

$$ds = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi. \tag{1}$$

Příklad 3.11. S pomocí (1) spočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C |y|\, ds,$$

kde C je Bernoulliova lemniskáta, zadaná rovnicí

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right),$$

kde $a > 0$.

Příklad 3.12. S pomocí (1) spočtěte délku kardioidy (srdcovky), zadané rovnicí

$$x^2 + y^2 = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2.$$

Výsledky. Cvičení 3.1:

$$5$$

Cvičení 3.2:

$$\frac{3}{2}\pi a$$

Cvičení 3.3:

$$|x_0| + |z_0|$$

Cvičení 3.4:

elipsa

Cvičení 3.5:

$$2$$

Cvičení 3.6:

$$\frac{\pi e^a}{4a} + \sqrt{2}(e^a - 1)$$

Cvičení 3.7:

$$\sqrt{a^2 + b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{(2\pi)^3}{3} b^2\right)$$

Cvičení 3.8:

$$4a^{\frac{7}{3}}$$

Cvičení 3.9:

$$T = \left[\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3}\right]$$

Cvičení 3.11:

$$2a^2(2 - \sqrt{2})$$

Cvičení 3.11:

$$8$$

3.2. **Křivkový integrál 2. druhu.**

Příklad 3.13. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy,$$

kde C je část oblouku paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $[-1, 1]$ a koncovým bodem $[1, 1]$.

Příklad 3.14. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} \frac{(x + y)\, dx - (x - y)\, dy}{(x^2 + y^2)},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o poloměru a se středem v počátku.

Příklad 3.15. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} (2a - y, x)\, d\vec{s},$$

kde C je cykloida, zadaná parametricky

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

jejíž orientace je dána touto paramaterizací, a kde $a > 0$.

Příklad 3.16. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} \frac{-y^2\, dx + x^2\, dy}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}},$$

kde C je část oblouku asteroidy, zadané rovnicí

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

kde $a > 0$, z bodu $[0, a]$ do bodu $[a, 0]$.

Příklad 3.17. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz,$$

kde C je jeden závit šroubovice, zadané parametricky

$$\varphi(t) = \left(a \cos t, a \sin t, \frac{b}{2\pi} t\right), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

jejíž orientace je dána touto paramaterizací, a kde $a, b > 0$.

Příklad 3.18. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} y\, dx + z\, dy + x\, dz,$$

kde C je průsečnice ploch, zadaných rovnicemi

$$z = xy, \qquad x^2 + y^2 = 1,$$

jejíž orientace je dána kladnou orientací průmětu této křivky do roviny xy.

Příklad 3.19. Vypočtěte práci silového pole $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ po obvodu křivky

$$\{[t^2, 2t, 4t^3],\ t \in [0, 1]\},$$

jejíž orientace je dána touto paramaterizací.

Příklad 3.20. Vypočtěte práci silového pole, které působí v každém bodě $[x, y, z]$, $[x, y] \neq [0, 0]$ (mimo osu z) silou nepřímo úměrnou druhé mocnině vzdálenosti od osy z a míří kolmo k ose z. jaká práce se vykoná při pohybu hmotného bodu po čtvrtkružnici

$$C = \{[\cos t, 1, \sin t],\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}?$$

Příklad 3.21. Kapalina proudí rychlostí $\vec{V}(x, y) = (x, 2y)$. Určete množství kapaliny, která proteče za jednotku času elipsou, zadanou rovnicí

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Výsledky. Cvičení 3.13:

$$-\frac{14}{15}$$

Cvičení 3.14:

$$-2\pi$$

Cvičení 3.15:

$$-2\pi a^2$$

Cvičení 3.16:

$$\frac{3}{16}\pi a^{\frac{4}{3}}$$

Cvičení 3.17:

$$0$$

Cvičení 3.18:

$$-\pi$$

Cvičení 3.19:

$$\frac{5}{2}$$

Cvičení 3.20:

$$k\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

kde k je konstanta úměrnosti.

Cvičení 3.21:

$$18\pi$$

3.3. **Greenova věta.**

Příklad 3.22. Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{(C)} (-y^3 + \log x)\, dx + (x^3 + y^2)\, dy,$$

kde (C) je kladně orientovaná hranice oblasti

$$G = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 16, \quad 0 \le x \le y \le \sqrt{3}x\right\}.$$

Příklad 3.23. Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{(C)} xy^2\, dy - x^2 y\, dx,$$

kde (C) je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.

Příklad 3.24. Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{(C)} (x+y)\, dx - (x-y)\, dy,$$

kde (C) je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

Příklad 3.25. Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$I = \int_{(C)} e^x((1-\cos y)\, dx - (y - \sin y)\, dy),$$

kde (C) je kladně orientovaná hranice oblasti

$$G = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \sin x\right\}.$$

Výsledky. Cvičení 3.22:

$$\frac{63\pi}{12}$$

Cvičení 3.23:

$$\frac{\pi a^4}{2}$$

Cvičení 3.24:

$$-2\pi ab$$

Cvičení 3.25:

$$-\frac{1}{5}\left(e^{\pi} - 1\right)$$

3.4. **Plošný integrál 1. druhu.**

Příklad 3.26. Spočtěte obsah sféry

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}, \quad r > 0.$$

Příklad 3.27. Spočtěte obsah rovinné plochy

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ z = ax + by, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad a, b > 0.$$

Příklad 3.28. Spočtěte obsah části povrchu rotačního hyperboloidu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Příklad 3.29. Spočtěte obsah stěny nádoby tvaru rotačního paraboloidu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right), \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Příklad 3.30. Spočtěte obsah povrchu anuloidu, jehož průřez má poloměr R_2, přičemž vzdálenost středu průřezové kružnice od jeho osy je R_1, $R_1 > R_2$.

Příklad 3.31. Spočtěte plošný integrál 1. druhu

$$\iint\limits_M z\, dS,$$

kde M je helikoid, zadaný parametrizací

$$M = \{[t \cos s, t \sin s, s] \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, a], s \in [0, 2\pi]\}.$$

Příklad 3.32. Těžiště plochy M je dáno vzorcem

$$T = [x_t, y_t, z_t] = \frac{1}{\iint\limits_M dS} \left(\iint\limits_M x\, dS, \iint\limits_M y\, dS, \iint\limits_M z\, dS \right).$$

Vypočítejte těžiště homogenního rotačního paraboloidu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 2z, \quad 0 \leq z \leq 2\}.$$

Příklad 3.33. Podle Pascalova zákona je hydrostatická síla působící v daném bodě povrchu tělesa dána výrazem

$$F_i = \varrho g \iint\limits_M h n_i\, dS, \quad i = 1, 2, 3,$$

kde n je hloubka v daném bodě, n_i je i-tá složka vnější jednotkové normály plochy M.

Dokažte, že (v souladu s Archimédovým zákonem), hydrostatická síla, která působí na stěny nádoby tvaru rotačního paraboloidu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = z, \quad 0 \leq z \leq 1\},$$

je rovna

$$\vec{F}(0, 0, -\frac{\pi \varrho g}{2}).$$

Výsledky. Cvičení 3.26:

$$4\pi r^2$$

Cvičení 3.27:

$$\pi\sqrt{1 + a^2 + b^2}$$

Cvičení 3.28:

$$\frac{3}{2}\pi\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

Cvičení 3.29:

$$\frac{3}{2}\pi\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

Cvičení 3.30:

$$4\pi R_1 R_2$$

Cvičení 3.31:

$$\pi^2\left(a\sqrt{1 + a^2} + \log\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right)\right)$$

Cvičení 3.33:

$$T = \left[0, 0, \frac{50\sqrt{5} + 2}{50\sqrt{5} - 10}\right]$$

3.5. **Plošný integrál 2. druhu.**

Příklad 3.34. Spočtěte integrál

$$\int_{(M)} z\,dx\,dy,$$

kde (M) je kladně orientovaná plocha sféry

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=1\}.$$

Příklad 3.35. Spočtěte integrál

$$\int_{(M)} (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy,$$

kde (M) je kuželová plocha

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2z^2, \quad z \in [0,h]\}.$$

s vnější orientací.

Příklad 3.36. Spočtěte integrál

$$\int_{(M)} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy,$$

kde (M) je vnější povrch sféry

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \quad a,b,c,R>0\}.$$

Příklad 3.37. Spočtěte integrál

$$\int_{(M)} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

kde (M) je vnější povrch sféry

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=a^2, \quad a>0\}.$$

Příklad 3.38. Spočtěte integrál

$$\int_{(M)} \frac{dy\,dz}{x} + \frac{dz\,dx}{y} + \frac{dx\,dy}{z},$$

kde (M) je vnější povrch elipsoidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0\}.$$

Příklad 3.39. Spočtěte integrál

$$\int_{(M)} xz\,dy\,dz + xy\,dz\,dx + yz\,dx\,dy,$$

kde (M) je vnitřně orientovaný povrch jehlanu ohraničeného rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$ a $x+y+z=1$.

Příklad 3.40. Spočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ ven z válce

$$P = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 \le a^2, \quad z \in [-h,h]\}, \quad a,h>0.$$

Příklad 3.41. Spočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z)=(z,0,x^2)$ nahoru parabolickou střechou

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=z, \quad x,y \in [-1,1]\}.$$

Příklad 3.42. Spočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z)=(yz,-xz,x^2+y^2)$ nahoru plochou zadanou parametricky

$$\Phi(r,t) = (e^r\cos t, e^r\sin t, r)\,.$$

Výsledky. Cvičení 3.34:

$$\frac{4}{3}\pi$$

Cvičení 3.35:

$$0$$

Cvičení 3.36:

$$\frac{8\pi a R^3}{3}$$

Cvičení 3.37:

$$\frac{4\pi R^3}{3}$$

Cvičení 3.38:

$$4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)$$

Cvičení 3.39:

$$-\frac{1}{8}$$

Cvičení 3.40:

$$6\pi h a^2$$

Cvičení 3.41:

$$\frac{4}{3}$$

Cvičení 3.42:

$$\frac{\pi(e^4-1)}{3}$$

Příklad 3.43. Spočítejte křivkový integrál 2. druhu

$$J=\int_{(C)} y\,dx+z\,dy+x\,dz,$$

kde C je obvod elipsy, která vznikne průnikem válce $\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\le y\}$ a roviny $\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ 3x+2z=1\}$, orientované tak, aby její průmět do souřadné roviny xy byl orientován kladně.

Příklad 3.44. Vypočtěte obsah plochy

$$M=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ z=y+3x,\ x^2+y^2\le 1\right\}.$$

Příklad 3.45. Vypočtěte plošný integrál 1. druhu

$$\iint_M \left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\,dS,$$

kde M je část plochy $x^2+y^2=z^2$ ležící ve válci $x^2+y^2=y$.

Příklad 3.46. Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_C (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz,$$

kde C je křivka, která omezuje plochu $\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ x+2y+3z=6,\ x>0,\ y>0,\ z>0\right\}$, a která je orientována tak, že při pohybu po křivce zůstává vnější strana plochy nalevo.

Příklad 3.47. Vypočtěte plošný integrál 1. druhu

$$\iint_M e^x\,dS,$$

kde M je plocha v $\mathbb{R}^3$ daná parametrizací

$$M=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ x=-s,\ y=t\cos s,\ z=-t\sin s,\ s\in[-3\pi,0],\ t\in[0,a]\right\}.$$

Příklad 3.48. Vypočtěte plošný integrál 2. druhu

$$\iint_M yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx+xy\,dx\,dy,$$

kde $M=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2\le 1,\ z=1-(x^2+y^2),\ x>\frac{1}{2},\ y>0\right\}$, orientovaná tak, aby třetí složka normály byla nezáporná.

Příklad 3.49. Nechť $a > 0$. Vypočtěte plošný integrál 1. druhu

$$\iint_M (x^2 + y^2)\, dS,$$

kde M je plocha

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + z^2 = 2az,\ z^2 \geq x^2 + y^2\right\}.$$

Příklad 3.50. Nechť $a, b > 0$, $b > 2a$. Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_C -y\, dx + x\, dy - xz\, dz,$$

kde $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2,\ x^2 + y^2 = 2ay,\ z > 0\right\}$, orientovaná tak, aby v bodě $[-a, a, \sqrt{b^2 - 2a^2}]$ byla třetí složka tečného vektoru nezáporná.

Příklad 3.51. Nechť $a > 0$. Vypočtěte plošný integrál 1. druhu

$$\iint_M (x + y + z)\, dS,$$

kde M je plocha

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4},\ z \geq 0\right\}.$$

Příklad 3.52. Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_C y\, dz,$$

kde C je křivka, která vznikne průnikem ploch $\left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = z^2\right\}$ a $\left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ z = \frac{3}{5}x + 1\right\}$, orientovaná tak, aby v bodě $[0, 1, 1]$ byla třetí složka tečného vektoru záporná.

Příklad 3.53. Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu

$$\int_C \left(x^2 - y^2\right)\, ds$$

kde

$$C = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ 0 < y < x,\ z = x + y,\ x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Příklad 3.54. Vypočtěte plošný integrál 2. druhu

$$\iint_M \vec{F}\, d\vec{S},$$

kde $\vec{F} = [xyz, -1, 2]$ a $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, orientovaná směrem vzhůru.

Příklad 3.55. Nechť $a > 0$. Vypočtěte plošný integrál 1. druhu

$$\iint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z}\, dS$$

kde

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4},\ z = a^2 - x^2 - y^2,\right\}.$$

Příklad 3.56. Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s},$$

kde $\vec{F} = [e^x(1 - \cos y), -e^x(y - \sin y)]$ a C je záporně orientovaná hranice oblasti $\left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x \in (0, \pi),\ y \in (0, \sin x)\right\}$.

Příklad 3.57. Nechť $b \in \mathbb{R}$. Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu

$$\int_C z(x + y)\, ds$$

kde

$$C = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ y > |x|,\ z = \frac{x - y}{2},\ x^2 + y^2 = 4\right\}.$$

Příklad 3.58. Vypočtěte plošný integrál 2. druhu

$$\iint_M \vec{F}\, d\vec{S},$$

kde $\vec{F} = \left[xz, y, x^2 - z^2\right]$ a $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + z^2 = y^2,\ \frac{1}{2} \le x^2 + z^2 \le 1\right\}$, orientovaná v kladném smyslu osy y.

Příklad 3.59. Nechť $R > 2$. Vypočtěte povrch "formy na bábovku"

$$\left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ z = 4 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2,\ R - 2 < x^2 + y^2 < R + 2\right\}.$$

Příklad 3.60. Vypočtěte tok vektorového pole $F(x, y, z) = (0, 0, x^2 + y^2)$ směrem vzhůru plochou, která je horní polovinou průniku dvou elipsoidů:

$$\left\{[x, y, z] \in R^3 :\ \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\right\},\quad \left\{[x, y, z] \in R^3 :\ x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1,\ z > 0\right\}.$$

Příklad 3.61. Vypočtěte práci vektorového pole $F(x, y) = (y, 0)$ po křivce, kterou opíše vrchol $A[0, 0]$ čtverce $[0, 1]^2$ mezi body $[0, 0]$ a $[4, 0]$, pokud se čtverec kutálí po ose x tím způsobem, že se otáčí kolem vrcholu ležícího na ose x až do doby, než dopadne na osu celou stranou, pak se otáčí kolem dalšího vrcholu.

Příklad 3.62. Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu

$$\int_C xy\, ds,$$

kde

$$C = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\right\}. \qquad \left[\text{výsledek: } \frac{\pi}{3}\right]$$

Příklad 3.63. Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{(C)} (yz, xz, xy)\ d\vec{s},$$

kde (C) je šroubovice daná (i s orientací) parametrizací

$$\varphi(t) = \left(a\cos t, a\sin t, \frac{bt}{2\pi}\right),\quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \qquad \left[\text{výsledek: } \frac{a^2 b}{4\pi}\right]$$

Příklad 3.64. Vypočtěte práci silového pole $\vec{F} = (x, y, xz - y)$ po obvodu křivky

$$\left(t^2, 2t, 4t^3\right),\quad t \in [0, 1],$$

jejíž orientace je dána touto parametrizací. $\left[\text{výsledek: } \frac{5}{2}\right]$

Příklad 3.65. Vypočtěte obsah stěny nádoby tvaru

$$\left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ z = \frac{x^2 + y^2}{2},\ x^2 + y^2 \le 1\right\}. \qquad \left[\text{výsledek: } \frac{2}{3}\pi\left(2\sqrt{2} - 1\right)\right]$$

Příklad 3.66. Vypočtěte plošný integrál 2. druhu

$$\int_{(S)} z\, dxdy,$$

kde (S) je zevně orientovaná plocha daná

$$(S) = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}. \qquad \left[\text{výsledek: } \frac{4\pi}{3}\right]$$

Příklad 3.67. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = \left(z, 0, x^2\right)$ nahoru parabolickou střechou

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = z,\ x, y \in [-1, 1]\right\}. \qquad \left[\text{výsledek: } \frac{4\pi}{3}\right]$$

Příklad 3.68. Vypočtěte

$$\int_{(M)} (xz, xy, yz)\ dS,$$

kde (M) je zevně orientovaný povrch jehlanu

$$(M) = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1\right\}. \qquad \left[\text{výsledek: } \frac{1}{4}\right]$$

Příklad 3.69. Vypočtěte
$$\int_{(C)} \vec{F}\,d\vec{s},$$
kde $\vec{F} = \big(-y, x - z^2\sin y, z^3 + 2z\cos y\big)$ a (C) je křivka daná
$$(C) = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 = 1, x^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\right\},$$
orientovaná tak, aby její průmět do roviny xy měl kladnou orientaci. [výsledek: -2π]

4. Funkce s omezenou variací a absolutně spojité funkce

Příklad 4.1. Dokažte, že funkce
$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{\pi}{x^2}) & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$
je diferencovatelná, ale nemá omezenou variaci na $[0,1]$.

Příklad 4.2. Dokažte, že má-li funkce na intervalu $[a,b]$ omezenou derivaci, pak tam má omezenou variaci.

Příklad 4.3. Dokažte, že funkce
$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{\pi}{x}) & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$
má omezenou variaci na $[0,1]$.

Příklad 4.4. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta > 0$. Dokažte, že funkce
$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha\cos(\frac{\pi}{x^\beta}) & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$
má omezenou variaci na $[0,1]$ právě tehdy, když $\alpha > \beta$.

Příklad 4.5. Dokažte, že každá funkce s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ je na tomto intervalu omezená.

Příklad 4.6. Dokažte, že prostor funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ tvoří algebru vzhledem k násobení.

Příklad 4.7. Rozhodněte, zda prostor funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ tvoří algebru vzhledem ke skládání.

Příklad 4.8. Dokažte, že je-li f lipschitzovská a g má omezenou variací na intervalu $[a,b]$, pak $f \circ g$ má omezenou variací na $[a,b]$.

Příklad 4.9. Dokažte, že je-li f spojitá a $|f|$ má omezenou variací na intervalu $[a,b]$, pak i f má omezenou variací na $[a,b]$. Dokažte, že předpoklad spojitosti nelze odstranit.

Příklad 4.10. Rozhodněte, zda prostor funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ tvoří svaz.

Příklad 4.11. (i) Dokažte, že funkce
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log(\frac{1}{x})} & \text{pro } x \in (0,\frac{1}{2}], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$
má omezenou variaci na $[0,\frac{1}{2}]$, ale není α-Hölderovská pro žádné $\alpha > 0$.

(ii) Nechť
$$x_n = \sum_{k-n}^{\infty} \frac{1}{k\log^2 k}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$
Nechť funkce f je definována předpisem
$$f(0) = f(x_n) = 0, \quad f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$
a f je lineární na intervalech $[x_{n+1}, \frac{x_n+x_{n+1}}{2}]$ a $[\frac{x_n+x_{n+1}}{2}, x_n]$. Dokažte, že f je α-Hölderovská pro každé $\alpha \in (0,1)$, ale nemá na intervalu $[0,x_2]$ omezenou variaci.

Příklad 4.12. Nechť R je Riemannova funkce. Rozhodněte, pro která $\alpha > 0$ má funkce R^α omezenou variaci na $[0,1]$.

Příklad 4.13. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x^\beta}) & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že f je absolutně spojitá na $[0,1]$ pokud $0 < \beta < \alpha$ a že f není absolutně spojitá na $[0,1]$ pokud $0 < \alpha \leq \beta$.

Příklad 4.14. Položme

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\sin(\frac{1}{x})| & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a $g(x) = \sqrt{x}$. Dokažte, že

- funkce f je absolutně spojitá na $[0,1]$,
- funkce g je absolutně spojitá na $[0,1]$,
- funkce $f \circ g$ je absolutně spojitá na $[0,1]$,
- funkce $g \circ f$ není absolutně spojitá na $[0,1]$.

Příklad 4.15. Nechť funkce f a g jsou absolutně spojité a g je monotónní na intervalu $[a,b]$. Dokažte, že potom je funkce $f \circ g$ absolutně spojitá na $[a,b]$.

5. Fourierovy řady

Příklad 5.1. Rozviňte funkci

$$f(x) := \arcsin \cos x, \qquad x \in (-\pi, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Příklad 5.2. Rozviňte funkci

$$f(x) := \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|, \qquad x \in \mathbb{R},$$

do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Příklad 5.3. Rozviňte funkci

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in (-\pi, 0] \\ x^2, & x \in [0, \pi) \end{cases},$$

do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet.

Příklad 5.4. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x, & x \in (-\pi, 0], \\ \beta x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Příklad 5.5. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := 1 - \sin(ax), \qquad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet.

Příklad 5.6. Rozviňte funkci
$$f(x) := \sin(3x) + 4x, \qquad x \in (-\pi, \pi),$$
do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 2n}{n}.$$

Příklad 5.7. Nechť $a \in \mathbb{Z}$. Rozviňte funkci
$$f(x) := \cos(ax), \qquad x \in (0, \pi),$$
do *sinové* Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{4-(2k-1)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^2}{(4-(2k-1)^2)^2},$$

Příklad 5.8. Rozviňte funkci
$$f(x) := \sin(x), \qquad x \in (0, \pi),$$
do *cosinové* Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

Příklad 5.9. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem
$$f(x) := \begin{cases} x + \sin^3 x, & x \in (-\pi, 0], \\ \pi - x + \sin^3 x, & x \in (0, \pi), \end{cases}$$
a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 5.10. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem
$$f(x) := \begin{cases} \sin x \cos^2 x, & x \in (-\pi, 0], \\ x^2 + \sin x + \cos^2 x, & x \in (0, \pi), \end{cases}$$
a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 5.11. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem
$$f(x) = \sin(\frac{x}{2})$$
a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 5.12. Nechť funkce f je definována na $\mathbb{R}$ předpisem
$$f(x) = \operatorname{sign}(\sin(2x)) + \cos^3 x + \sin^3 x.$$
Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet její Fejérovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 5.13. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem
$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ x + \frac{\pi}{2}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0), \\ -x + \frac{\pi}{2}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi), \end{cases}$$
a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.