MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 - ZIMNÍ SEMESTR 2016–2017
PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

Obsah

1. Logika, množiny, zobrazení a číselné obory

1.1. Výroková a predikátová logika.

Definice. Výrokem nazveme jakékoli tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Příklady.
- Dnes neprší. (Je výrok.)
- Nová Včelnice je hlavní město USA. (Je výrok, (zatím) nepravdivý.)
- Ahoj! (Není výrok.)
- Kéž by už byl konec hodiny! (Není výrok.)
- π^π je iracionální číslo. (Neví se, ale je to výrok.)

Definice. **Negací** $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

$$\textit{Není pravda, že platí } A.$$

Konjunkcí $A \& B$ (značíme též $A \& B$) výroků A a B nazveme výrok:

$$\textit{Platí } A \textit{ i } B.$$

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

$$\textit{Platí } A \textit{ nebo } B.$$

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

$$\textit{Jestliže platí výrok } A\textit{, potom platí výrok } B.$$

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**.

Výrok A v implikaci je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

$$\textit{Výrok } A \textit{ platí právě tehdy (tehdy a jen tehdy), když platí výrok } B.$$

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou (platnosti výroku) B.

Pravdivostní tabulky: Hodnotou 1 označujeme pravdivý výrok, hodnotou 0 nepravdivý výrok.

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poznámky.

- Logická spojka *nebo* u disjunkce není vylučující, tj. disjunkce zůstává v platnosti i když platí oba výroky A a B.
- Je-li premisa implikace A nepravdivá, pak implikace platí vždy bez ohledu na platnost závěru B (jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne cokoli).

konec 1. přednášky (04.10.2016)

Definice. **Výrokovou formou** budeme nazývat výraz

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \ldots, M_m$.

Definice. Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Výrok

$$\textit{Pro všechna } x \in M \textit{ platí } V(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon\ V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným (velkým) kvantifikátorem**.

Výrok

$$\textit{Existuje } x \in M, \textit{ pro které platí } V(x).$$

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M\colon\ V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním (malým) kvantifikátorem**.

Poznámka. Kvantifikátory stejného typu lze libovolně přehazovat, například

$$\forall x\ \forall y\colon V(x,y) \quad\iff\quad \forall y\ \forall x\colon V(x,y) \quad\iff\quad \forall x,y\colon V(x,y).$$

Na druhé straně ale kvantifikátory různého typu obecně přehazovat nelze, aniž by se změnil smysl výroku. Výrok

$$\exists x\ \forall y:\quad V(x,y)$$

sice implikuje výrok

$$\forall y\ \exists\ x\colon V(x,y),$$

ale opačná implikace obecně neplatí. Například výrok

$$\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\colon x > y$$

platí, ale

$$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\colon x > y$$

nikoli.

Příklad. Nechť M je množina osob přítomných v posluchárně a nechť $W(x,y)$ znamená: osoba x zná příjmení osoby y. Zkoumejte platnost výroků

$$\forall x \in M\ \exists y \in M\colon W(x,y);$$
$$\forall y \in M\ \exists x \in M\colon W(x,y);$$
$$\exists x \in M\ \forall y \in M\colon W(x,y);$$
$$\exists y \in M\ \forall x \in M\colon W(x,y).$$

1.2. **Množiny a množinové operace.**

Definice. Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.

Definice. **Sjednocením** množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice. **Průnikem** dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice. Řekneme, že množiny A a B jsou si **rovny** (značíme $A = B$), jestliže mají stejné prvky.

Definice. **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Značíme ji symbolem $\emptyset$. **Neprázdnou množinou** nazýváme každou množinu, která není prázdná.

Definice. **Rozdílem množin** A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.

Definice. **Kartézským součinem** množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n];\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla)**.** *Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí*
$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$
a
$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

1.3. **Zobrazení.**

Definice. Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Místo zápisu $[a, b] \in R$ někdy píšeme $a\,R\,b$. Pokud $A = B$ říkáme, že R je **relace na** A.

Definice. Nechť A a B jsou množiny a nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Pak relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou předpisem
$$[x, y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y, x] \in R$$
nazýváme **inverzní relací** k relaci R.

Definice. Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy též **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí
$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon \big(([x, y_1] \in F \& [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2\big).$$
Definičním oborem zobrazení F nazýváme množinu
$$D(F) = \{x \in A; \exists y \in B\colon [x, y] \in F\}.$$
Oborem hodnot zobrazení F nazýváme množinu
$$R(F) = \{y \in B; \exists x \in A\colon [x, y] \in F\}.$$

Poznámka. Nechť F je zobrazení z množiny A do množiny B. Pro každé $x \in D(F)$ existuje právě jedno y takové, že $[x, y] \in F$. Takové y značíme $F(x)$. **Grafem zobrazení** F rozumíme množinu $\{[x, F(x)]; x \in D(F)\}$.

Značení. Nechť A a B jsou množiny a f je zobrazení z A do B. Je-li $A = D(f)$, pak hovoříme o **zobrazení množiny** A do množiny B. Takové zobrazení značíme symbolem $f\colon A \to B$.

konec 2. přednášky (06.10.2016)

Definice. Nechť A, B jsou množiny a $f\colon A \to B$.

- **Obrazem** množiny $X \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina
$$f(X) = \{y \in B; \exists x \in X\colon f(x) = y\} = \{f(x); x \in X\}.$$
- **Vzorem** množiny $Y \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}.$$

Definice. Nechť A a B jsou množiny a $f\colon A \to B$ je zobrazení.

(a) Řekneme, že f je **prosté** (**injektivní**), jestliže
$$\forall x, y \in A\colon (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$
(b) Řekneme, že f je **na** (**surjektivní**), jestliže
$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon f(x) = y.$$
(c) Řekneme, že f je **bijekce** (**vzájemně jednoznačné**), jestliže je zároveň prosté a na.

Příklad. Nechť zobrazení f je definováno předpisem $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $A = B = [0, \infty)$, pak $f : A \to B$ je bijekce. Je-li $A = \mathbb{R}$ a $B = [0, \infty)$, pak $f : A \to B$ je na, ale není prosté. Je-li $A = B = \mathbb{R}$ pak $f : A \to B$ není ani prosté, ani na.

Definice. Nechť A a B jsou množiny, $f\colon A \to B$ je zobrazení a $C \subset A$. Pak zobrazení $g\colon C \to B$ definované předpisem $g(x) = f(x)$ pro $x \in C$ nazýváme **restrikcí** (**zúžením** nebo **parcializací**) zobrazení f na množinu C. Zobrazení g označujeme symbolem $f|_C$.

Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pro všechna $x \in D(f)$ taková, že $f(x) \in D(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením**, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice. Nechť A a B jsou množiny a $f\colon A \to B$ je prosté zobrazení. Pak **inverzní zobrazení** k f je definováno jako inverzní relace k f. Inverzní zobrazení k f značíme f^{-1}.

Poznámka. K neprostému zobrazení nelze definovat inverzní zobrazení. Lze definovat inverzní relaci, která však není zobrazením. Příkladem je zobrazení definované předpisem $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$.

1.4. **Mohutnost množin.**

Definice.

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B.
- Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B.
- Symbol $A \prec B$ značí situaci, kdy $A \preceq B$ a neplatí $A \approx B$.

Definice. Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Poznámka. Pro počet prvků konečné množiny X používáme často značení $|X|$. Dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Věta 1.2 (Cantorova–Bernsteinova)**.** *Nechť A, B jsou množiny takové, že $A \preceq B$ a zároveň $B \preceq A$. Pak A a B mají stejnou mohutnost.*

Definice. Nechť X je množina. Potom **potenční množinou** množiny X rozumíme množinu $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin množiny X.

Věta 1.3 (Cantorova)**.** *Nechť X je množina. Pak $X \prec P(X)$.*

Věta 1.4 (vlastnosti spočetných množin)**.**

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
(b) *Nechť zobrazení $f\colon A \to \mathbb{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*
(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*
(d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*
(e) *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

1.5. **Reálná čísla.**

Poznámka. Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností:

- vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah,
- vztah uspořádání a operací sčítání a násobení,
- vlastnost suprema.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}: \ w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme jej 0 a říkáme mu **nulový prvek**),
- $\forall x \in \mathbb{R} \, \exists z \in \mathbb{R}: \ x + z = 0$ (z je tzv. **opačné číslo** k číslu x, je určeno jednoznačně a značíme je $-x$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \forall x \in \mathbb{R}: \ v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme jej 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists y \in \mathbb{R}: \ x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme jej x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (**distributivita**).

konec 3. přednášky (11.10.2016)

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ (x \leq y \ \& \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x \leq y \ \& \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (0 \leq x \ \& \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Značení.

- Symbol $x \geq y$ znamená totéž, jako $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. **ostrá nerovnost**).
- Reálná čísla, pro něž $x > 0$ (resp. $x < 0$), budeme nazývat **kladnými** (resp. **zápornými**).
- Reálná čísla, pro něž $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$), budeme nazývat **nezápornými** (resp. **nekladnými**).

Definice.

- Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M.
- Obdobně definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**.
- Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in M: \ x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \, \exists x \in M: \ x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M. Má-li množina M supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme je $\sup M$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M. Obdobně definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) M. Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max M$ a $\min M$.

Příklady. (a) Je-li $M = [0, 1]$, pak $\sup M = \max M = 1$.
(b) Je-li $M = [0, 1)$, pak $\sup M = 1$, avšak $\max M$ neexistuje.
(c) Je-li $M = \{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, pak $\sup M = 1$, avšak $\max M$ neexistuje.

III. Vlastnost existence suprema

- Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Věta 1.5 (existence a jednoznačnost množiny reálných čísel). *Existuje čtveřice $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ splňující podmínky I–III, přičemž je těmito podmínkami určena jednoznačně v následujícím smyslu. Pokud čtveřice $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus, \odot, \leq^*)$ splňuje mutatis mutandis podmínky I–III, pak existuje bijekce $\varphi : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ taková, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí*

- $\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$,
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$,
- $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq^* \varphi(y)$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $g \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in M: \ x \geq g$,
- $\forall g' \in \mathbb{R},\ g' > g\ \exists x \in M: \ x < g'$,

nazýváme **infimem** množiny M. Má-li množina M infimum, je toto určeno jednoznačně a značíme je $\inf M$.

Věta 1.6 (existence infima). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M.*

Věta 1.7 (existence celé části reálného čísla). *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k+1$.*

konec 4. přednášky (13.10.2016)

Věta 1.8 (Archimédova vlastnost reálných čísel). *Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.*

Věta 1.9 (existence n-té odmocniny). *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^n = x$.*

Věta 1.10 (hustota racionálních čísel v $\mathbb{R}$). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.*

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.

1.6. **Komplexní čísla.** Nechť $x = (a, b) \in \mathbb{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$. **Komplexně sdruženým číslem** k x rozumíme číslo $\overline{x} = (a, -b)$; symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

2. Limita posloupnosti

2.1. Úvod.

Definice. Zobrazení přiřazující každému přirozenému číslu n reálné číslo a_n nazýváme **posloupnost** reálných čísel. Značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Číslo a_n nazveme **n-tým členem** této posloupnosti.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Věta 2.1 (jednoznačnost limity posloupnosti). *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

konec 5. přednášky (18.10.2016)

2.2. **Konvergence posloupnosti reálných čísel.**

Definice. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbb{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Jestliže posloupnost není konvergentní, pak říkáme, že je **divergentní**.

Věta 2.2 (postačující podmínka pro existenci limity posloupnosti). *Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, $A \in \mathbb{R}$. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ |a_n - A| < K\varepsilon.$$

potom $\lim a_n = A$.

Věta 2.3 (vztah konvergence a omezenosti posloupnosti). *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Příklad. Nechť $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není konvergentní.

Příklad. Nechť $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a platí $\lim a_n = 0$.

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.4 (limita vybrané posloupnosti). *Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, pak také $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.*

Příklad. Nechť $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není konvergentní.

Příklad. Nechť $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a platí $\lim a_n = 0$.

konec 6. přednášky (20.10.2016)

Věta 2.5 (limita posloupnosti a aritmetické operace). *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
(c) *je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je $\lim(a_n/b_n) = A/B$.*

Věta 2.6 (limita součinu členů omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou). *Nechť $\lim a_n = 0$ a nechť posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.*

Věta 2.7 (limita posloupnosti a absolutní hodnota). *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim |a_n| = |A|$.*

Věta 2.8 (limita posloupnosti a uspořádání). *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.*

(a) *Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.*
(b) *Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ je $a_n < b_n$.*

Věta 2.9 (o dvou strážnících). *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou dvě konvergentní posloupnosti a $\{c_n\}$ je posloupnost splňující:*

(a) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq b_n$,
(b) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

konec 7. přednášky (27.10.2016)

2.3. **Nevlastní limita posloupnosti.**

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \geq K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\,\exists n_0 \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \leq K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou ∞, říkáme, že **diverguje k** ∞. Má-li posloupnost limitu rovnou $-\infty$, říkáme, že **diverguje k** $-\infty$. Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečnu, říkáme, že **má nevlastní limitu**.

Příklad. Dokažte, že $\lim n = \infty$.

Definice. **Rozšířenou reálnou osou** budeme nazývat množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a budeme ji značit $\mathbb{R}^*$. Na množinu $\mathbb{R}^*$ rozšíříme aritmetické operace a relaci uspořádání definované na $\mathbb{R}$ následujícím způsobem.

Operace sčítání:

- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \colon -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$,
- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \colon \infty + a = a + \infty = \infty$,
- $-(\infty) = -\infty, -(-\infty) = \infty$.

Operace násobení:

- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$,
- $(\infty)^{-1} = 0, (-\infty)^{-1} = 0$.

Relace uspořádání:

- $\forall a \in \mathbb{R} \colon -\infty < a, a < \infty$,
- $-\infty < \infty$.

Absolutní hodnota je na množině $\mathbb{R}^*$ definována předpisem $|x| = \max\{x, -x\}$, a tedy $|\infty| = \infty$, $|-\infty| = \infty$.

Poznámka. Následující výrazy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0, \quad \frac{\text{cokoli}}{0}.$$

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}^*$ a $G \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí následující podmínky:

(a) $\forall a \in A \colon a \leq G$,
(b) $\forall G' \in \mathbb{R}^*, G' < G\ \exists a \in A \colon G' < a$.

Pak G nazýváme **supremem** množiny A. Podobně definujeme **infimum** množiny A.

Poznámka. Pro neprázdnou a shora omezenou podmnožinu reálných čísel se pojem suprema shoduje s pojmem zavedeným dříve. Supremum shora neomezené množiny je rovno ∞ a supremum prázdné množiny je rovno $-\infty$. Infimum zdola neomezené množiny je rovno $-\infty$ a infimum prázdné množiny je rovno ∞.

Věta 2.10 (jednoznačnost limity podruhé)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu v* $\mathbb{R}^*$.

Značení. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$.

Poznámka. Pro každou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

konec 8. přednášky (01.11.2016)

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Definujeme množiny

$$\begin{aligned}(a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^*,\\ [a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}, \quad a, b \in \mathbb{R},\\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R},\\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \quad a \in \mathbb{R} b \in \mathbb{R}^*.\end{aligned}$$

Pak množinu (a, b) nazýváme **otevřeným intervalem**, množinu $[a, b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a množiny $[a, b)$ a $(a, b]$, nazýváme **polouzavřenými intervaly**.

Poznámka. Prázdná množina je také otevřený interval (pro $a \in \mathbb{R}$ je $(a, a) = \emptyset$). Jednobodová množina je také uzavřený interval (pro $a \in \mathbb{R}$ je $[a, a] = \{a\}$).

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$.

Poznámka. Nechť $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^*$, $A \neq \tilde{A}$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Poznámka. Zavedení pojmu okolí nám umožňuje ekvivalentně formulovat pojem limity posloupnosti (vlastní i nevlastní) jedinou formulí. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámka. Věty o limitě vybrané posloupnosti, o limitě a absolutní hodnotě, o limitě a uspořádání a o dvou strážnících platí v nezměněné podobě i tehdy, připustíme-li nevlastní limity.

Věta 2.11 (nevlastní limita posloupnosti a jednostranná omezenost)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim a_n = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená. Obdobně je-li $\lim a_n = -\infty$, potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená.*

Věta 2.12 (o andělovi)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující:*

(a) *existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n$,*
(b) $\lim a_n = \infty$.

Potom platí $\lim c_n = \infty$.

Věta 2.13 (o ďáblovi)**.** *Nechť $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující:*

(a) *existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n \geq c_n$,*
(b) $\lim b_n = -\infty$.

Potom platí $\lim c_n = -\infty$.

Věta 2.14 (změna konečně mnoha členů posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim a_n = A$. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pak také $\lim b_n = A$.*

Poznámka. Předcházející větu lze formulovat i následujícím způsobem: změníme-li u dané konvergentní posloupnosti konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost stejnou limitu.

Věta 2.15 (limita a aritmetické operace podruhé)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, *pokud je výraz na pravé straně definován,*
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je výraz na pravé straně definován,*
(c) $\lim a_n / b_n = A/B$, *pokud je $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a výraz na pravé straně definován.*

Poznámka. Předpoklad, že výrazy na pravých stranách jsou definovány, nelze z věty o limitě a aritmetických operacích vynechat. Vskutku, nechť například $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. Potom $\lim a_n = 0$, ale $\lim \frac{1}{a_n} = \lim (-1)^n n$ neexistuje ani nevlastní. Podobně, nechť $K \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{-n + K\}$. Pak

$$\lim a_n = \infty, \quad \lim b_n = -\infty \quad \text{a} \quad \lim(a_n + b_n) = K.$$

Tento příklad ukazuje, že z informace $\lim a_n = \infty$ a $\lim b_n = -\infty$ nelze odvodit hodnotu $\lim(a_n + b_n)$. Výraz $\infty - \infty$ nelze tedy definovat tak, aby pro takové posloupnosti platila věta o limitě součtu. Existence a případně i hodnota $\lim(a_n + b_n)$ závisí na jemnějším chování posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$.

Věta 2.16 (nevlastní limita podílu)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$. Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.*

konec 9. přednášky (03.11.2016)

2.4. Hlubší věty o limitě posloupnosti.

Věta 2.17 (limita monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.*

Důsledek. *Každá neklesající a shora omezená (nerostoucí a zdola omezená) posloupnost je konvergentní.*

Příklad. Posloupnost $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Posloupnost $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající. Obě tyto posloupnosti mají společnou vlastní limitu, kterou značíme symbolem e.

Definice. Nechť I je interval. Jeho **délkou** rozumíme ∞, je-li I neomezený, a číslo $b - a$, je-li I omezený s koncovými body $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Věta 2.18 (Cantorův princip vložených intervalů)**.** *Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost uzavřených intervalů splňující*

- *pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $I_{n+1} \subset I_n$,*
- *platí $\lim \text{délka } I_n = 0$.*

Potom je množina $\bigcap I_n$ jednobodová.

Věta 2.19 (Bolzanova-Weierstrassova věta)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

konec 10. přednášky (10.11.2016)

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Nechť je $\{a_n\}$ shora omezená. Položme $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti tedy existuje $\lim b_n$. Nechť je $\{a_n\}$ zdola omezená. Položíme $c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\{c_n\}$ neklesající posloupnost reálných čísel, a tedy existuje $\lim c_n$.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme místo symbolů $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ psát pouze $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

Poznámky. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.

(a) Pojmy $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou dobře definovány, neboť dle výše uvedené poznámky limity v definici těchto pojmů existují.

(b) Limita posloupnosti nemusí existovat, avšak hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují vždy a splňují $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$. Z definice dále zřejmě plyne, že $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

(c) Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ se nemusí rovnat. Například pro posloupnost $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ platí $\limsup a_n = 1$ a $\liminf a_n = -1$. Pro posloupnost $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}$ platí $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = -\infty$.

(d) Je-li $\{a_n\}$ omezená, pak můžeme definovat posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jako výše. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n \leq b_n$.

Věta 2.20 (o vztahu limity, limes superior a limes inferior)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.*

Poznámky. Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.

(a) Platí

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n, \ \liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n.$$

(b) Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \text{ a } \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 2.21 (o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}$ a pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.*

Důsledek. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $A \in \mathbb{R}^*$. Potom*

(a) $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$,

(b) $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ *a* $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$,

(c) *je-li* $\lim a_n = A$, *pak* $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

konec 11. přednášky (15.11.2016)

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.22 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro posloupnosti)**.** *Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.*

Příklad. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$.

Příklad. Dokažte, že existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Věta 2.23 (Borelova věta)**.** *Nechť I je uzavřený interval a $\mathcal{S}$ je množina otevřených intervalů taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}$. Potom existuje konečná množina $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}_0$.*

3. Číselné řady

3.1. Základní pojmy.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazýváme **m-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, přičemž číslo a_n je **n-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součet** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jemnější rozlišení mezi dvěma různými typy divergentních řad budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k** ∞, respektive **diverguje k** $-\infty$, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m = \infty$, respektive $\lim_{m\to\infty} s_m = -\infty$, a že že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje (osciluje)**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje.

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje (osciluje).

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad. Pro $q \in \mathbb{R}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$.

konec 12. přednášky (22.11.2016)

Poznámka. Změna konečně mnoha členů nekonečné řady nemá vliv na její konvergenci či divergenci.

Věta 3.1 (nutná podmínka konvergence řady)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom* $\lim a_n = 0$.

Poznámka. Opačná implikace ve Větě 3.1 neplatí. Například platí $\lim \frac{1}{n} = 0$, avšak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní.

Věta 3.2 (Bolzanova–Cauchyova podmínka konvergence řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní právě tehdy, když platí výrok*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,\ m > n\colon \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$$

Věta 3.3 (řady a aritmetické operace)**.** *Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom jsou konvergentní i řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důsledek. *Množina všech konvergentních řad tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.*

Poznámka. Větu 3.3 je možno zobecnit následujícím způsobem. Nechť mají řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ součet a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Jestliže je výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definován, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.2. **Řady s nezápornými členy.**

Poznámka. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom je buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní nebo diverguje k ∞. Jinými slovy, řada s nezápornými členy má vždy součet, který může být konečný nebo nekonečný. To plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti a pozorování, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neklesající.

Věta 3.4 (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.*

(a) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
(b) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

Věta 3.5 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.*

(a) *Jestliže je $A \in (0, \infty)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*
(b) *Jestliže je $A = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(c) *Jestliže je $A = \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.*

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n(n^2+1)(n+2)}$ je konvergentní.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je divergentní.

konec 13. přednášky (24.11.2016)

Věta 3.6 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

(a) *Jestliže platí*
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$
pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(b) *Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(c) *Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(d) *Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*
(e) *Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Poznámka. Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak nelze na základě Cauchyova kritéria o konvergenci či divergenci řady rozhodnout. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, ale $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Příklad. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, a $k \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ konverguje.

Věta 3.7 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(a) *Jestliže platí*
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$
pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(b) *Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(c) *Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(d) *Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\lim a_n = \infty$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Příklad. Nechť $\in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}$ konverguje.

Poznámky. (a) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak nelze na základě podílového kritéria o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozhodnout. Tento fakt opět ilustrují například řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

(b) Předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Příkladem je konvergentní řada

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \cdots,$$

pro kterou platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Věta 3.8 (Raabeovo kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má kladné členy.*

(a) *Jestliže $\liminf n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(b) *Jestliže $\limsup n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Věta 3.9 (kondenzační kritérium). *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Věta 3.10 (o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$). *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.*

3.3. **Řady s obecnými členy.**

Lemma 3.11 (Abelova parciální sumace). *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_m$, $b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.*

(a) *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \dots, m$. Pak platí*

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \tag{1}$$

(b) *Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $k = 0, \dots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \le m$, platí*

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \tag{2}$$

konec 14. přednášky (29.11.2016)

Věta 3.12 (Abelovo-Dirichletovo kritérium). *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:*

(A) *posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*

(D) *$\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta 3.13 (Leibniz). *Nechť $\{b_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel splňující $\lim b_n = 0$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ konverguje.*

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je konvergentní.

3.4. **Absolutní konvergence řad.**

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$je neabsolutně konvergentní.

Věta 3.14 (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady). *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.*

4. Limita a spojitost funkce

4.1. Základní pojmy.

Definice. **Funkce** f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je **rostoucí** na M, jestliže pro každou dvojici $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) < f(y)$. Obdobně definujeme funkci **klesající**, **nerostoucí** a **neklesající**. Řekneme, že funkce f je **monotónní** na M, jestliže je buď nerostoucí nebo neklesající na M. Řekneme, že funkce f je **ryze monotónní** na M, jestliže je buď rostoucí, nebo klesající na M.

Definice. Nechť f je funkce. Řekneme, že f je **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$. Nechť f je funkce. Řekneme, že f je **sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$. Řekneme, že f je **periodická** s periodou $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $x + a \in D(f)$, $x - a \in D(f)$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

konec 15. přednášky (01.12.2016)

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset D(f)$. Řekneme, že f je **shora omezená** na M, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq K$. Řekneme, že f je **zdola omezená** na M, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \geq K$. Řekneme, že f je **omezená** na M, jestliže je na M omezená shora i zdola, tedy jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $|f(x)| \geq K$.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. **Prstencovým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$P(c,\varepsilon) = \begin{cases} B(c,\varepsilon) \setminus \{c\} & \text{pokud } c \in \mathbb{R}; \\ B(c,\varepsilon) & \text{pokud } c \in \{\infty, -\infty\}, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. **Pravým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$B_+(c,\varepsilon) = \begin{cases} [c, c+\varepsilon) & \text{pokud } c \in \mathbb{R}; \\ B(c,\varepsilon) & \text{pokud } c = -\infty, \end{cases}$$

a **pravým prstencovým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$P_+(c,\varepsilon) = \begin{cases} (c, c+\varepsilon) & \text{pokud } c \in \mathbb{R}; \\ B(c,\varepsilon) & \text{pokud } c = -\infty, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. **Levým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$B_-(c,\varepsilon) = \begin{cases} (c-\varepsilon, c] & \text{pokud } c \in \mathbb{R}; \\ B(c,\varepsilon) & \text{pokud } c = \infty, \end{cases}$$

a **levým prstencovým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$P_-(c,\varepsilon) = \begin{cases} (c-\varepsilon, c) & \text{pokud } c \in \mathbb{R}; \\ B(c,\varepsilon) & \text{pokud } c = \infty, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Poznámky. (a) Každé okolí prvku $-\infty$ je automaticky pravé a prstencové. Každé okolí prvku ∞ je automaticky levé a prstencové.

(b) Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Potom $B(c,\varepsilon_1) \subsetneq B(c,\varepsilon_2)$. Podobně je tomu pro prstencová a jednostranná okolí.

(c) Jestliže $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $c_1 < c_2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, splňují $B(c_1,\varepsilon) \cap B(c_2,\varepsilon) = \emptyset$, potom pro každé $x \in B(c_1,\varepsilon)$, $y \in B(c_2,\varepsilon)$ platí $x < y$.

4.2. **Limita funkce.**

Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P(c, \delta): \ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámky. (a) Je-li $c \in \mathbb{R}^*$ a funkce f má v $c \in \mathbb{R}^*$ limitu, potom musí být definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí c.

(b) Má-li funkce f limitu v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu, potom může a nemusí být definovaná v bodě c. Je-li například f definovaná na množině $(0,1) \cup (1,2)$, pak má smysl studovat existenci její limity v bodě 1, ale nikoli v bodě 5. Je-li funkce f definovaná v bodě c, pak funkční hodnota $f(c)$ nemá vliv na existenci ani na hodnotu limity f v c.

(c) Prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když f je definovaná na nějakém prstencovém okolí c a platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \ \delta > 0\colon f(P(c, \delta)) \subset B(A, \varepsilon).$$

Věta 4.1 (jednoznačnost limity funkce)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť f je funkce. Potom f má v c nejvýše jednu limitu.*

Značení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme

$$\lim_{x \to c} f(x) = A.$$

Poznámky. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce.

(a) Mohou nastat tyto případy:

$$\lim_{x \to c} f(x) \begin{cases} \text{existuje vlastní} & \text{pokud } \lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbb{R}, \\ \text{existuje nevlastní} & \text{pokud } \lim_{x \to c} f(x) = A \in \{-\infty, \infty\}, \\ \text{neexistuje.} & \end{cases}$$

(b) Jestliže $c \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x \to c} f(x) = A$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \ \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |x - c| < \delta, \ x \neq c\colon |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(c) Jestliže $c \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ právě tehdy, když

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \ \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |x - c| < \delta, \ x \neq c\colon f(x) \geq K.$$

Definice. (a) Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P_+(c, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

(b) Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zleva** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P_-(c, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámka. Je-li $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce, potom f má v c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva.

Značení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu zprava nebo zleva rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme po řadě

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = A \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to c_-} f(x) = A.$$

Věta 4.2 (vztah limity funkce a jednostranných limit)**.** *Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v bodě c limitu zprava i zleva a hodnoty těchto jednostranných limit se rovnají A.*

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je **spojitá** v bodě c, jestliže $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (**zleva**), jestliže $\lim_{x \to c_+} f(x) = f(c)$ ($\lim_{x \to c_-} f(x) = f(c)$).

Poznámka. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a nechť f je funkce. Pak f je spojitá v bodě c právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}: \ |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Příklady. (a) Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = a$. Funkci f nazýváme **konstantní** funkcí. Potom pro každé $c \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\lim_{x\to c} f(x) = a.$$

(b) Definujme funkci

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Potom

$$\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign} x = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_-} \operatorname{sign} x = -1,$$

a tedy $\lim_{x\to 0} \operatorname{sign} x$ neexistuje. Funkce sign je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, a v bodě 0 je nespojitá.

(c) Funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na svém definičním oboru. Navíc platí

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_-} f(x) = -\infty,$$

a tedy $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

(d) Funkci D, definovanou předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pokud } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nazýváme **Dirichletovou funkcí**. Dirichletova funkce nemá limitu v žádném bodě, a tedy není v žádném bodě spojitá.

(e) Funkci R, definovanou předpisem

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pokud } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná}, \\ 0 & \text{pokud } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nazýváme **Riemannovou funkcí**. Riemannova funkce splňuje $\lim_{x\to c} R(x) = 0$ pro každé $c \in \mathbb{R}$, a tedy je spojitá ve všech bodech $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

konec 16. přednášky (06.12.2016)

4.3. **Věty o limitách.**

Věta 4.3 (Heineova věta). *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou následující dva výroky ekvivalentní.*

(i) *Platí* $\lim_{x\to c} f(x) = A$.
(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in D(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Věta 4.4 (Heineova věta pro spojitost). *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována na nějakém okolí bodu c. Pak jsou následující dva výroky ekvivalentní.*

(i) *Funkce f je spojitá v bodě c.*
(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in D(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Poznámka. Věty 4.3 i 4.4 platí po odpovídající úpravě i pro jednostranné limity.

Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0_+} \sin \frac{1}{x}$$

neexistuje.

Věta 4.5 (aritmetika limit funkcí). *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $B \in \mathbb{R}^*$. Nechť f a g jsou funkce a platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B$. Potom*

(a) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = A+B$, *je-li výraz na pravé straně definován,*
(b) $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = AB$, *je-li výraz na pravé straně definován,*
(c) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *je-li výraz na pravé straně definován.*

Věta 4.6 (limita složené funkce)**.** *Nechť $c, D, A \in \mathbb{R}^*$. Nechť funkce f a g splňují $\lim_{x\to c} g(x) = D$ a $\lim_{y\to D} f(y) = A$. Předpokládejme, že je splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:*
(P) *existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c,\eta)$ platí $g(x) \neq D$,*
(S) *funkce f je spojitá v bodě D.*

Potom platí
$$\lim_{x\to c}(f\circ g)(x) = A.$$

Poznámky. (a) Je-li bod D nevlastní, pak je podmínka (P) automaticky splněna. Naopak podmínka (S) nemůže být splněna.

(b) Funkce, která je na nějakém prstencovém okolí bodu (S) ryze monotónní, splňuje podmínku (S).

(c) Příklady funkcí, které nesplňují podmínku (S), jsou například konstantní funkce (v libovolném bodě), nebo funkce g definovaná předpisem
$$g(x) = x^2 \sin\tfrac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$
v bodě $c = 0$.

Příklad. Předpoklady ve Větě 4.6 jsou podstatné. Položme například
$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = 4, \\ 0 & \text{pokud } x \in \mathbb{R}\setminus\{4\}, \end{cases}$$
a $g(x) = 4$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Potom platí $\lim_{x\to 0} g(x) = 4$, $\lim_{y\to 4} f(y) = 0$, ale $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1$. Příklad odpovídá hodnotám $c = 0$, $D = 4$ a $A = 1$ ve Větě 4.6. Funkce g nesplňuje podmínku (P), protože pro každé $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, a každé $x \in P(c,\eta)$ platí $g(x) = D$. Funkce f navíc není v bodě $D = 4$ spojitá, takže není splněna ani podmínka (S).

Věta 4.7 (vlastní limita funkce a omezenost)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť f je funkce. Má-li f v $c \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f je na $P(c,\delta)$ omezená.*

konec 17. přednášky (08.12.2016)

Věta 4.8 (limita funkce a uspořádání)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť f, g jsou funkce.*
(a) *Nechť*
$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x).$$
Pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí
$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) > g(x).$$
(b) *Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí*
$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \le g(x).$$
Nechť existuje $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$. Potom platí
$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x).$$

Poznámka. Jestliže je funkce f v bodě c spojitá a $f(c) > y$, kde $y \in \mathbb{R}^*$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $x \in B(c,\delta)$ platí $f(x) > y$. Tvrzení bezprostředně plyne z části (a) předchozí věty, kde za funkci g volíme nulovou funkci, a z definice spojitosti.

Věta 4.9 (spojitost a aritmetické operace)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a nechť jsou funkce f a g spojité v bodě c. Potom jsou funkce $f+g$ a fg spojité v bodě c. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě c.*

Věta 4.10 (o dvou strážnících pro funkce). *Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a nechť f, g, h jsou funkce. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \le h(x) \le g(x).$$

Dále předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A$. Potom existuje rovněž $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se A.

Příklad. Spočtěte $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+2^x)}{x}$.

Věta 4.11 (o andělovi pro funkce). *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \le g(x).$$

Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. Potom $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$.

Věta 4.12 (o ďáblovi pro funkce). *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \le g(x).$$

Nechť $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$.

Poznámka. Uvedené věty platí po odpovídajících úpravách i pro jednostranné limity.

Věta 4.13 (limita monotónní funkce). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť funkce f je monotónní na intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x)$, přičemž platí:*

- *Je-li f na (a, b) neklesající, pak*

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf f((a, b)) \qquad a \qquad \lim_{x\to b_-} f(x) = \sup f((a, b)).$$

- *Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak*

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \sup f((a, b)) \qquad a \qquad \lim_{x\to b_-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

4.4. **Funkce spojité na intervalu.**

Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Řekneme, že funkce $f \colon J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J.

Věta 4.14 (Bolzanova věta o nabývání mezihodnot). *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = y$.*

konec 18. přednášky (13.12.2016)

Poznámka. Věta 4.14 platí obdobně v případě, kdy $f(a) > f(b)$.

Věta 4.15 (spojitý obraz intervalu). *Nechť J je interval. Nechť funkce $f \colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá na J. Potom je množina $f(J)$ interval.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (respektive **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M \colon f(y) \le f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in M \colon f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (respektive **bodem minima**) funkce f na množině M.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (respektive **lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x, \delta) \cap M \colon f(y) \le f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in B(x, \delta) \cap M \colon f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima** (respektive **bodem lokálního minima**) funkce f na množině M.

• Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(x,\delta) \cap M\colon f(y) < f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in P(x,\delta) \cap M\colon f(y) > f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M.

• Bodem **extrému** budeme rozumět bod maxima či minima. Bodem **lokálního extrému** budeme rozumět bod lokálního maxima či lokálního minima.

Věta 4.16 (existence extrémů)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Potom f nabývá na $[a,b]$ svého maxima i minima.*

Poznámka. Ve Větě 4.16 je důležité, že funkce f je spojitá a interval $[a,b]$ je uzavřený. Nespojitá funkce nemusí nabývat extrémů ani na uzavřeném intervalu, příkladem je funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } x \in \{0,1\}, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{jestliže } x \in (0,1). \end{cases}$$

Na otevřeném intervalu naopak nemusí nabývat extrémů ani spojitá funkce, příkladem je funkce $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = x$.

Věta 4.17 (omezenost spojité funkce na uzavřeném intervalu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Potom je f na $[a,b]$ omezená.*

Věta 4.18 (spojitost inverzní funkce)**.** *Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

konec 19. přednášky (15.12.2016)

5. Derivace a elementární funkce

5.1. Základní vlastnosti derivace.

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě** a a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce f v bodě** a předpisy

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámky. (a) Mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace funkce } f \text{ v bodě } a \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je} \begin{cases} \textbf{vlastní}, \text{ tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \textbf{nevlastní}, \text{ tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

(b) Platí

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl. Obdobné rovnosti platí pro jednostranné derivace. Tvrzení plyne z věty o limitě složené funkce.

(c) Z existence $f'(a)$ (vlastní nebo nevlastní) plyne, že existuje okolí bodu a, na němž je funkce f definovaná. Obdobné tvrzení platí pro jednostranné derivace.

(d) Derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ existuje právě tehdy, když v a existuje derivace zprava i zleva a rovnají se.

(e) Derivace reálné funkce v bodě je „lokální pojem“. To znamená, že jestliže se funkce f a g shodují na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a)$, pak existuje i $g'(a)$ a platí $f'(a) = g'(a)$. Obdobné tvrzení platí pro jednostranné derivace.

Poznámka. Má-li funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ na množině $M \subset \mathbb{R}$ vlastní derivaci v každém bodě $x \in M$, pak zobrazení $f'\colon M \to \mathbb{R}$, které přiřadí bodu $x \in M$ derivaci $f'(x)$, je reálnou funkcí na M.

Příklady. (a) Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $f'(a) = 0$.
(b) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $f'(a) = na^{n-1}$.
(c) Nechť $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, a tedy $f'(0)$ neexistuje.
(d) Nechť $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f'(0) = \infty$.
(e) Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{jestliže } x = 0. \end{cases}$$

Potom $f'_+(0) = -\infty$, $f'_-(0) = \infty$, a tedy $f'(0)$ neexistuje.

Věta 5.1 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.*

Poznámky. (a) Tvrzení Věty 5.1 platí po odpovídající úpravě i pro jednostranné derivace, tedy má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci zprava (zleva), potom je f v bodě a zprava (zleva) spojitá.
(b) Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ nevlastní derivaci, pak nemusí být spojitá v a (příkladem je funkce sign a bod 0).
(c) Opačná implikace ve Větě 5.1 neplatí. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, která je sice spojitá v bodě 0, avšak $f'(0)$ neexistuje.

Věta 5.2 (aritmetika derivací)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f a g jsou definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.*
(a) *Platí*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.
(b) *Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.
(c) *Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Poznámka. Předpoklady Věty 5.2 není možné vynechat. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Potom $f'(0) = \infty$, $g'(0) = -\infty$, ale $(f+g)'(0)$ neexistuje. Ani $(fg)'(0)$ neexistuje, ačkoli výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ má smysl.

Věta 5.3 (derivace složené funkce)**.** *Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Nechť funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

konec 20. přednášky (20.12.2016)

Poznámka. Předpoklad spojitosti vnitřní funkce ve Větě 5.3 nelze vynechat. Nechť

$$f(y) = |y|, \quad y \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

a body $a = 0$, $b = -\frac{1}{2}$. Pak $(f \circ g)'(0)$ neexistuje, ačkoli je výraz $f'(g(0)) \cdot g'(0)$ definován.

Věta 5.4 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť f je spojitá a ryze monotónní na intervalu I a nechť a je vnitřním bodem intervalu I. Označme $b = f(a)$. Nechť existuje $f'(a)$.*

(a) *Je-li $f'(a) \neq 0$, pak $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.*
(b) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí, pak $(f^{-1})'(b) = \infty$.*
(c) *Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající, pak $(f^{-1})'(b) = -\infty$.*

Věta 5.5 (nutná podmínka existence extrému)**.** *Nechť f je funkce. Je-li a bodem lokálního extrému f, pak buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.*

5.2. **Věty o střední hodnotě.**

Věta 5.6 (Rolleova věta)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b), pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.*

Věta 5.7 (Lagrangeova věta)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 5.8 (vztah derivace a monotonie)**.** *Nechť I je interval a f je spojitá funkce na I. Nechť $\operatorname{Int} I$ označuje množinu všech vnitřních bodů intervalu I. Nechť existuje $f'(x)$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$. Potom*

(a) *je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f rostoucí na I;*
(b) *je-li $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f neklesající na I;*
(c) *je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f klesající na I;*
(d) *je-li $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f nerostoucí na I.*

Věta 5.9 (Cauchyova věta)**.** *Nechť f a g jsou funkce spojité na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, nechť f má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci a nechť g má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

konec 21. přednášky (22.12.2016)

Věta 5.10 (l'Hospitalova pravidla)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou reálné funkce a existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jestliže navíc platí*

(a) *$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, nebo*
(b) *$\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$,*

potom

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámky.
(a) Tvrzení Věty 5.10 platí i pro limitu zleva i pro oboustranné limity.
(b) Předpoklady Věty 5.10 nelze vynechat, například

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + 1}{3x + 1} \neq \frac{2}{3}.$$

(c) Obecně není pravda, že z existence $\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)}$ můžeme něco usoudit o $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Například

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+\sin x} = -\infty,$$

ale

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+\cos x}$$

neexistuje, neboť funkce $\frac{2x}{1+\cos x}$ není definována na žádném okolí $-\infty$.

(d) L'Hospitalovo pravidlo nemusí být vždy nejvhodnější technikou k výpočtu limity. Například pro limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

se nehodí, neboť derivováním vznikne složitější výraz.

Věta 5.11 (o limitě derivací)**.** *Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x\to a_+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} f'(x).$$

Poznámka. Tvrzení Věty 5.11 platí i pro derivaci zleva (a tedy i pro oboustrannou derivaci).

Poznámka. Předpoklad spojitosti zprava ve Větě 5.11 nelze vynechat. Například pro funkci $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$, platí $\lim_{x\to 0_+} f'(x) = \lim_{x\to 0_+} 0 = 0$, ale $f'_+(0) = \infty$.

5.3. **Elementární funkce.**

Definice. **Exponenciální funkci** exp definujme pro $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Poznámka. Platí

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Věta 5.12 (zavedení exponenciální funkce)**.** *Funkce* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je dobře definována a splňuje*

(E1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$,
(E2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$.

konec 22. přednášky (03.01.2017)

Poznámka. Vlastnost (E2) lze interpretovat ve tvaru $\exp'(0) = 1$.

Věta 5.13 (vlastnosti exponenciální funkce)**.** *Následující vlastnosti exponenciální funkce je možné odvodit pouze z vlastností (E1) a (E2).*

(E3) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\exp'(x) = \exp x$.
(E4) *Platí* $\exp(0) = 1$.
(E5) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.
(E6) *Funkce* exp *je spojitá na* $\mathbb{R}$.
(E7) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\exp x > 0$.
(E8) *Funkce* exp *je rostoucí na* $\mathbb{R}$.
(E9) *Platí* $\lim\limits_{x\to\infty} \exp x = \infty$ *a* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$.
(E10) *Platí* $R(\exp) = (0, \infty)$.

Věta 5.14 (existence a jednoznačnost exponenciální funkce)**.** *Existuje právě jedna funkce definovaná na $\mathbb{R}$ splňující podmínky (E1) a (E2).*

Definice.

(a) Funkce $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.
(b) Je-li $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}, \quad x \in (0,\infty).$$

Funkci $\log_a$ nazýváme **logaritmem o základu** a.
(c) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b\log(a))$.
(d) Nechť $a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.
(e) Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, n**-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, n**-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in [0,\infty)$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in [0,\infty)$.

Poznámka. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$(\exp(y))^x = \exp(x\log(\exp(y)) = \exp(xy).$$

Speciálně (pro $y = 1$) dostáváme

$$e^x = (\exp(1))^x = \exp(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Místo $\exp x$ můžeme tedy psát e^x.

Věta 5.15 (vlastnosti logaritmu)**.** *Funkce* log *má následující vlastnosti.*
(L1) *Platí* $D(\log) = (0,\infty)$.
(L2) *Platí* $R(\log) = \mathbb{R}$.
(L3) *Funkce* log *je rostoucí na* $(0,\infty)$.
(L4) *Funkce* log *je spojitá na* $(0,\infty)$.
(L5) *Pro každé* $x, y \in (0,\infty)$ *platí* $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.
(L6) *Pro každé* $a \in (0,\infty)$ *a* $b \in \mathbb{R}$ *platí* $\log a^b = b\log a$.
(L7) *Pro každé* $x \in (0,\infty)$ *platí* $\log'(x) = \frac{1}{x}$.
(L8) *Platí* $\lim\limits_{x\to 0_+} \log x = -\infty$ *a* $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$.

Definice. Funkci **sinus**, značíme sin, a **kosinus**, značíme cos, definujeme předpisy

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Věta 5.16 (základní vlastnosti sinu a kosinu)**.** *Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a mají následující vlastnosti.*
(S1) *pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

(S2) *pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

(S3) sin *je lichá funkce a* cos *je sudá funkce,*
(S4) $\sin(0) = 0$ *a existuje kladné číslo* π *takové, že* sin *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *a* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,
(S5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Poznámka. Vlastnost (S5) lze interpretovat ve tvaru $\sin'(0) = 1$.

Poznámka. Obdobně jako (S5) lze odvodit, že platí $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Věta 5.17 (vlastnosti funkcí sin a cos)**.** *Následující vlastnosti funkcí sinus a kosinus je možné odvodit pouze z vlastností (S1)–(S5).*

(S6) *Platí* $\cos(0) = 1$.
(S7) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
(S8) *Platí* $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.
(S9) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ *a* $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$. *Funkce* sin *a* cos *jsou* π*-antiperiodické (tedy* $\sin(x + \pi) = -\sin x$ *a* $\cos(x + \pi) = -\cos x$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$*), a tedy* 2π*-periodické.*
(S10) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\sin'(x) = \cos x$ *a* $\cos'(x) = -\sin x$.
(S11) *Funkce* sin *a* cos *jsou spojité na* $\mathbb{R}$.
(S12) *Platí* $\sin x = 0$*, právě když* $x = k\pi$ *pro* $k \in \mathbb{Z}$ *a* $\cos x = 0$*, právě když* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *pro* $k \in \mathbb{Z}$.

Věta 5.18 (jednoznačnost sinu, kosinu a π)**.** *Trojice* $(\sin, \cos, \pi)$ *je vlastnostmi (S1)–(S5) určena jednoznačně.*

konec 23. přednášky (05.01.2017)

Definice. Funkce **tangens** a **kotangens** značíme tg a cotg a definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \operatorname{cotg} x &= \frac{\cos x}{\sin x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Funkce sin, cos, tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

Věta 5.19 (vlastnosti funkce tangens)**.** *Funkce* tg *je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá,* π*-periodická a rostoucí na* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Pro každé* $x \in D(\operatorname{tg})$ *platí* $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. *Platí* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} \operatorname{tg} x = \infty$ *a* $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}_+} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Věta 5.20 (vlastnosti funkce kotangens)**.** *Funkce* cotg *je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá,* π*-periodická a klesající na* $(0, \pi)$. *Pro každé* $x \in D(\operatorname{cotg})$ *platí* $\operatorname{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$. *Platí* $\lim_{x \to 0_+} \operatorname{cotg} x = \infty$ *a* $\lim_{x \to \pi_-} \operatorname{cotg} x = -\infty$.

Definice. Cyklometrické funkce arkussinus, **arkuskosinus**, **arkustangens** a **arkuskotangens** značíme arcsin, arccos, arctg a arccotg a definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}; \\ \arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}; \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}; \\ \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Věta 5.21 (vlastnosti cyklometrických funkcí)**.** (a) *Funkce* arcsin *je spojitá, lichá a rostoucí na* $[-1, 1]$. *Platí* $R(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$*, a* $\arcsin'_+(-1) = \arcsin'_-(1) = \infty$.

(b) *Funkce* arccos *je spojitá a klesající na* $[-1, 1]$. *Platí* $R(\arccos) = [0, \pi]$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$*, a* $\arccos'_+(-1) = \arccos'_-(1) = -\infty$.

(c) *Funkce* arctg *je spojitá, lichá a rostoucí na* $\mathbb{R}$. *Platí* $R(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *a* $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(d) *Funkce* arccotg *je spojitá a klesající na* $\mathbb{R}$. *Platí* $R(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$ *a* $\operatorname{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Definice. Funkce **hyperbolický sinus**, **hyperbolický kosinus**, **hyperbolický tangens** a **hyperbolický kotangens** značíme sinh, cosh, tgh a cotgh a definujeme předpisy

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\
\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\
\operatorname{tgh}(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh x}, \quad x \in \mathbb{R}; \\
\operatorname{cotgh}(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

5.4. **Konvexní a konkávní funkce, inflexní body.**

Definice. Nechť I je interval a nechť f je reálná funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I \; \forall \lambda \in [0,1] : \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **konkávní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I \; \forall \lambda \in [0,1] : \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **ryze konvexní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I, x \neq y \; \forall \lambda \in (0,1) : \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **ryze konkávní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I, x \neq y \; \forall \lambda \in (0,1) : \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Příklady.
- funkce exp je ryze konvexní na $\mathbb{R}$,
- funkce $x \mapsto x^n$ je ryze konvexní na $\mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$ sudé,
- funkce $x \mapsto x^n$ je ryze konvexní na $[0, \infty)$ a ryze konkávní na $(-\infty, 0]$ pro $n \in \mathbb{N}$ liché,
- funkce $x \mapsto \sqrt{x}$ je ryze konkávní na $[0, \infty)$,
- funkce log je ryze konkávní na $(0, \infty)$,
- funkce $x \mapsto ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, je konvexní i konkávní na $\mathbb{R}$,
- funkce $x \mapsto |x|$ je konvexní na $\mathbb{R}$,
- funkce sign je konkávní na $[0, \infty)$ a konvexní na $(-\infty, 0]$,
- funkce $x \mapsto |\arcsin x|$ je konvexní na $[-1, 1]$.

Lemma 5.22 (ekvivalentní podmínky pro konvexitu)**.** *Nechť I je interval a nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) *f je konvexní na I,*

(ii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\; x_1 < x_2 < x_3 : \; \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$

(iii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\; x_1 < x_2 < x_3 : \; \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$

(iv) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\; x_1 < x_2 < x_3 : \; \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$

Analogické charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Věta 5.23 (vztah konvexity a existence jednostranných derivací)**.** *Nechť I je nedegenerovaný interval, f je konvexní funkce na I a $a \in \operatorname{Int} I$. Potom existují vlastní jednostranné derivace $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$. Navíc platí $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.*

Poznámky. (a) Jednostranné derivace konvexní funkce f na intervalu I se nemusí ve vnitřním bodě a intervalu I rovnat, a nemusí tedy existovat $f'(a)$. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$ a bod $x = 0$.

(b) Podobně jako v důkazu Věty 5.23 lze odvodit existenci jednostranných derivací konvexní funkce v krajních bodech definičního intervalu. Tyto derivace ale mohou být nevlastní, např. funkce sign uvažovaná na intervalu $(-1, 0]$.

Věta 5.24 (vztah konvexity a spojitosti). *Nechť I je interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} I$ a nechť f je konvexní na I. Potom je f spojitá v a.*

Poznámka. Spojitost konvexní funkce ve vnitřních bodech intervalu nelze rozšířit na krajní body. Příkladem je funkce sign, která je na intervalu $(-1, 0]$ konvexní, ale ne spojitá.

konec 24. přednášky (10.01.2017)

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Druhou derivaci funkce f značíme symbolem f''.

Věta 5.25 (vztah druhé derivace a konvexity). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Nechť f má vlastní druhou derivaci v každém bodě $x \in (a,b)$.*

(a) *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak je f ryze konvexní na (a,b);*
(b) *je-li $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak je f konvexní na (a,b);*
(c) *je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak je f ryze konkávní na (a,b);*
(d) *je-li $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak je f konkávní na (a,b).*

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje vlastní $f'(a)$, pak **tečnou ke grafu funkce f v bodě** a nazýváme afinní funkci

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi** (neboli že a je **inflexním bodem** funkce f), jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že buď

$$\begin{aligned} \forall x \in P_-(a,\delta):\ & f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a} \\ \forall x \in P_+(a,\delta):\ & f(x) < f(a) + f'(a)(x-a), \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \forall x \in P_-(a,\delta):\ & f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a} \\ \forall x \in P_+(a,\delta):\ & f(x) > f(a) + f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

Věta 5.26 (nutná podmínka pro inflexi). *Nechť a je inflexním bodem funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje, nebo $f''(a) = 0$.*

Poznámka. Nutná podmínka uvedená ve Větě 5.26 není postačující, jinými slovy, rovnost $f''(a) = 0$ ještě nezaručuje, že a je inflexním bodem f. Příkladem je funkce $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, a bod $a = 0$. Pak $f''(a) = 0$, ale f nemá v a inflexi.

Věta 5.27 (postačující podmínka pro inflexi). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, f má spojitou první derivaci na (a,b) a $z \in (a,b)$. Nechť platí*

$$\forall x \in (a,z):\ f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (z,b):\ f''(x) < 0.$$

Pak f má inflexi v bodě z.

Poznámka. Předpoklad spojité první derivace ve Větě 5.27 není nezbytný a lze jej nahradit například předpokladem existence vlastní $f'(z)$, důkaz je však složitější.

Poznámka. Obdobné tvrzení jako ve Větě 5.27 platí i v případě, kdy platí

$$\forall x \in (a,z): \ f''(x) < 0, \quad \text{a} \quad \forall x \in (z,b): \ f''(x) > 0.$$

Poznámka. Postačující podmínka uvedená ve Větě 5.27 není pro existenci inflexe nutná, jak ukazuje následující příklad. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak f má v 0 inflexi, ale neexistuje okolí 0, kde by byly splněny předpoklady Věty 5.27.

Definice. Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ **asymptotu** $ax + b$, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0.$$

Obdobně definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

Věta 5.28 (tvar asymptoty). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Pak má funkce f v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Obdobné tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Příklady. (a) Funkce $e^x + 1$ má v $-\infty$ asymptotu $x \mapsto 1$ (konstantní) a v bodě ∞ asymptotu nemá, neboť $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{x}$ je nevlastní.

(b) Funkce $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ má v bodě ∞ asymptotu $x \mapsto \sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) Funkce tangens nemá v bodě ∞ asymptotu, protože není definovaná na žádném jeho okolí.

(d) Funkce sinus nemá v bodě ∞ asymptotu. Platí $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, avšak $\lim_{x\to\infty}(f(x) - 0 \cdot x)$ neexistuje.

Poznámka. Při *vyšetřování průběhu funkce* získáváme zejména následující informace:

- definiční obor, spojitost, limity v krajních bodech a limity v bodech nespojitosti,
- eventuální speciální vlastnosti, např. sudost, lichost nebo periodicita,
- definiční obor derivace, derivace a eventuální jednostranné derivace,
- intervaly monotonie a extrémy (lokální i globální),
- obor hodnot,
- definiční obor druhé derivace, druhá derivace, konvexita a konkávnost, inflexní body,
- asymptoty,
- náčrt grafu funkce.

konec 25. přednášky (12.01.2017)

konec zimního semestru 2016–2017