MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 - ZIMNÍ SEMESTR 2016–2017
POČETNÍ PŘÍKLADY KE CVIČENÍ

LUBOŠ PICK

Obsah

1. Opakování středoškolské látky, logika, matematická indukce

Příklad 1.1. Řešte následující nerovnice v $\mathbb{R}$:

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0, \qquad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

Příklad 1.2. Nakreslete graf funkce $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$.

Příklad 1.3. Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$.

Příklad 1.4. Dokažte následující formulky:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$

Příklad 1.5. (i) Dokažte, že $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$.

(ii) Pro která $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$?

(iii) Dokažte pomocí vhodného protipříkladu, že neplatí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad n^2+n+41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

(iv) Nyní dokažte, že neplatí ani výrok

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n < 41: \quad n^2+n+41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

Příklad 1.6. Dokažte, že následující vztahy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Příklad 1.7. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

Příklad 1.8. Dokažte pro a, $b \in \mathbb{R}$: $|a+b| \le |a| + |b|, \qquad ||a| - |b|| \le |a-b|$.

Příklad 1.9. (i) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \le 2^n$. Dokažte!
(ii) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$, platí $n^2 \le 2^n$. Dokažte!

Příklad 1.10. Řešte rovnice:

$$\sin 2x = \sin x, \quad 2\sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2+1) = 2\log(3-x).$$

Příklad 1.11. Sečtěte: $\sin x + \dots + \sin nx$.

Příklad 1.12.

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{2n}.$$

Příklad 1.13. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, platí:

$$(n+1)^n \le n^{n+1}.$$

Výsledky

- Příklad 1.1: $\langle 4, 6\rangle$; $\langle 1, 2\rangle$; $(-6, -3) \cup \Big((-1-\sqrt{13})/2, (-1+\sqrt{13})/2\Big)$
- Příklad 1.4: Použijte matematickou indukci.
- Příklad 2.1: Všechny výroky jsou pravdivé.
- Příklad 2.2: (i) B je padouch a C je poctivec; (ii) oba jsou poctivci; (iii) oba jsou padouši; (iv) ano.
- Příklad 1.5: (ii) $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$; (iii) $n = 41$; (iv) $n = 40$.
- Příklad 1.7: Použijeme-li Moivreovu větu nebo součtové vzorce dostaneme:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x,$$
$$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

- Příklad 1.8: První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první.
- Příklad 1.9: Použijte matematickou indukci.
- Příklad 1.10: 1. rovnice: $x = k\pi$ nebo $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$; 2. rovnice: $x = 2k\pi$ nebo $x = \pi - \arcsin(4/5) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$; 3. rovnice: $4/3$
- Příklad 1.11: Vhodným použitím Moivreovy věty a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme:

$$\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(x/2)} \qquad \text{pro } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Pokud $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak je součet roven nule.
- Příklad 1.12: Použijte binomickou větu na výrazy $(1+1)^{2n}$ a $(1-1)^{2n}$. Výsledek: 2^{2n-1}.
- Příklad 1.13: Použijte matematickou indukci nebo aplikujte binomickou větu na $(n+1)^n$ a pak odhadněte členy binomického rozvoje.

2. Výroky, kvantifikátory, zobrazení, supremum a infimum

Příklad 2.1. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}:\ (z > x \implies y < z)$$
$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: (x \in (a, a+\varepsilon) \iff |x-\alpha| < 1);$$
$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}: (x \in (a, a+\varepsilon) \iff |x-\alpha| < 1).$$

Příklad 2.2. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů (podle R. Smullyana): (i) Jdete kolem tří obyvatel ostrova a zeptáte se: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně, tak se zeptáte B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je mezi námi jediný poctivec“. Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?

(ii) A řekne: „Buď jsem já padouch a nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(iii) A řekne: „Já jsem padouch, ale B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(iv) A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se zeptáte C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co odpoví C?

Příklad 2.3. Zjistěte, zda následující množiny mají supremum a infimum. Pokud ano, určete je.

- $A = \left\{-\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $B = \left\{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $C = \left\{n^{(-1)^n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $D = \left\{q \in \mathbb{Q};\ q < \sqrt{3}\right\}$,
- $E = \{\sin x \cos x;\ x \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 2.4. Charakterizujte zobrazení $f: M \to L$, pro která platí

- $\forall A \subset M: f^{-1}(f(A)) = A$,
- $\forall B \subset L: f(f^{-1}(B)) = B$.

Příklad 2.5. Nalezněte suprema a infima následujících množin (pokud existují):

- $A = \{p/(p+q);\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\}$,
- $B = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$,
- $C = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$,
- $D = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$,
- $E = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Výsledky

- Příklad 2.1: Všechny výroky jsou pravdivé.
- Příklad 2.2: (i) B je padouch a C je poctivec;
  (ii) oba jsou poctivci;
  (iii) oba jsou padouši;
  (iv) ano.
- Příklad 2.3: $\sup A = 0$, $\inf A = -1$; $\sup B = \frac{3}{2}$, $\inf B = 0$; $\sup C$ neexistuje, $\inf C = 0$; $\sup D = \sqrt{3}$, $\inf D$ neexistuje; $\sup E = \frac{1}{2}$, $\inf E = -\frac{1}{2}$.

3. Limita posloupnosti reálných čísel

Příklad 3.1. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}.$$

Příklad 3.2. Spočtěte limity následujících posloupností:

$$\left\{\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right\}, \qquad \left\{\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\right\}, \qquad \left\{\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}\right\}.$$

Příklad 3.3. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+4^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}.$$

Příklad 3.4. Vypočtěte: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}} \right)$ pro $a > b > 0$.

Příklad 3.5. Spočtěte limity:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}.$$

Příklad 3.6. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}.$$

Příklad 3.7. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Příklad 3.8. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (n^2+\sin(n+1)) \left(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\right).$$

Příklad 3.9. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n} \right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

Výsledky

- Příklad 3.1: 0, 2, 2
- Příklad 3.2: $-1/2$, $1/3$, $1/4$
- Příklad 3.3: 1-4. 0, 4, 0, 0

  5. Víme, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^k} = +\infty$. Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

  $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \; n^2 \leq n^3 \leq n^4 \leq 2^n \leq 3^n \leq 4^n.$$

  Platí tedy

  $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \; 4 \leq \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n} \leq 4\sqrt[n]{6}.$$

  Víme, že platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} = 1$ a proto podle věty o dvou policajtech dostáváme

  $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n} = 4.$$

  6. 2/3
- Příklad 3.4: $1/a$

- Příklad 3.5:1.-4. 0, 0, 0, 1

  5. Nejprve upravíme výraz, jehož limitu máme spočítat.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}\\
&=\frac{(n^3+n)^{\frac{1}{3}}-(n^3+1)^{\frac{1}{3}}}{(n^3+2n)^{\frac{1}{3}}-(n^3+n)^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{(n^3+n)^{\frac{2}{3}}+(n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}}+(n^3+1)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+n)^{\frac{2}{3}}+(n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}}+(n^3+1)^{\frac{2}{3}}}\cdot\\
&\cdot\frac{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}}+(n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}}+(n^3+1)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}}+(n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}}+(n^3+1)^{\frac{2}{3}}}\\
&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}}+(n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}}+(n^3+n)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+n)^{\frac{2}{3}}+(n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}}+(n^3+1)^{\frac{2}{3}}}\\
&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{(1+\frac{2}{n^2})^{\frac{2}{3}}+(1+\frac{2}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}}+(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}}+(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}}+(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}
$$

  Odtud již vyplývá, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}=1.$

- Příklad 3.6: 1. Limita neexistuje.

  2. Spočítejme nejprve tuto limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}.$$

  Platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{1+\sqrt{\frac{\sqrt[n]{n}}{n^6}}}=1.$$

  Zde jsme využili větu o aritmetice limit a $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Z výše uvedeného a věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^3\sqrt[2n]{2n}}{(2n)^3+\sqrt[4n]{2n}}=1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty}-\frac{(2n+1)^3\sqrt[2n+1]{2n+1}}{(2n+1)^3+\sqrt[4n+2]{2n+1}}=-1.$$

  To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}$ neexistuje.

- Příklad 3.7: Platí:

$$
\begin{aligned}
(n+4)^{100}-(n+3)^{100}&=\sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}4^j-\sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}3^j\\
&=\sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}(4^j-3^j)=100n^{99}+P_1(n);\\
(n+2)^{100}-n^{100}&=200n^{99}+P_2(n),
\end{aligned}
$$

  kde $P_1,\ P_2$ jsou polynomy stupně ostře menšího než 99. Pro tyto polynomy tedy platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_1(n)}{n^{99}}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{P_2(n)}{n^{99}}=0.$$

  Dostáváme tak:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}=\lim_{n\to\infty}\frac{100+\frac{P_1(n)}{n^{99}}}{200+\frac{P_2(n)}{n^{99}}}=1/2.$$

- Příklad 3.8: Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\\
&=\lim_{n\to+\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\cdot\frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin(n+1)}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}.
\end{aligned}$$

Víme, že platí:
(1) $\forall n\in\mathbb{N}:\ |\sin(n+1)|\le 1$,
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.
Z (1) a (2) plyne $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)}{n^2}=0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot\left(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

- Příklad 3.9: 3, 1/2

4. Vyšetřování konvergence číselných řad s nezápornými členy

Příklad 4.1. Zjistěte, zda konvergují (divergují) řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}.$$

Příklad 4.2. Zjistěte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}.$$

Příklad 4.3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n^2}},\qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{2^n-2n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}).$$

Příklad 4.4. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{4^n+5^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{(2n^2+5)^2}.$$

Příklad 4.5. Určete pro která $z\in\mathbb{R}$ následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3 z^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}z^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}z^n.$$

Příklad 4.6. Určete pro která $z\in\mathbb{R}$ následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Výsledky

- Příklad 4.1: Diverguje, diverguje, konverguje, konverguje.
- Příklad 4.2: Konverguje, diverguje, konverguje.
- Příklad 4.3, 1): Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.
- Příklad 4.3, 2):

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ platí $2^n > 2n$, a proto jsou všechny členy uvažované řady jsou kladné. Můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{3}{2^n - 2n},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{2^{n+1}-2(n+1)}}{\frac{3}{2^n-2n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{n}{2^{n-1}}}{2-\frac{n+1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.
- Příklad 4.3, 3): Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n \leq 3^n$, a proto má uvažovaná řada pouze kladné členy. Zkusme použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}}{\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}\right)}{\frac{2^n}{3^n}\left(\frac{1+(-1)^n\frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n\frac{n}{3^n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}}{\frac{1+(-1)^n\frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n\frac{n}{3^n}}} = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Užili jsme následujících faktů:
(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$, kde $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$;
(2) posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená.
Z (1) a (2) vyplývá:

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{n}{3^n} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}} = 0.$$

Zbytek vyplývá z věty o aritmetice limit. Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria.
- Příklad 4.3, 4): Označme $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.
- Příklad 4.4, 1): Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{5} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

- Příklad 4.4, 2): Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}}\cdot\frac{4^n+5^n}{3^n+4^n}\\ =&\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}+4}{\frac{4^{n+1}}{5^n}+5}\cdot\frac{\frac{4^n}{5^n}+1}{\frac{3^n}{4^n}+1}=\frac{4}{5}<1.\end{aligned}$$
Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.
- Příklad 4.4, 3): Zkoumaná řada je absolutně konvergentní, a tedy konvergentní.
- Příklad 4.5: $(-1,1)$, $\mathbb{R}$, $\langle -1/2, 1/2\rangle$, $(-3,3)$.
- Příklad 4.6: $(-1,1\rangle$, $\langle -1,1\rangle$, $\langle -1,1)$.

5. Vyšetřování absolutní a neabsolutní konvergence číselných řad s obecnými členy

Příklad 5.1. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{3}-1\right),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^{58}n}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{4};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n/3)}{\sqrt{n+1}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n^2)\left(\sqrt{n^6+n}-n^3\right).$$

Příklad 5.2. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\log n]}}{n};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}.$$

Příklad 5.3. Vyšetřete charakter konvergence řad v závislosti na parametru:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n)}{n^x},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^q},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{\log a}}{n},\qquad x\geq 0,\ q\in\mathbb{R},\ a>1.$$

Příklad 5.4. Nalezněte součet řad

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\quad |x|<1,$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n,\quad$ kde $\displaystyle c_n=\sum_{k=1}^{n}x^k y^{n-k},\quad |x|<1,\ |y|<1,$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n,\quad$ kde $\displaystyle c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}.$

Výsledky.
- Cvičení 5.1: (i), (ii), (iii) konvergují neabsolutně, (iv) konverguje absolutně;
- Cvičení 5.2: (i) konverguje neabsolutně, (ii) diverguje, (iii) konverguje neabsolutně, (iv) konverguje neabsolutně;
- Cvičení 5.3: (i) diverguje pro $x=0$, konverguje neabsolutně pro $0<x\leq 1$, konverguje absolutně pro $x>1$;
  (ii) diverguje pro $q\leq\frac{1}{2}$, konverguje neabsolutně pro $\frac{1}{2}<q\leq 1$, konverguje absolutně pro $q>1$;
  (iii) konverguje neabsolutně pro každé $a>1$;
- Cvičení 5.4: (i) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$, (ii) $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$, (iii) $e-1$.

6. Limita funkce

Příklad 6.1. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$$

Příklad 6.2. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\quad (n\in\mathbb{N}),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

Příklad 6.3. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+7x}-x\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0+}(e^x-1)^{\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{\sqrt[3]{x^2}}}.$$

Příklad 6.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2},\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\,2^x}{1+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}},\qquad \lim_{x\to\infty}\log(1+2^x)\log\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

Příklad 6.5. Spočtěte limity následujících funkcí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Příklad 6.6. Spočtěte limity následujících funkcí a posloupností

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n,\qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1),\qquad \lim_{x\to 0+}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}.$$

Příklad 6.7. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x},\qquad \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$$

Příklad 6.8. Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

Výsledky

- Příklad 6.1: 2, 1/2, −1
- Příklad 6.2: −1/16, 3/2, 1/n, 1/4
- Příklad 6.3: 7/3, −1/2, 0
- Příklad 6.4: 0, 1/e, 2/3, log 8
- Příklad 6.5:

2. Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Víme, že

(i) $\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1$,
(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
(iii) $\lim_{x\to 0}\sin x=0$,
(iv) sin je prostý na $\langle-\pi/2,\pi/2\rangle$,
(v) $\sqrt{\ }$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}=1$.

Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)=1\cdot 1\cdot 2=2.$$

2. Pišme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg}x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg}x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}x}.
\end{aligned}$$

Víme, že $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}x}=1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}-\frac{e^{\arcsin x}-1}{\arcsin x}\cdot\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

Použili jsme

- $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$,
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
- $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$,
- sin je prostá funkce na jistém okolí 0,
- arcsin je prostá funkce,
- $x\mapsto 2x$ je prostá funkce,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
- větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg}x}=1.$$

3. Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$\frac{e^x - 2\sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - 2\sin(\pi/6 + x)}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right). \qquad (\star)$$

Víme, že

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,
(4) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

Z $(\star)$, (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{3}.$$

- Příklad 6.6:

1. Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}\right)^x.$$

Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}\right)^x$$

$$= \exp\left(\log\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}\right)^x\right)\right)$$

$$= \exp\left(x\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3} + \sqrt{x^4 + 1}}{2x^3 - 1}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{2 - \frac{1}{x^3}}\right). \qquad (\star)$$

Dále platí:

- $\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$,
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^3} + \sqrt{x^4+1}}{2x^3 - 1}$
  $= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2x - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$,
- funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}$ je na jistém okolí ∞ různá od nuly,
- exp je spojitá na $\mathbb{R}$.

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}} = 1. \qquad (\star\star)$$

Dále máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}} = 1. \qquad (\star\star\star)$$

Z $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ a (4) plyne

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x = e^1 = e$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n = e.$$

2. Místo limity posloupnosti $\{n(\sqrt[n]{2}-1)\}_{n=1}^{\infty}$ počítejme limitu funkce $f(x) = x(2^{\frac{1}{x}}-1)$ v ∞. Pokud totiž ukážeme, že $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, pak podle Heineho věty také $\lim_{n\to\infty} f(n) = A$. Platí

$$\lim_{x\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{\log 2}{x}}-1}{\frac{\log 2}{x}} \cdot \log 2 = \log 2.$$

Užili jsme

– $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$,
– $\lim_{x\to\infty} \frac{\log 2}{x} = 0$,
– $\frac{\log 2}{x} \neq 0$ pro každé $x > 0$,
– větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1).

3. 1.

- Příklad 6.7: $1/e$, $1/2$, $4/3$
- Příklad 6.8: 0

7. Derivace funkce, l'Hospitalovo pravidlo, věty o střední hodnotě

Příklad 7.1. Spočtěte:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\tfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right). \tag{1}$$

Příklad 7.2. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to 0+} (\cos(\sqrt{x}))^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}, \qquad \lim_{x\to\pm 0} \frac{x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \tag{2}$$

Příklad 7.3. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & \text{pro} \quad x \neq 0; \\ \frac{1}{2} & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Určete, zda má funkce f derivaci v bodě 0 a pokud ano, spočtěte ji.

Příklad 7.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x - 1}, \qquad \lim_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}; \ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}, \quad a > 0.$$

Příklad 7.5. Spočtěte limity následujících funkcí:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2\operatorname{arctg} x}\right)^x. \tag{3}$$

Příklad 7.6. Spočtěte derivace (i jednostranné, pokud oboustranná neexistuje) následujících funkcí:

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z},\\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

$$f(x)=\max\{\min\{\cos x,(1/2)\},(-1/2)\};$$

$$f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}};$$

$$f(x)=\arccos\frac{1}{1+x^2};$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x\neq 0,\\ 0 & \text{pro } x=0;\end{cases}$$

$$f(x)=x^{(x^x)}, \text{ pro } x>0;$$

$$f(x)=\max\{x+4\operatorname{arctg}(\sin x),x\}.$$

Příklad 7.7. Nalezněte $A,\ B\in\mathbb{R}$, tak aby na $\mathbb{R}$ platil vztah

$$\left(A+x-\operatorname{arctg} x+\left(\frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x\right)\left(\log\left(1+x^2\right)-1\right)\right)' = (Ax+B)(\operatorname{arctg} x)\log(1+x^2).$$

Příklad 7.8. Najděte $A\in\mathbb{R}$, aby na $(0,+\infty)$ platil vztah

$$\left(\log\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right)+\operatorname{arctg} x+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)' = A\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

Příklad 7.9. U následujících funkcí spočtěte derivace (i jednostranné, pokud neexistuje oboustranná):

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \qquad x^2\exp(-|x-1|), \qquad \frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}.$$

Příklad 7.10. Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje.

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

$$f(x)=\max\{\min\{\cos x,(1/2)\},(-1/2)\};$$

$$f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}};$$

$$f(x)=\arccos\frac{1}{1+x^2};$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x\neq 0,\\ 0 & \text{pro } x=0;\end{cases}$$

$$f(x)=x^{(x^x)}, \text{ pro } x>0;$$

$$f(x)=\max\{x+4\operatorname{arctg}(\sin x),x\}.$$

Příklad 7.11. Pomocí L'Hospitalova pravidla určete následující limity:

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Příklad 7.12. Pro $a > 0$, $a \neq 1$ určete

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a-1)} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Příklad 7.13. Je možné použít L'Hospitalova pravidla pro určení následujících limit?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}; \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \sin 2x + 1}{(2x + \sin 2x)(\sin x + 3)^2}; \qquad \lim_{x\to 0} \left(2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \right)^x; \qquad \lim_{x\to 0} \left(1 + xe^{-\frac{1}{x^2}} \sin\frac{1}{x^4} \right)^{e^{\frac{}{x}}}$$

Příklad 7.14. Má následující funkce derivaci v nule?

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x\log 2} - \frac{1}{2^x - 1}, & x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Příklad 7.15. Dokažte, že každá z následujících dvou rovnic má právě jeden kořen.

$$x^{13} + 7x^3 - 5 = 0.$$
$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Výsledky

- Příklad 7.10:
  - Pro funkci f platí

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3\rangle + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi,\ k\ \in \mathbb{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3\rangle + 2k\pi, k\ \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\ \pi,\ k\ \in \mathbb{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi,\ k\ \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$\begin{aligned} f'_+(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_-(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi-} 0 = 0, \\ f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \\ f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,\ k\ \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

  - Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1 - e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2} 2x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = e^{-x^2} \frac{x}{\sqrt{1 - e^{x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

* $\lim_{y\to 0+} \frac{e^y-1}{y} = 1$,
* $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$,
* $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
* $\sqrt{\ }$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-x^2}-1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

– Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\operatorname{sign} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sign} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2},$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{2\operatorname{sign} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.$$

V 0 tedy derivace neexistuje.

– Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

neboť $\lim_{x\to 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

– Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}\left(1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\left(x^{(x^x)}\right)' = \left(e^{x^x\log x}\right)' = e^{x^x\log x}\left((x^x)'\cdot\log x + x^x\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$= x^{(x^x)}\left(x^x(\log x+1)\log x + x^{x-1}\right), \qquad x > 0.$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

– Pro hodnoty funkce f platí
$$f(x)=\begin{cases} x+4\operatorname{arctg}(\sin x), & x\in(2k\pi,(2k+1)\pi),\ k\in\mathbb{Z},\\ x, & x\in\langle(2k+1)\pi,(2k+2)\pi\rangle,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$
Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$:
$$f'(x)=\begin{cases} 1+4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, & x\in(2k\pi,(2k+1)\pi),\ k\in\mathbb{Z},\\ 1, & x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi),\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$
Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:
$$\begin{aligned} f'_+(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi+}\left(1+4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right)=5,\\ f'_-(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi-} 1 = 1,\\ f'_-((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to(2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x\to(2k+1)\pi-}\left(1+4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right)=-3,\\ f'_+((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to(2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x\to(2k+1)\pi+} 1 = 1.\end{aligned}$$
Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, nemá derivaci.

8. Průběh funkce

Příklad 8.1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí
$$\begin{aligned} f(x)&=x^{\frac{1}{x}};\\ f(x)&=\log_x e;\\ f(x)&=\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|;\\ f(x)&=(\sin x)^{\cos x};\\ f(x)&=x-\sqrt{x^2-1}.\end{aligned}$$

Příklad 8.2. Vyšetřete průběhy funkcí (v prvních dvou příkladech nemusíte vyšetřovat konvexitu)
$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{\cos x}{\cos 2x}\\ f(x)&=(\cos x)e^{\frac{2}{3}\sin x},\\ f(x)&=(\log|x|)^3-3\log|x|,\end{aligned}$$

Příklad 8.3. Vyšetřete průběhy funkcí:
$$\begin{aligned} &\sin^3 x+\cos^2 x,\\ &\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},\\ &\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-1},\end{aligned}$$