MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 - LETNÍ SEMESTR 2016–2017
PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

Obsah

6. Taylorův polynom

6.1. Základní vlastnosti.

Definice. Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.**

Úmluva. V dalším textu budeme symbol tvaru $(x-a)^0$ chápat jako 1, a to i tehdy, jestliže $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací“ funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f.

Poznámky. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$.

(a) Potom pro každé $j \in \{0, \dots, n-1\}$ existuje vlastní $f^{(j)}$ na nějakém okolí bodu a. Speciálně odtud vyplývá, že Taylorův polynom $T_n^{f,a}$ je dobře definován.

(b) Zřejmě platí $\operatorname{st}(T_n^{f,a}) \leq n$. Tato nerovnost ovšem může být ostrá. To nastává právě tehdy, když $f^{(n)}(a) = 0$. Položíme-li například $f = \sin$, $a = 0$ a $n = 2$, dostaneme

$$T_2^{\sin,0}(x) = \sin 0 + \sin'(0)x + \frac{\sin''(0)}{2}x^2 = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

takže $\operatorname{st}(T_2^{\sin,0}) = 1$.

(c) Označme $T = T_n^{f,a}$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
T'(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1}, \\
T''(x) &= f''(a) + f'''(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(n-2)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2}, \\
&\vdots \\
T^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a), \\
T^{(n)}(x) &= f^{(n)}(a).
\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = a$, dostaneme vztahy

$$T'(a) = f'(a),\ T''(a) = f''(a), \dots,\ T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

(d) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(T_n^{f,a})'(x) = T_{n-1}^{f',a}(x)$.

Věta 6.1 (Peanův tvar zbytku). *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť má funkce f v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Lemma 6.2 (příliš dobrá aproximace polynomu). *Nechť Q je polynom, $\operatorname{st} Q \leq n$, $a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.*

Věta 6.3 (jednoznačnost Taylorova polynomu). *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci a P je polynom stupně nejvýše n splňující*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Věta 6.4 (obecný tvar zbytku). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$ a že φ je spojitá funkce na $[a, x]$ mající v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Poznámky. (a) Věta 6.4 platí i v případě $x < a$, důkaz je zcela stejný.

(b) Předpoklady Věty 6.4 lze mírně oslabit. Stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a, x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje (vlastní či nevlastní) na (a, x).

konec 1. přednášky (23.02.2017)

Věta 6.5 (Lagrangeův tvar zbytku). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Věta 6.6 (Cauchyův tvar zbytku). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

6.2. **Symbol malé o.**

Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé o od** g (píšeme $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poznámky. (a) Výraz „$f(x) = o\big(g(x)\big),\ x \to a$“ chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi a nelze s ním pracovat samostatně.

(b) Tvrzení věty o Peanově tvaru zbytku (Věta 6.1) je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o\big((x-a)^n\big), x \to a.$$

(c) Symbol $f(x) = o(1)$, $x \to a$ podle definice znamená, že $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

(d) Symbol malé o lze zřejmým způsobem použít i na jednostranné limity.

Příklady. Platí

$$\begin{aligned} x^3 &= o(x^2),\ x \to 0, \\ x^2 &= o(x^3),\ x \to \infty, \\ x^2 &= o(e^x),\ x \to \infty, \\ 1 - x &= o(\arccos x),\ x \to 1_-, \end{aligned}$$

Věta 6.7 (aritmetika malého o). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*

(a) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(b) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(c) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(d) *Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(e) *Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(f) *Jestliže $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \le n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big)$, $x \to a$.*

Věta 6.8 (malé o složené funkce). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))$, $x \to a$.

6.3. **Taylorovy řady elementárních funkcí.**

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Poznámka. Rovnost

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nemusí platit ani pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která řada konverguje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $f^{(n)}(0) = 0$, takže Taylorova řada této funkce má všechny koeficienty rovny nule. Tato řada tedy konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, a to ke konstantně nulové funkci, ačkoli $f(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$.

V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

konec 2. přednášky (24.02.2017)

Věta 6.9 (Taylorovy řady elementárních funkcí). *Platí (například) následující vztahy mezi elementárními funkcemi a jejich Taylorovými řadami (středem Taylorovy řady je ve všech případech bod $a = 0$):*

(a) $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,

(c) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,

(d) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$ pro každé $x \in (-1, 1]$,

(e) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots$ pro každé $x \in (-1, 1)$,

kde pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ značíme $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ a $\binom{\alpha}{0} = 1$,

(f) $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$ pro každé $x \in [-1, 1]$.

konec 3. přednášky (02.03.2017)

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sin x + \frac{x^3}{2}}{x^5}.$$

Věta 6.10 (iracionalita čísla e). *Číslo e je iracionální.*

7. Mocninné řady

7.1. Základní vlastnosti.

Definice. **Mocninnou řadou o středu** $a \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$
kde $a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Každá mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konverguje pro $x = a$.

Věta 7.1 (o poloměru konvergence mocninné řady). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\varrho \in \mathbb{R}^*$ takový, že*

- *pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \varrho$, je uvedená řada absolutně konvergentní,*
- *pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| > \varrho$, je uvedená řada divergentní.*

Prvek ϱ splňuje
$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$
kde výrazem $\frac{1}{0}$ rozumíme ∞ a výrazem $\frac{1}{\infty}$ rozumíme 0. Prvek ϱ nazýváme ***poloměrem konvergence*** *uvedené řady.*

Příklady. Spočtěte poloměry konvergence pro následující mocninné řady:
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.
Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ uvedené řady konvergují.

Poznámka. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ je mocninná řada a $\varrho \in \mathbb{R}^*$ je její poloměr konvergence. Potom nastane právě jedna z následujících tří možností:

- buď $\varrho = 0$ a řada konverguje pouze pro $x = a$,
- nebo $\varrho = \infty$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- nebo $\varrho \in (0, \infty)$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \varrho$, diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| > \varrho$, a může nebo nemusí konvergovat pro $x = a + \varrho$ a pro $x = a - \varrho$.

7.2. Derivace mocninné řady.

Lemma 7.2. *Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ a $h \in (-\delta, \delta)$ platí*
$$\left|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\right| \le h^2 \delta^{-2} (|x| + \delta)^n.$$

konec 4. přednášky (03.03.2017)

Věta 7.3 (derivace mocninné řady). *Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Potom poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-a| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Potom má funkce f v každém takovém bodě vlastní derivaci a platí $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$.*

Věta 7.4 (vztah mocninné řady a Taylorova polynomu). *Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-a| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Potom*

(a) *pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \varrho$, existuje vlastní $f^{(k)}(x)$ a platí*
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x-a)^{n-k},$$
(b) *speciálně platí $f^{(k)}(a) = k!\, a_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*
(c) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí $T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$.*

Poznámka. Při derivování mocninné řady člen po členu se zachovává poloměr konvergence, nemusí se však zachovat konvergence v některém z bodů $a \pm \varrho$. Označíme-li například $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ pro $x \in (-1,1)$, pak $f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ a $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2}$ pro $x \in (-1,1)$, poloměr konvergence všech tří řad je roven 1, ale řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ je konvergentní pro $x \in [-1,1]$, řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ je konvergentní pouze pro $x \in [-1,1)$ a řada $\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2}$ je konvergentní dokonce pouze pro $x \in (-1,1)$.

7.3. **Abelova věta.**

Lemma 7.5. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada a nechť $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Potom pro každé $x \in (-1,1)$ jsou řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ absolutně konvergentní a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

konec 5. přednášky (09.03.2017)

Věta 7.6 (Abelova). *Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ a $\varrho \in (0,\infty)$.*

(a) *Jestliže je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konvergentní, potom*

$$\lim_{x \to (a+\varrho)-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

(b) *Jestliže je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\varrho)^n$ konvergentní, potom*

$$\lim_{x \to (a-\varrho)+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\varrho)^n.$$

8. Primitivní funkce

8.1. **Základní vlastnosti.**

Definice. Nechť funkce f je definovaná na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkcí k f na** I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 8.1 (jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu). *Nechť funkce F a G jsou primitivní funkce k funkci f na neprázdném otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

Věta 8.2 (vztah spojitosti a existence primitivní funkce). *Nechť f je spojitá funkce na neprázdném otevřeném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Věta 8.3 (Darbouxova vlastnost derivace). *Nechť funkce f má na neprázdném otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak má f na I **Darbouxovu vlastnost**, tj. $f(J)$ je interval, kdykoli $J \subset I$ je interval.*

konec 6. přednášky (10.03.2017)

Příklad. Funkce sign nemá primitivní funkci na žádném otevřeném intervalu, který obsahuje nulu.

Věta 8.4 (linearita primitivní funkce). *Nechť funkce f má na neprázdném otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom je funkce $\alpha F + \beta G$ primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.*

Poznámka. Nechť I je neprázdný otevřený interval a nechť f je funkce definovaná alespoň na I. Potom platí následující implikace:

$$f \text{ je spojitá} \Rightarrow \; f \text{ má primitivní funkci} \;\Rightarrow\; f \text{ má Darbouxovu vlastnost.}$$

Značení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na neprázdném otevřeném intervalu I, značíme symbolem

$$\int f(x)\,dx \overset{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Symbol $\int f(x)\,dx$ označuje množinu všech primitivních funkcí na k f na I.

Věta 8.5 (první věta o substituci). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Příklad. Nalezněte primitivní funkci $\int \sin^4 t \cos t\,dt$.

Věta 8.6 (druhá věta o substituci). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,dx \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Příklad. Spočtěte primitivní funkci $\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$ na intervalu $(-1, 1)$.

Věta 8.7 (integrace per partes). *Nechť I je neprázdný otevřený interval a nechť f je spojitá funkce na I. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na I a G je primitivní funkce k funkci g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\,dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,dx, \quad x \in I.$$

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci arctg na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Poznámka. Při hledání primitivní funkce k dané funkci na nějakém otevřeném intervalu používáme následující symboliku:

$$\int f(x)\,dx \overset{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Na levé straně rovnosti stojí **množina** funkcí (přesněji množina všech primitivních funkcí k funkci f), zatímco na pravé straně stojí (libovolný) representant této množiny, tedy funkce F, jedna z primitivních funkcí k funkci f na I. Vztah $\overset{c}{=}$ tedy není rovností v obvyklém slova smyslu, čteme jej jako **rovnost až na konstantu** a znamená, že všechny primitivní funkce k funkci f na intervalu I obdržíme tak, že k funkci F přičteme libovolnou konstantní funkci na I.

Zadání úlohy nalézt primitivní funkci k funkci f symbolicky zapisujeme ve formě

$$\int f(x)\,dx.$$

Jednotlivé části tohoto zápisu jsou tyto:

$\int$ ... znak integrálu,

$f(x)$ ... **integrand**, tedy funkce, k níž hledáme primitivní funkci,

dx ... **diferenciál**, symbol, jenž označuje jednak konec integrandu a jednak určuje proměnnou, vzhledem k níž integrujeme.

Symbol dx nemá žádný matematický význam a nelze s ním žádným způsobem algebraicky manipulovat. Nesmí se tedy například objevit ve jmenovateli zlomku, nelze jím krátit a podobně.

Tento symbol lze v některých případech i vynechat, například tvrzení první věty o substituci lze symbolicky zapsat ve tvaru

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' \stackrel{c}{=} F \circ \varphi.$$

Symbol dx však může posloužit jako užitečná mnemotechnická pomůcka při praktických výpočtech, například při použití některé z vět o substituci. Hledáme-li kupříkladu primitivní funkci k funkci g na intervalu (α, β) pomocí první věty o substituci, často postupujeme tak, že se snažíme nalézt funkce f a φ takové, aby pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ platilo $g(t) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$. V takových případech obvykle nejprve najdeme funkci φ', k ní pak dopočítáme φ a interval (a, b). Formálně zaměníme $x = \varphi(t)$ a $dx = \varphi'(t)\,dt$. Vztah $dx = \varphi'(t)\,dt$ nemá žádný matematický význam, jde jen o užitečnou pomůcku při výpočtech.

Například pro určení primitivní funkce $\int \frac{dx}{x(1+\log^2(x))}$ na intervalu $(0, \infty)$ položíme $y = \log x$ a $dy = \frac{1}{x}dx$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1+\log^2(x))} &= \int \frac{dy}{1+y^2}\bigg|_{y=\log x} \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg}(y)|_{y=\log x} \\ &= \operatorname{arctg}(\log x),\ x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Při použití druhé věty o substituci je postup obdobný. Například pro určení primitivní funkce $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ na intervalu $x \in \mathbb{R}$ položíme $x = \sinh t$ a $dx = \cosh t\, dt$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\cosh t dt}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\bigg|_{t=\sinh^{-1}(x)} = \int dt\bigg|_{t=\sinh^{-1}(x)} \\ &\stackrel{c}{=} t|_{t=\sinh^{-1}(x)} = \sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}). \end{aligned}$$

Příklad. Spočtěte primitivní funkci $\int e^x \sin x\, dx$.

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte primitivní funkci $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$.

8.2. **Integrace racionálních funkcí.**

Definice. Racionální funkcí rozumíme podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině $\mathbb{R}$, která neobsahuje žádný kořen polynomu Q.

konec 7. přednášky (16.03.2017)

Věta 8.8 (rozklad na parciální zlomky). *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,
(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \dots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,
(iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,
(v) *žádný z mnohočlenů $x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemá reálný kořen,*
(vi) *žádné dva z mnohočlenů $x-x_1, x-x_2, \dots, x-x_k$, nemají společný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \dots, B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1, \dots, B_1^l$, $C_1^l, \dots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} \\ &+ \cdots + \frac{A_1^k}{x-x_k} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}\end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ *splňující* $Q(x) \neq 0$.

Poznámka (postup při integraci racionální funkce)**.** Nechť je zadána racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy, $Q \not\equiv 0$. Při výpočtu primitivní funkce $\int R(x)\,dx$ na libovolném intervalu I, který neobsahuje žádný z kořenů polynomu Q, pak postupujeme podle následující osnovy:

1. krok: vyjádříme funkci $R(x)$ ve tvaru $R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde $\operatorname{st} P_2 < \operatorname{st} Q$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$;
2. krok: provedeme rozklad funkce $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky podle Věty 8.8;
3. krok: integrujeme jednotlivé parciální zlomky podle následujícího návodu.

(a) Je-li

$$I = \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx,$$

kde $A \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak

$$I \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{A}{(x-a)^{n-1}}, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n > 1; \\ A \log|x-a|, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n = 1. \end{cases}$$

(b) Je-li

$$I = \int \frac{Bx + C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx,$$

kde $q \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$, pak nejprve vyjádříme I ve tvaru

$$I = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx + (C - \frac{B\alpha}{2})\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx.$$

Označíme-li

$$I_1 = \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx \quad \text{a} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx,$$

potom

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}}, & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q > 1, \\ \log(x^2+\alpha x+\beta), & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q = 1. \end{cases}$$

Dále platí

$$I_2 = \int \frac{1}{((x+\frac{\alpha}{2})^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4})^q}\,dx = \frac{1}{(\beta - \frac{\alpha^2}{4})^q}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right)^2 + 1\right]^q}\,dx.$$

Pro výpočet posledního integrálu využijeme první větu o substituci. Položíme $\varphi(x) = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, takže $\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, a obdržíme

$$\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2+1\right]^q}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy.$$

Výsledný integrál pak spočítáme podle výše uvedeného příkladu.

Příklad. Spočtěte primitivní funkci $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx$.

8.3. **Některé užitečné substituce.**

Značení. Ve zbytku této kapitoly budeme symbolem $R(x,y)$ značit **racionální funkci dvou proměnných**, tj. $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde

$$P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_1} a_{ij}x^iy^j, \quad Q(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_2} b_{ij}x^iy^j,$$

kde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i,j = 0,\ldots,N_1(N_2)$ a $Q \not\equiv 0$.

Poznámka (racionalisace trigonometrických integrálů)**.** Pro převod integrálů tvaru $\int R(\sin t, \cos t)\,dt$ na integraci racionální funkce lze využít jedné z následujících substitucí:
(a) vždy lze užít substituci $\varphi(t) = \operatorname{tg}(\frac{t}{2})$, $t \in (-\pi,\pi)$,
(b) pokud $R(a,-b) = -R(a,b)$, lze užít substituci $\varphi(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$,
(c) pokud $R(-a,b) = -R(a,b)$, pak lze užít substituci $\varphi(t) = \cos t$, $t \in \mathbb{R}$,
(d) pokud $R(-a,-b) = R(a,b)$, pak lze užít substituci $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$, $t \in \mathbb{R}$.
Dobrá rada: je-li to možné, bývá obvykle výhodnější zvolit některou ze substitucí (b)–(d) než substituci (a).

konec 8. přednášky (17.03.2017)

Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2(x)}.$$

Poznámka (racionalisace integrálů tvaru $\int R(t,(\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{q}})\,dt$)**.** Nechť $q \in \mathbb{N}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(t,(\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{q}})\,dt$, na integraci racionální funkce lze využít substituci $\varphi(t) = (\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{q}}$.

Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\,dt.$$

Poznámka (racionalisace integrálů tvaru $\int R(t,\sqrt{at^2+bt+c})\,dt$)**.** Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(t,\sqrt{at^2+bt+c})\,dx$ na integraci racionální funkce rozlišujeme následující případy:
(a) Nechť má trojčlen at^2+bt+c dvojnásobný reálný kořen α a platí $at^2+bt+c = a(t-\alpha)^2$. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$. Pak ale

$$\sqrt{at^2+bt+c} = \sqrt{a}|t-\alpha|.$$

(b) Nechť má trojčlen at^2+bt+c dva různé reálné kořeny α_1, α_2, $\alpha_1 < \alpha_2$ a platí $at^2+bt+c = a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)$. Je-li $a > 0$, pak pro $t \in (-\infty, \alpha_1)$ a $t \in (\alpha_2, \infty)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{at^2+bt+c} &= \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)}\\ &= \sqrt{a}|t-\alpha_1|\sqrt{\frac{t-\alpha_2}{t-\alpha_1}}.\end{aligned}$$

Je-li $a < 0$, pak pro $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{at^2+bt+c} &= \sqrt{(-a)(t-\alpha_1)(\alpha_2-t)}\\ &= \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2-t}{t-\alpha_1}}.\end{aligned}$$

V obou případech jsme tedy zadání převedli na úlohu nalézt primitivní funkci $\int R(t, (\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{q}})\,dt$, jejíž řešení již známe. Povšimněme si, že v obou případech je splněna podmínka $ad \neq bc$, neboť v prvním případě platí $ad = -\alpha_1$ a $bc = -\alpha_2$, zatímco ve druhém případě platí $ad = \alpha_1$ a $bc = \alpha_2$.

(c) Polynom at^2+bt+c nemá reálné kořeny. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$ a $c > 0$. V tomto případě lze užít jednu z takzvaných **Eulerových substitucí**

$$\sqrt{at^2+bt+t} = \sqrt{a}t + x \quad \text{nebo} \quad \sqrt{at^2+bt+t} = tx + \sqrt{c}.$$

Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

9. Riemannův integrál

Definice. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a,b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $[a,b]$ je **zjemněním dělení** D intervalu $[a,b]$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

konec 9. přednášky (23.03.2017)

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Označme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\}.$$

Definice. Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a,b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$. Jestliže $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. V případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a, b])$.

Příklady. (a) Nechť $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b \alpha\, dx = \alpha(b - a)$.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť D je Dirichletova funkce. Potom $\underline{\int_a^b} D(x)\, dx = 0$ a $\overline{\int_a^b} D(x)\, dx = 1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

Věta 9.1 (vlastnosti dělení)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$.*

(a) *Nechť D, D' jsou dělení intervalu $[a, b]$, přičemž D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$

(b) *Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

(c) *Platí*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Příklady. Nechť R je Riemannova funkce, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom $R \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\int_a^b R(x)\, dx = 0$.

Věta 9.2 (mantinely Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Označme $m = \inf_{[a,b]} f$ a $M = \sup_{[a,b]} f$. Pak*

$$m(b - a) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{S}(f, D_2) \leq M(b - a).$$

Věta 9.3 (aproximace Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{S}(f, D) < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \varepsilon$$

a

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \geq \underline{S}(f, D) > \underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \varepsilon.$$

konec 10. přednášky (24.03.2017)

Věta 9.4 (aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s mizející normou)**.** *Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$. Pak*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) \quad \text{a} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Důsledek. *Jestliže f je omezená funkce na $[a, b]$ a existuje posloupnost $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim \nu(D_n) = 0$ a $\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n)$, potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Příklad. Spočtěte $\int_0^1 x^2\, dx$.

Věta 9.5 (kritérium existence Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že*

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá** na I, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I,\ |x - y| < \delta \colon |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Poznámka. Chceme-li dokázat, že funkce f není na intervalu I stejnoměrně spojitá, stačí nalézt $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ bodů z I takové, že $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Příklad. Dokažte, že funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá, avšak nikoli stejnoměrně spojitá, na $(0, 1)$.

Příklad. Dokažte, že funkce $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ je spojitá, avšak nikoli stejnoměrně spojitá, na $(0, 1]$.

Věta 9.6 (vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti)**.** *Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.*

Věta 9.7 (vztah spojitosti a riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

konec 11. přednášky (30.03.2017)

Věta 9.8 (vztah monotonie a riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť f je monotónní funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Úmluva. Nechť $[a, b] \subset D(f)$. Potom symbol $f \in \mathcal{R}([a, b])$ znamená, že $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b])$.

Poznámka. Nechť f je funkce, $I \subset D(f)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Platí následující vztahy:

$$\sup_I (f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g, \quad \inf_I (f + g) \geq \inf_I f + \sup_I g$$

a

$$\sup_I \alpha f = \begin{cases} \alpha \sup_I, f & \text{je-li } \alpha \geq 0, \\ \alpha \inf_I, f & \text{je-li } \alpha < 0, \end{cases} \qquad \inf_I \alpha f = \begin{cases} \alpha \inf_I, f & \text{je-li } \alpha \geq 0, \\ \alpha \sup_I, f & \text{je-li } \alpha < 0. \end{cases}$$

Věta 9.9 (vlastnosti Riemannova integrálu)**.** (a) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx, \qquad \int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$$

(b) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $f \leq g$. Pak $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.*

(c) *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$. Pak*

$$f \in \mathcal{R}([a, c]) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}([a, b])\ \&\ f \in \mathcal{R}([b, c])).$$

Je-li $f \in \mathcal{R}([a, c])$, pak platí

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx.$$

(d) *Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Pak $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Věta 9.10 (derivace funkce horní meze Riemannova integrálu)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval a nechť f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a, b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt.$$

Potom platí:

(a) *F je spojitá na J,*
(b) *jestliže x_0 je vnitřním bodem intervalu J a funkce f je spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.*

konec 12. přednášky (31.03.2017)

Důsledek (vztah spojitosti a existence primitivní funkce - Věta 8.2)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom f má na (a, b) primitivní funkci.*

Věta 9.11 (výpočet Riemannova integrálu spojité funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b). Potom existují vlastní limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ a platí*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Věta 9.12 (charakterizace riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(a) *$f \in \mathcal{R}([a, b])$;*
(b) *existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, splňující: je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, pak*

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

10. Newtonův integrál

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Řekneme, že **Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje**, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci (označme ji F),
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) pak rozumíme prvek

$$(N) \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Pokud $a > b$, pak klademe $(N) \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Pro $a \in \mathbb{R}^*$ definujeme $(N) \int_a^a f(x)\,dx = 0$. Jestliže $(N) \int_a^b f(x)\,dx$ existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je **konvergentní**. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Poznámky. (a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci. To plyne z Věty 8.1.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N) \int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje} \begin{cases} = \infty, \\ = -\infty, \\ \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{cases}$$

Značení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech funkcí $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Úmluva. Je-li $(a, b) \subset D(f)$, pak symbol $f \in \mathcal{N}(a, b)$ znamená $f|_{(a,b)} \in \mathcal{N}(a, b)$.

Značení. Nechť funkce F je definovaná na (a,b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl. Budeme občas psát $\int$ místo $(N)\int$.

Příklad. Je-li $f(x) = x^\alpha$, $x \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

$$(N)\int_0^1 x^\alpha\,dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1,\infty) \quad \text{(konverguje)},\\ [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty,-1) \quad \text{(diverguje)},\\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1 \quad \text{(diverguje)}. \end{cases}$$

konec 13. přednášky (06.04.2017)

Příklad. Je-li $f(x) = x^\alpha$, $x \in (1,\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1,\infty) \quad \text{(diverguje)},\\ [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty,-1) \quad \text{(konverguje)},\\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1 \quad \text{(diverguje)}. \end{cases}$$

Poznámka. Integrál $(N)\int_0^\infty x^\alpha\,dx$ je divergentní pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0,1)$ newtonovsky integrovatelná ale není na $[0,1]$ při libovolném dodefinování v bodě 0 riemannovsky integrovalná, neboť na $(0,1)$ není omezená. Funkce sign je na intervalu $[-1,1]$ riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1,1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1,1)$ nemá Darbouxovu vlastnost, a tedy ani primitivní funkci.

Značení. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f$ místo $(N)\int_a^b f(x)\,dx$.

Věta 10.1 (vlastnosti Newtonova integrálu). *Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.*

(a) *Jestliže $f,g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $f+g \in \mathcal{N}(a,b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí*

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b \alpha f = \alpha\int_a^b f.$$

(b) *Jestliže $f,g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $f \le g$, pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$.*

(c) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a f je spojitá na (a,b), pak $\int_a^b |f|$ existuje a $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.*

(d) *Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$. Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,c)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{N}(b,c)$ a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(e) *Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$. Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{N}(b,c)$ a f je spojitá v b, pak $f \in \mathcal{N}(a,c)$.*

Věta 10.2 (per partes pro Newtonův integrál). *Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f a g jsou funkce definované na (a,b). Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a,b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a,b). Potom platí*

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 10.3 (substituce pro Newtonův integrál). *Nechť $a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $\alpha < \beta$. Nechť f je funkce definovaná na (a,b) a nechť φ je funkce definovaná na (α,β). Nechť φ má vlastní nenulovou derivaci na (α,β) a nechť platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Potom*

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,|\varphi'|\,,$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

konec 14. přednášky (07.04.2017)

Věta 10.4 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}(a,b)$. Potom*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

11. Konvergence Newtonova integrálu

Věta 11.1 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\delta_0 > 0$. Nechť funkce f je definována na $P(a, \delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to a} f(x)$ právě tehdy, když je splněna následující* **Bolzanova–Cauchyova podmínka***:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in P(a, \delta)\colon |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Tvrzení Věty 11.1 platí obdobně i pro jednostranné limity.

Věta 11.2 (vztah spojitosti a konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť f je omezená spojitá funkce na omezeném intervalu (a,b). Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Poznámka. Pro neomezený interval tvrzení Věty 11.2 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0,\infty)$, je spojitá a omezená na $(0,\infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0,\infty)$. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je na intervalu $\mathbb{R}$ také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ však dokonce ani neexistuje.

Důsledek (vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}(a,b)$ a*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Věta 11.3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in [a,b)$. Nechť je f spojitá na $[a,b)$ a $g \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

konec 15. přednášky (13.04.2017)

Věta 11.4 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu - obecnější verse)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ splňují $|f(x)| \le g(x)$ pro každé $x \in [a,b)$. Nechť je f spojitá na $[a,b)$ a $g \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Poznámka. Tvrzení Vět 11.3 a 11.4 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a,b]$.

Věta 11.5 (vztah absolutní konvergence a konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na (a,b) splňující $|f| \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$.

Poznámka. Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ splňuje $f \in \mathcal{N}(0,\infty)$, ale $|f| \notin \mathcal{N}(0,\infty)$. Odtud vyplývá, že Newtonův integrál je neabsolutně konvergentní integrál (na rozdíl například od Lebesgueova integrálu).

Věta 11.6 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$.*
(a) *Jestliže $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.*
(b) *Jestliže $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*
(c) *Jestliže $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ a $f \in \mathcal{N}(a, b)$, pak $g \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}\, dx$.

konec 16. přednášky (20.04.2017)

Věta 11.7 (Newtonův integrál součinu funkcí)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, nezáporná a nerostoucí na $[a, b]$. Potom*

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f \le \int_a^b fg \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f.$$

Speciálně platí

$$\left|\int_a^b fg\right| \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x f\right|.$$

Věta 11.8 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a $g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ je monotónní a spojitá na $[a, b)$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b).*
(a) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená na $[a, b)$, potom $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*
(b) *Jestliže F je omezená na (a, b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, potom $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Poznámka. Tvrzení Věty 11.8 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_1^\infty \operatorname{arctg} x \frac{\cos x}{x}\, dx$.

Věta 11.9 (první věta o střední hodnotě)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je nezáporná funkce na $[a, b]$, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

konec 17. přednášky (21.04.2017)

Věta 11.10 (druhá věta o střední hodnotě)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a monotónní. Potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f. \tag{1}$$

12. Aplikace určitého integrálu

12.1. **Délka křivky.**

Definice. **Normovaným lineárním prostorem** budeme rozumět dvojici $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\|\cdot\|\colon X \to [0, \infty)$ je zobrazení splňující
(a) $\forall x \in X\colon\ [\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o]$,
(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in x\colon \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
(c) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.
Zobrazení $\|\cdot\|$ nazýváme **normou** na X.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$. **Eukleidovským prostorem** dimenze n nazýváme množinu

$$\mathbb{R}^n = \{x = [x_1, \dots, x_n],\ \forall i \in \{1, \dots, n\}\colon x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Věta 12.1 (Cauchyova nerovnost). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Potom platí*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Věta 12.2 (eukleidovský prostor). *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom dvojice $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, kde $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, tvoří normovaný lineární prostor.*

Poznámka. Pro $n = 1$ platí $\|x\| = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. **Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ je **třídy** $\mathcal{C}^1$, tj. φ_i' je spojité na $[a, b]$, $i = 1, \ldots, n$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle\varphi\rangle = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad. Jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ je geometrickým obrazem křivky $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$.

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^1([a, b])$. Potom je graf funkce f v $\mathbb{R}^2$ geometrickým obrazem křivky $\varphi(x) = [x, f(x)]$, $x \in [a, b]$.

Poznámka. Geometrický obraz křivky může mít hrot. To lze ilustrovat například na křivce dané parametrisací $\varphi(t) = [t^3, t^2]$, $t \in [-1, 1]$.

Poznámka. Různé křivky mohou mít stejný geometrický obraz (například $\varphi_1(t) = [t, t]$, $\varphi_2(t) = [t^2, t^2]$).

Definice. Nechť $\varphi \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ intervalu $[a, b]$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{j=1}^{k} \text{vzdálenost}\,(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_j)).$$

Věta 12.3 (odhad normy integrálu vektorové funkce). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f = (f_1, \ldots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, tj. f_i je spojitá pro každé $i = 1, \ldots, n$. Potom platí*

$$\Big\|\int_a^b f\Big\| := \Big\|\Big[\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n\Big]\Big\| \leq \int_a^b \|f\|.$$

Poznámka. Platí $\|[1, \ldots, 1]\| = \sqrt{n}$. Odtud plyne, že jestliže pro nějaké $x \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$ platí $|x_i| \leq \varepsilon$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak $\|x\| \leq \varepsilon\sqrt{n}$.

Věta 12.4 (délka křivky). *Nechť $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. Potom platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}\, dt.$$

konec 18. přednášky (27.04.2017)

12.2. **Objem a povrch rotačního tělesa.** Pojmy uvedené v tomto oddílu (objem a povrch pláště rotačního tělesa) nejsou přesně definovány a jsou chápány pouze intuitivně.

Věta 12.5 (objem a povrch pláště rotačního tělesa). *Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Označme $T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$. Pak objem$(T) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$. Je-li navíc f' spojitá na (a, b), pak povrch pláště$(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.*

12.3. **Konvergence číselných řad.**

Věta 12.6 (integrální kritérium konvergence řad). *Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na $[n_0, +\infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n = f(n)$ pro $n \geq n_0$. Pak $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

12.4. **Taylorův polynom - integrální tvar zbytku.**

Věta 12.7 (integrální tvar zbytku). *Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci. Potom*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

13. Metrické prostory

13.1. **Základní pojmy.**

Definice. Metrickým prostorem budeme rozumět dvojici (P, ϱ), kde P je množina, $\varrho : P \times P \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(a) $\forall x, y \in P$: $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(b) $\forall x, y \in P$: $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
(c) $\forall x, y, z \in P$: $\varrho(x, z) \le \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Funkce ϱ se nazývá **metrika na** P.

Poznámka. Definice metrického prostoru připouští i možnost, že P je prázdná množina.

konec 19. přednášky (28.04.2017)

Věta 13.1 (vztah mezi normou a metrikou). *Je-li $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor a pro $x, y \in X$ definujeme $\varrho(x, y) = \|x - y\|$, potom (X, ϱ) je metrický prostor.*

Definice. Eukleidovská metrika na $\mathbb{R}^n$. Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujeme

$$\varrho_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Podle Vět 13.1 a 12.2 tvoří $(\mathbb{R}^n, \varrho_e)$ tvoří metrický prostor. Eukleidovská metrika se též někdy nazývá ℓ_2-metrika a značí se ϱ_2.

Newyorská metrika na $\mathbb{R}^n$ (též ℓ_1-metrika). Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujeme

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Potom $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ tvoří metrický prostor.

Maximová metrika na $\mathbb{R}^n$ (též ℓ_∞-metrika). Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujeme

$$\varrho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; i = 1, \dots, n\}.$$

Potom $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ tvoří metrický prostor.

Supremová metrika na $\mathcal{C}([a, b])$. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pro $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ definujeme

$$\varrho_{\sup}(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Potom $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\sup})$ tvoří metrický prostor.

Integrální metrika na $\mathcal{C}([a, b])$. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pro $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ definujeme

$$\varrho_{\mathrm{int}}(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

Potom $(\mathcal{C}([a, b]), \varrho_{\mathrm{int}})$ tvoří metrický prostor.

Diskrétní metrika. Nechť P je množina. Pro $x, y \in P$ definujeme

$$\varrho_{\mathrm{diskr}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \ne y, \\ 0 & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Potom $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ tvoří metrický prostor.

Poznámka. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojice $(M, \varrho|_{M\times M})$ opět tvoří metrický prostor. Z této úvahy plyne korektnost následující definice.

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom dvojici $(M, \varrho|_{M\times M})$ nazýváme **metrickým podprostorem** metrického prostoru (P,ϱ). Metriku $\varrho|_{M\times M}$ na prostoru M nazýváme **indukovanou** nebo též **zděděnou** metrikou z prostoru (P,ϱ) a značíme ji opět pouze symbolem ϱ.

Poznámka. Některé metriky jsou indukovány normami.

(a) Pro $x \in \mathbb{R}^n$ definujme $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ a $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|; i = 1,\dots,n\}$. Potom $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ jsou normované lineární prostory.

(b) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pro $f \in \mathcal{C}([a,b])$ definujme $\|f\|_{\sup} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ a $\|f\|_{\text{int}} = \int_a^b |f(x)|\,dx$. Potom $(X, \|\cdot\|_{\sup})$ a $(X, \|\cdot\|_{\text{int}})$ jsou normované lineární prostory.

(c) Označme

$$\begin{aligned}
\ell^\infty &= \{\{x_n\} \subset \mathbb{R},\ \exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |x_n| \le K\},\\
c &= \{\{x_n\} \in \ell^\infty,\ \exists A \in \mathbb{R} : \lim x_n = A\},\\
c_0 &= \{\{x_n\} \in \ell^\infty,\ \lim x_n = 0\}.
\end{aligned}$$

Pro $\{x_n\} \in \ell^\infty$ definujme $\|\{x_n\}\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Potom $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$, $(c, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ a $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ jsou normované lineární prostory a platí $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$.

13.2. Konvergence v metrických prostorech.

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. **Posloupností** prvků P rozumíme každé zobrazení $n \mapsto x_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do prostoru P. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{x_n\}$. Prvek x_n nazýváme **n-tým členem** této posloupnosti. Množinu $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ nazýváme **množinou všech členů** posloupnosti $\{x_n\}$. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ nazýváme **vybranou posloupností** z $\{x_n\}$, případně **podposloupností** $\{x_n\}$.

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $\{x_n\} \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že $\{x_n\}$ **konverguje** k x v P, jestliže $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Značíme $x_n \overset{\varrho}{\to} x$, případně pouze $x_n \to x$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}$ v P. **Konvergentní posloupností** rozumíme posloupnost, která má limitu v P.

Poznámka. Je-li $P = \mathbb{R}$ a $\varrho(x,y) = |x-y|$, $x,y \in \mathbb{R}$, pak výše uvedený pojem konvergence posloupnosti splývá s pojmem konvergence posloupnosti reálných čísel.

Věta 13.2 (vlastnosti konvergence)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor.*

(a) *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z P a existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \ge n_0$. Potom $x_n \to x$.*

(b) *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Značení. Místo $x_n \to x$ budeme někdy psát $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Věta 13.3 (limita vybrané posloupnosti)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z P, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je vybraná posloupnost z $\{x_n\}$, $x \in P$ a $\lim x_n = x$. Potom $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.*

Příklad. Nechť P je množina a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z P. Dokažte, že $\{x_n\}$ je konvergentní v $(P, \varrho_{\text{diskr}})$ právě tehdy, když existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ takové, že $x_n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$.

Poznámka (ekvivalence metrik v eukleidovském prostoru)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x,y \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| &\le \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2 \sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2} \le \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}\\
&\le n \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \le n \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.
\end{aligned}$$

Tedy $\varrho_1(x,y) \le \sqrt{n}\varrho_e(x,y) \le n\varrho_\infty(x,y) \le n\varrho_1(x,y)$. Odtud vyplývá, že

$$x_k \overset{\varrho_1}{\to} y \quad\Leftrightarrow\quad x_k \overset{\varrho_e}{\to} y \quad\Leftrightarrow\quad x_k \overset{\varrho_\infty}{\to} y.$$

konec 20. přednášky (04.05.2017)

Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z $\mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^n$. Potom $x_k \stackrel{\varrho_e}{\to} y$ právě tehdy, když pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $\lim_{k\to\infty} (x_k)_i = y_i$.

13.3. **Topologické pojmy v metrických prostorech.**

Definice. Nechť $A \subset P$. Řekneme, že množina A je **uzavřená** v P, jestliže platí následující implikace:

$$\{x_n\} \subset A, \quad x_n \stackrel{\varrho}{\to} x, \ x \in P \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Příklad. Dokažte, že $[0,1]$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$ a $(0,1]$ není uzavřená množina v $\mathbb{R}$.

Věta 13.4 (vlastnosti uzavřených množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.*

(a) *Množiny $\emptyset$ a P jsou uzavřené v P.*

(b) *Nechť $\mathcal{F}$ je neprázdný systém uzavřených množin v P. Potom je $\bigcap \mathcal{F}$ uzavřená množina v P.*

(c) *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $F_1, \dots, F_m$ jsou uzavřené množiny v P. Potom je $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená množina v P.*

Poznámka. Pro nekonečný soubor uzavřených množin tvrzení Věty 13.4(c) neplatí. Příkladem je systém $\mathcal{F} = \{[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}\}$ v $\mathbb{R}$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Potom množinu

$$B(x,r) = \{y \in P; \varrho(x,y) < r\},$$

nazýváme **otevřenou koulí** se středem x a poloměrem r.

Příklady. (a) V prostoru $\mathbb{R}$ platí $B(x,r) = (x-r, x+r)$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $r > 0$.

(b) V diskrétním prostoru platí

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{jestliže } r \le 1, \\ P, & \text{jestliže } r > 1. \end{cases}$$

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **vnitřním bodem množiny** A, jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset A$. Řekneme, že množina A je **otevřená** v P, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem. Množinu všech vnitřních bodů množiny A nazýváme jejím **vnitřkem** a značíme $\operatorname{Int} A$.

Věta 13.5 (otevřenost otevřené koule)**.** *Otevřená koule v metrickém prostoru je otevřená množina.*

Věta 13.6 (vztah otevřených a uzavřených množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $F \subset P$. Potom F je uzavřená právě tehdy, když $P \setminus F$ je otevřená.*

Věta 13.7 (vlastnosti otevřených množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.*

(a) *Množiny $\emptyset$ a P jsou otevřené v P.*

(b) *Nechť $\mathcal{G}$ je neprázdný systém otevřených množin v P. Potom je $\bigcup \mathcal{G}$ otevřená množina v P.*

(c) *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $G_1, \dots, G_m$ jsou otevřené množiny v P. Potom je $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená množina v P.*

Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom $\operatorname{Int} M$ je otevřená množina. To plyne z toho, že buď $\operatorname{Int} M = \emptyset$, což je otevřená množina podle Věty 13.7(a), nebo

$$\operatorname{Int} M = \bigcup \{B(x,r), \ x \in P, \ r > 0, \ B(x,r) \subset M\},$$

což je otevřená množina podle Vět 13.5 a 13.7(b).

Věta 13.8 (otevřené a uzavřené množiny v diskrétním prostoru)**.** *Každá podmnožina diskrétního prostoru je v tomto prostoru zároveň otevřená i uzavřená.*

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, jestliže pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí množiny** M a značíme ji $H(M)$. Označme $\overline{M} = M \cup H(M)$. Potom množinu $\overline{M}$ nazýváme **uzávěrem** množiny M v P.

konec 21. přednášky (05.05.2017)

Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom $H(A) = H(P \setminus A)$.

Příklad. Dokažte, že $H(\emptyset) = H(P) = \emptyset$.

Příklady. (a) Dokažte, že $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$ a platí $\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \emptyset$ a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
(b) Dokažte, že $(0, 1]$ není otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$ a platí $\operatorname{Int}(0, 1] = (0, 1)$ a $\overline{(0, 1]} = [0, 1]$.

Poznámka. Množina $[0, 1)$ sice není otevřená ani uzavřená v $\mathbb{R}$, je však zároveň otevřená i uzavřená v metrickém prostoru $[0, 1)$ se zděděnou metrikou.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. **Vzdáleností** bodu x od množiny A nazýváme nezáporný prvek $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\varrho(x, y); y \in A\}$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. **Průměrem** množiny A nazýváme nezáporný prvek

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} 0, \text{ je-li } A = \emptyset, \\ \sup\{\varrho(x, y); x, y \in A\}, \text{ je-li } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Řekneme, že množina A je **omezená v** P, jestliže platí $\operatorname{diam} A < \infty$.

Poznámky. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$.
(a) Je-li $\operatorname{dist}(x, A) > 0$, potom existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \cap A = \emptyset$.
(b) Jestliže pro nějaké $r > 0$ platí $B(x, r) \cap A = \emptyset$, potom $\operatorname{dist}(x, A) \geq r$.

Věta 13.9 (vlastnosti uzávěru). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A, B \subset P$. Potom platí*
(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$,
(b) *jestliže* $A \subset B$, *potom* $\overline{A} \subset \overline{B}$,
(c) *množina* $\overline{A}$ *je uzavřená v* P, *a tedy* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
(e) $\overline{A} = \{x \in P; \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$,
(f) $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$, *a tedy* A *je omezená právě tehdy, když* $\overline{A}$ *je omezená,*
(g) $\overline{A} = \bigcap\{F \subset P; F \text{ uzavřená}, \ F \supset A\}$.

13.4. **Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory.**

Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$. Řekneme, že

- f **je spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in B_\varrho(x, \delta) \cap M \colon f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon);$$
- f **je spojité v bodě** a, jestliže je spojité v a vzhledem k P;
- f **je spojité na množině** M, jestliže je spojité v každém bodě $a \in M$ vzhledem k M;
- f **je spojité**, jestliže je spojité na P.

konec 22. přednášky (11.05.2017)

Poznámka. Spojitost zobrazení f v bodě a vzhledem k množině M lze též zapsat ve tvaru

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M : \ \varrho(x, a) < \delta \ \Rightarrow \ \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

Poznámka. Definice spojitosti zobrazení souhlasí v případě $P = Q = \mathbb{R}$ s definicí spojitosti reálné funkce v bodě a na intervalu.

Příklad. Nechť $n, i \in \mathbb{N}$, $i \le n$. Definujeme zobrazení $\pi_i\colon (\mathbb{R}^n, \varrho_e) \to (\mathbb{R}, \varrho_e)$ definované předpisem $\pi_i(x) = x_i$ (**projekce** na i-tou složku). Dokažte, že π_i je spojité na $\mathbb{R}^n$.

Věta 13.10 (charakterizace spojitosti)**.** *Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní:*
(a) *zobrazení f je spojité,*
(b) *pro každou uzavřenou množinu F v Q je $f^{-1}(F)$ uzavřená množina v P,*
(c) *pro každou otevřenou množinu G v Q je $f^{-1}(G)$ otevřená množina v P.*

Věta 13.11 (věta o spojitosti složeného zobrazení)**.** *Nechť (P, ϱ), (Q, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, $f\colon P \to Q$ je spojité a $g\colon Q \to Z$ je spojité. Potom $g \circ f : P \to Z$ je spojité.*

Příklad. Dokažte, že libovolné zobrazení na diskrétním prostoru je spojité.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $a \in P$. Řekneme, že a je **hromadným bodem** M, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $M \cap (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Množinu všech hromadných bodů množiny M nazýváme **derivací množiny** M a značíme ji symbolem M'. Řekneme, že a je **izolovaným bodem množiny** M, jestliže $a \in M \setminus M'$.

Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je prostá omezená posloupnost reálných čísel a nechť $M = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Dokažte, že v prostoru $\mathbb{R}$ pak platí $M' = H(\{a_n\})$.

Definice. Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $A \subset P$, $a \in A'$, $b \in Q$ a $f\colon A \to Q$. Řekneme, že f **má v bodě** a **limitu** b **vzhledem k množině** A, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{a\}\colon \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Jestliže $A = P$, pak říkáme že f **má v bodě** a **limitu** b.

Poznámka. Limita je jednoznačně definovaná.

Značení. Limitu f v a vzhledem k M značíme $\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)$, případně $\lim_{x\to a} f(x)$ (je-li $A = P$).

Příklad. Nechť $P = Q = \mathbb{R}$, D je Dirichletova funkce a $a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$\lim_{x\to a,\, x\in\mathbb{Q}} D(x) = 1.$$

Věta 13.12 (Heineova věta pro metrické prostory)**.** *Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $A \subset P$, $f : A \to Q$, $a \in A'$ a $b \in Q$. Potom $\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = b$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim_{x_n} = a$ platí $\lim f(x_n) = b$.*

Poznámka. Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $A \subset P$, $f\colon P \to Q$ a $a \in A \cap A' \cap D(f)$. Potom zobrazení f je spojité v a vzhledem k množině A právě tehdy, když $\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = f(a)$.

Věta 13.13 (spojitost složeného zobrazení v bodě)**.** *Nechť (P, ϱ), (Q, σ), (Z, τ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, g je zobrazení z Q do Z, $A \subset P$, $a \in A$, $B \subset Q$, $f(a) \in B$ a platí:*
- *existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$;*
- *f je spojité v bodě a vzhledem k A;*
- *g je spojité v bodě $f(a)$ vzhledem k B.*

Potom zobrazení $g \circ f$ je spojité v bodě a vzhledem k A.

Věta 13.14 (limita složeného zobrazení)**.** *Nechť (P, ϱ), (Q, σ), (Z, τ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q a g je zobrazení z Q do Z, $A \subset P$, $a \in A'$, $B \subset Q$, $b \in B'$, $c \in Z$ a platí*
- *existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f(A \cap (B(a, \delta) \setminus \{a\})) \subset B$;*
- *$\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = b$;*
- *$\lim_{y\to b,\, y\in B} g(y) = c$.*

Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:
(P) *existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in B(a, \eta) \cap A$, $x \neq a$, platí $f(x) \neq b$;*
(S) *zobrazení g je spojité v bodě b vzhledem k množině B.*

Potom platí

$$\lim_{x \to a,\, x \in A} (g \circ f)(x) = c.$$

Definice. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f \colon P \to Q$ je **homeomorfismus**, jestliže f je bijekce, f je spojité a f^{-1} je spojité. Řekneme, že prostory (P, ϱ) a (Q, σ) jsou **homeomorní**, jestliže existuje homeomorfismus $f \colon P \to Q$.

konec 23. přednášky (12.05.2017)

14. Funkce více proměnných

14.1. **Parciální derivace a totální diferenciál.**

Poznámka. Jestliže $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kde $m, n \in \mathbb{N}$ a $f = (f_1, \dots, f_m)$, a $a \in \mathbb{R}^n$ pak f je spojitá v a právě tehdy, když f_i jsou spojité v a pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}$.

Poznámka. Jestliže $L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení, pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1, \dots, A_n$ taková, že $L(h) = \sum_{i=1}^n A_i h_i$ pro každé $h \in \mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \le i \le n$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě a podle i-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t},$$

pokud tato limita existuje vlastní. Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \colon x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě** a, jestliže platí

$$\lim_{h \to o} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{||h||} = 0.$$

Věta 14.1 (vztah totálního diferenciálu a parciálních derivací)**.** *Nechť L je totální diferenciál funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$. Potom existují parciální derivace*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

a pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n.$$

Poznámka. Z Věty 14.1 vyplývá, že totální diferenciál je jednoznačně určen (pokud existuje). Budeme jej značit symbolem $f'(a)$. Tedy $f'(a) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení.

Poznámka. Existence vlastních parciálních derivací v bodě nezaručuje spojitost funkce v tomto bodě. Protipříkladem je funkce

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0,$$

ale funkce zřejmě není spojitá v bodě $[0, 0]$.

Věta 14.2 (vztah totálního diferenciálu a spojitosti)**.** *Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál, pak je v tomto bodě spojitá.*

Poznámka. Z Věty 14.2 a jí předcházející poznámky plyne, že funkce

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

nemá v bodě $[0, 0]$ totální diferenciál.

konec 24. přednášky (18.05.2017)

Věta 14.3 (o cestičce v kostičce). *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in I$. Nechť v každém bodě I existují parciální derivace f podle všech proměnných. Potom existují body $\xi^1, \dots, \xi^n \in I$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i)(b_i - a_i).$$

Věta 14.4 (postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu). *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě a. Potom má f v bodě a totální diferenciál.*

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě a podle vektoru v** rozumíme (vlastní) limitu

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Poznámka. Platí $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i}(a)$, pokud má alespoň jedna strana smysl. Platí $D_o f(a) = 0$.

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f'(a)$ existuje. Pak definujeme **gradient funkce f v bodě a** jako vektor

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Věta 14.5 (geometrický význam gradientu). *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Nechť existuje $f'(a)$. Pak platí*
(a) $f'(a)(v) = D_v f(a)$,
(b) $\max\{D_v f(a);\ ||v|| = 1\} = ||\nabla f(a)||$.

Poznámka. Pokud platí $\nabla f(a) \neq o$, potom se maxima v tvrzení (b) Věty 14.5 nabývá právě pro $v = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$.

Definice. Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací zobrazení F v bodě a**, jestliže platí

$$\lim_{h \to o} \frac{||F(a + h) - F(a) - L(h)||}{||h||} = 0.$$

konec 25. přednášky (19.05.2017)

Poznámka. Nechť $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Potom existuje právě jedna matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$, která representuje L ve smyslu, že platí $L(v) = \mathbb{A}v$ pro každé $v \in \mathbb{R}^n$.

Věta 14.6 (representace derivace maticí). *Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci L. Potom je L representováno maticí*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Poznámka. (a) Z Věty 14.6 vyplývá, že derivace zobrazení F v bodě a je určena jednoznačně (pokud existuje). Značíme ji $F'(a)$.

(b) Matice representující $F'(a)$ se nazývá **Jacobiho matice**. Pokud $m = n$, potom determinant Jacobiho matice nazýváme **jakobián** a značíme jej $J_F(a)$ nebo $\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a)$.

(c) Někdy dochází ke ztotožnění $F'(a)$ a odpovídající Jacobiho matice.

(d) $F'(a)$ existuje právě tehdy, když existují totální diferenciály $F_1'(a), \ldots, F_m'(a)$. Limita

$$\frac{F(a+h) - F(a) - L(h)}{\|h\|}$$

se počítá po složkách, tj.

$$\frac{F_j(a+h) - F_j(a) - L(h)_j}{\|h\|}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Věta 14.7 (vztah derivace a spojitosti vektorové funkce více proměnných)**.** *Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $F'(a)$ existuje. Potom F je spojité v a.*

Věta 14.8 (postačující podmínka pro existenci derivace vektorové funkce více proměnných)**.** *Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, jsou spojité v a. Potom $F'(a)$ existuje.*

Věta 14.9 (spojitost lineárního zobrazení)**.** *Nechť $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že $||L(x)|| \leq C||x||$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.*

Definice. Normou lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rozumíme číslo

$$||L|| = \sup\left\{\frac{||L(x)||}{||x||};\ x \in \mathbb{R}^n, x \neq o\right\}.$$

Lemma 14.10. *Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f'(a)$ existuje. Potom existují $C \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $h \in B(o, \delta)$ platí $||f(a+h) - f(a)|| \leq C||h||$.*

Věta 14.11 (derivace složeného zobrazení)**.** *Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, g je zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^s$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $b = f(a) \in \mathbb{R}^m$. Jestliže existují $f'(a)$ a $g'(b)$, pak existuje $(g \circ f)'(a)$ a platí $(g \circ f)'(a) = g'(b) \circ f'(a)$.*

konec 26. přednášky (25.05.2017)

Poznámka. Derivace $(g \circ f)'(a)$ je representována součinem matic, které representují $g'(b)$ a $f'(a)$, tedy

$$\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}(b)\right)_{j,l} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{i,j}.$$

Poznámka. Je-li L lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, pak v každém bodě $a \in \mathbb{R}^n$ platí $L'(a) = L$.

Věta 14.12 (řetízkové pravidlo)**.** *Nechť každá z funkcí $f_1, \ldots, f_m$ z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci a funkce g z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $b = (f_1(a), \ldots, f_m(a))$ totální diferenciál. Definujeme funkci h z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ předpisem*

$$h(x) = g(f_1(x), \ldots, f_m(x)),\ x \in \mathbb{R}.$$

Potom má h v bodě a vlastní derivaci a platí

$$h'(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) f_j'(a).$$

Příklad. Na hromadu písku tvaru kužele je neustále přisypáván další písek. Výška h roste rychlostí

$$\frac{dh}{dt} = 3\ [\mathrm{cm}\,/\,\mathrm{sec}]$$

a poloměr podstavy r roste rychlostí

$$\frac{dr}{dt} = 2 \text{ [cm / sec]}.$$

Spočtěte rychlost, s jakou narůstá objem celé hromady v okamžiku, kdy $r = 5$ cm a $h = 15$ cm.

Věta 14.13 (řetízkové pravidlo podruhé). *Nechť funkce $f_1, \dots, f_m$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ mají v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál a funkce g z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $b = (f_1(a), \dots, f_m(a))$ totální diferenciál. Definujme funkci h z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ předpisem*

$$h(x) = g(f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Potom má h v bodě a totální diferenciál a pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Příklad. Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v každém bodě. Definujeme funkci $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$h(r,t) = f(r\cos t, r\sin t).$$

Potom

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r,t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(r\cos t, r\sin t)\cos t + \frac{\partial f}{\partial x_2}(r\cos t, r\sin t)\sin t, \\ \frac{\partial h}{\partial t}(r,t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(r\cos t, r\sin t)(-r\sin t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(r\cos t, r\sin t) r\cos t. \end{aligned}$$

Poznámka. Nechť f_1 a f_2 jsou funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že existují $f_1'(a), f_2'(a)$. Potom platí

(a) $(f_1 + f_2)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a)$,

(b) $(f_1 f_2)'(a) = f_2(a) f_1'(a) + f_1(a) f_2'(a)$,

(c) $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(a) = \frac{1}{f_2^2(a)}\left(f_2(a) f_1'(a) - f_1(a) f_2'(a)\right)$, pokud $f_2(a) \neq 0$.

Věta 14.14 (o přírůstku funkce). *Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, která má totální diferenciál v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^n$. Nechť $a, b \in G$ a úsečka L spojující body a, b je obsažena v G, tj. $L = \{(1-t)a + tb;\ t \in [0,1]\} \subset G$. Pak existuje $\xi \in L$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

konec 27. přednášky (26.05.2017)