4. cvičení
Diskrétní a spojité náhodné veličiny

1. Vraťme se k příkladu 3 z minulých cvičení. Náhodná veličina X nabývá hodnot s pravděpodobnostmi uvedenými v tabulce. Určete distribuční a kvantilovou funkci této náhodné veličiny.

i	1	2	3	4
$\mathsf{P}[X = i]$	0,2	0,3	0,3	0,2

2. V rodině jsou čtyři děti. Určete rozdělení a střední hodnotu náhodné veličiny udávající počet dcer a načrtněte jeho distribuční funkci, víte-li, že pravděpodobnost narození chlapce je $p = 0{,}52$.
3. Náhodná veličina X má rozdělení dané hustotou
$$f(x) = \begin{cases} a\,x, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$
Určete konstantu a, distribuční funkci náhodné veličiny X a střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.
4. Náhodná veličina X má hustotu
$$f(x) = \begin{cases} c\,\sin(x), & \text{pro } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu c.
   (b) Určete distribuční funkci F_X.
   (c) Spočtěte $\mathsf{P}\big[X \in (\pi/4, \pi/2)\big]$, $\mathsf{P}\big[X > \pi/6\big]$, $\mathsf{P}\big[X \in \{\pi/4, \pi/2, \pi/8\}\big]$.
   (d) Určete kvantilovou funkci F_X^{-1}.
   (e) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.
5. Náhodná veličina X má distribuční funkci F_X.
$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - \mathrm{e}^{-x-1}, \ x \geq -1, \\ &= 0, \qquad\qquad \text{jinak.} \end{aligned}$$
Načrtněte distribuční funkci, určete hustotu f a načrtněte kvantilovou funkci F_X^{-1}.
6. Určete konstantu c tak, aby f byla hustota, a střední hodnotu této náhodné veličiny.
   (a) $f(x) = c\,x^{-a}$ pro $x > 1$ a $f(x) = 0$ jinak,
   (b) $g(x) = \dfrac{c}{1 + (x-a)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Pro které konstanty a, c je f (resp. g) hustota? Určete střední hodnotu odpovídající rozdělení s touto hustotou.
7. Dva hráči házejí postupně (pravidelnou šestistěnnou) kostkou. Začíná hráč A, který vyhraje, padne-li mu jednička (a pak již hra končí). Pokud hráči A nepadla jednička, hází hráč B, který vyhraje, pokud mu padne dvojka nebo trojka. Tím končí první kolo. Pokud v prvním kole nevyhrál ani hráč B, začíná se druhé kolo a hází opět hráč A, atd...
   (a) Určete pravděpodobnost, že hráč A vyhraje v k-tém kole.
   (b) Určete pravděpodobnost, že hráč A vyhraje.
   (c) Určete pravděpodobnost, že hráč B hodí právě k-krát.
   (d) Určete střední hodnotu počtu všech hodů.

Opakování z přednášky

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot $x_1, x_2, \dots$, říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Distribuční funkce** diskrétní náhodné veličiny

$$F(x) = \mathsf{P}(X \le x) = \sum_{x_k \le x} p_k, \qquad x \in \mathbb{R}$$

  je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k.
- **Kvantilová funkce** $F_X^{-1}(u) = \inf\{x : F_X(x) \ge u\}$ je skokovitá, neklesající a zprava spojitá.

Spojité rozdělení: Nechť pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F existuje funkce $f \ge 0$ taková, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pak říkáme, že X má **spojité rozdělení**. Funkce f se nazývá **hustota**.

Vlastnosti:

- Spojitá náhodná veličina nabývá **nespočetně mnoha** hodnot z nějakého podintervalu $\mathbb{R}$.
- **Rozdělení** veličiny X je charakterizováno hustotou f. Pro každou $B \in \mathcal{B}$ je pak $\mathsf{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$. Speciálně:
  (a) $1 = \mathsf{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$,
  (b) distribuční funkci je spojitá a lze ji spočítat jako $F(x) = \mathsf{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$,
  (c) pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je $\mathsf{P}(X = a) = \int_{\{a\}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,
  (d) je-li $a < b$, pak

$$\mathsf{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Střední hodnota X se spočte jako

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

  (existuje-li).
  Střední hodnota veličiny $Y = h(X)$ se spočte jako $\mathsf{E}h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,\mathrm{d}x$ (existuje-li).
- Kvantilová funkce $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ spojité veličiny X je inverzní funkce k distribuční funkci F. Medián veličiny X je taková hodnota $\hat{x}$, že $\mathsf{P}(X \le \hat{x}) = \mathsf{P}(X \ge \hat{x}) = 1/2$, tj. spočteme jej jako $\hat{x} = F^{-1}(1/2)$.