

## 1. cvičení

### Klasická pravděpodobnost a kombinatorika

1. S jakou pravděpodobností padne alespoň jedna šestka, házíme-li
  - (a) dvěma kostkami,
  - (b)  $n$  kostkami.
2. V porotě jsou tři členové. Dva z nich rozhodují s pravděpodobností 0,95 správně, třetí si hází (spravedlivou) mincí. Jaká je pravděpodobnost, že porota rozhodne správně, tj. alespoň dva porotci rozhodnou správně.
3. Ve třídě je 30 žáků. Určete pravděpodobnosti, že
  - (a) Honza a Marek mají narozeniny ve stejný měsíc?
  - (b) ze skupinky 5 studentů se alespoň dva narodili ve stejný měsíc.
  - (c) alespoň dva studenti ve třídě se narodili ve stejný den.Počítejte, že měsíc je  $\frac{1}{12}$  roku a rok má 365 dní.
4. V krabici je  $n$  černých a  $m$  bílých koulí. Které postupně náhodně vytahujeme ven (a již nevracíme zpět do krabice).
  - (a) Jaká je pravděpodobnost, že v  $k$ -tém tahu jsme vytáhli bílou kouli?
  - (b) Jaká je pravděpodobnost, že po  $K$ -tém tahu ( $K < m + n$ ) bylo vytaženo právě  $k$  bílých koulí?
5. **Maxwellovo-Boltzmannovo schéma.**

Mějme  $r$  **rozišitelných** předmětů a  $n$  přihrádek. Předměty náhodně rozmístíme do přihrádek, přičemž **všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná**. Určete

  - (a) pravděpodobnost, že daná přihrádka obsahuje právě  $k$  předmětů,  
(*Návod: Uvažujte uspořádané  $r$ -tice z čísel  $1 \dots n$  zaznamenávající, v které přihrádce daný předmět je.*)
  - (b) limitu této pravděpodobnosti pro  $n \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow \infty$  tak, že  $r/n \rightarrow \lambda > 0$ ,
  - (c) pravděpodobnost, že žádná přihrádka není prázdná.  
(*Návod: Je jednodušší spočítat pravděpodobnost jevu opačného.*)
6. **Boseovo-Einsteinovo schéma.**

Mějme  $r$  **nerozlišitelných** předmětů a  $n$  přihrádek. Předměty náhodně rozmístíme do přihrádek, přičemž **všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná**. Určete

  - (a) pravděpodobnost, že daná přihrádka obsahuje právě  $k$  předmětů,  
(*Návod: Uvažujte vhodné „grafické“ znázornění.*)
  - (b) limitu této pravděpodobnosti pro  $n \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow \infty$  tak, že  $r/n \rightarrow \lambda > 0$ ,
  - (c) pravděpodobnost, že žádná přihrádka není prázdná.  
(*Návod: Počítejte přímo pravděpodobnost tohoto jevu a opět použijte vhodné „grafické“ znázornění.*)
7. Házíme čtyřmi hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že
  - (a) padnou čtyři různá čísla,
  - (b) padnou pouze lichá čísla,
  - (c) součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6,
  - (d) součet čísel bude větší než 5?
8. Do vlaku s 10 vagóny nastoupilo 16 cestujících, přičemž každý cestující si náhodně vybral jeden vagón (bez ohledu na rozhodnutí ostatních cestujících). Určete pravděpodobnost, že do každého vagónu nastoupil alespoň jeden cestující.

## Opakování z přednášky

### Klasická definice pravděpodobnosti:

- $\Omega$  je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$  elementární jev
- $A \subset \Omega$  náhodný jev
- Nechť  $\Omega$  obsahuje **konečný** počet prvků, tj.  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , a necht' všechny elementární jevy  $\omega_i$  jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu  $A$  definujeme jako

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$

kde  $|A|$  = počet prvků množiny  $A$ .

### Vlastnosti:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ ,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$ ,
- jestliže  $A \subset B$ , pak  $P(A) \leq P(B)$  a  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ ,
- $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$ ,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ,
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$ .