

Zápočtová úloha NSTP154

Nechť $Y = \{Y(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ je stacionární gaussovské náhodné pole se s.j. spojitými trajektoriemi $x \rightarrow Y(x)$. Označme $\mu = \mathbb{E}Y(x)$, $\sigma^2 = \text{var} Y(x)$ a $C(h) = \text{cov}(Y(x), Y(x+h))$. Definujme náhodnou míru $\Lambda(B) = \int_B e^{Y(x)} dx$, $B \in \mathcal{B}^d$. Stacionární Coxův proces Φ s řídicí mírou Λ se nazývá logaritmicko-gaussovský Coxův proces (LGCP). Řídicí funkce intenzity procesu Φ je $Z(x) = e^{Y(x)}$. Podmíněně při $\{Z(X) : X \in \Phi\}$ nezávisle na sobě okótujeme body procesu Φ tak, že kóta v bodě X je funkcí $Z(X)$. Příkladem je následující kótování:

$$M(X) = a + bZ(X) + \varepsilon(X), \quad X \in \Phi,$$

kde $M(X)$ je kóta v bodě X , a a b jsou reálné parametry a $\{\varepsilon(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptylem τ^2 , přitom $\{\varepsilon(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ a Λ jsou nezávislé. Příklad $b = 0$ znamená nezávislé normálně rozdělené kóty. Příklad $b > 0$ modeluje situaci, kdy kóty jsou velké v místech s velkou intenzitou bodů. Oproti tomu $b < 0$ dává malé kóty v místech s velkou intenzitou. Tento způsob kótování se nazývá *kótování závislé na intenzitě (intensity-dependent marking)*. Výsledný kótovaný bodový proces $\Psi = \{(X, M(X)) : X \in \Phi\}$ se nazývá *kótovaný Coxův proces s kótami závislými na intenzitě (intensity-marked Cox process)*.

V následujících úlohách pracujte s následujícími volbami: $d = 2$, $\mu = 4,5$, $\sigma^2 = 2$, $C(h) = \sigma^2 \exp\{-5\|h\|^2\}$, $a = 50$, $b = -1/20$ a $\tau^2 = 4$.

1. Nasimulujte realizaci náhodného pole Y na množině $[0, 1]^2$ a vykreslete ji. Z této realizaci spočtete odhady parametrů μ a σ^2 a porovnejte je se skutečnými hodnotami.
2. Na základě realizace náhodného pole Y vykreslete příslušnou realizaci náhodného pole $Z = \{Z(x), x \in [0, 1]^2\}$. Spočtete $\mathbb{E}Z(x)$ a $\text{var} Z(x)$ a porovnejte je s empirickými odhady.
3. Použijte realizaci náhodného pole Z k vygenerování realizace LGCP s řídicí funkcí intenzity $Z(x)$. Body takto získaného bodového procesu přikreslete do obrázku s realizací Z .
4. Určete intenzitu λ bodového procesu Φ . Porovnejte ji s odhadem získaným z nasimulovaných dat.
5. Určete párovou korelační funkci bodového procesu Φ , vykreslete ji spolu s odhadem získaným z nasimulovaných dat.
6. Zkonstruuje kótovaný Coxův proces s kótami závislými na intenzitě a vykreslete jeho realizaci v jednom obrázku spolu s řídicí funkcí Z tak, aby bylo vidět, že v místech s velkou hodnotou Z jsou malé kóty a naopak.
7. Určete střední typickou kótu a porovnejte ji s empirickým odhadem. Spočtete $\mathbb{E}M(o)$, je tato hodnota větší, menší nebo rovna střední typické kóte?
8. Odvoďte tvar hustoty typické kóty, vykreslete ji a graficky porovnejte s odhadem získaným z nasimulované realizace kótovaného bodového procesu.
9. Odvoďte tvar korelační funkce kót, vykreslete ji a graficky porovnejte s odhadem získaným z nasimulované realizace kótovaného bodového procesu.
10. Odvoďte tvar E -funkce, vykreslete ji a graficky porovnejte s odhadem získaným z nasimulované realizace kótovaného bodového procesu.
11. Proveďte test nezávislosti kót na polohách.