Úlohy ke cvičení NMAI059

1. Klasická a geometrická pravděpodobnost

1. Házíme postupně čtyřikrát korunovou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padne jednou panna a třikrát orel? Jak se tato pravděpodobnost změní, když mince není symetrická a pravděpodobnost, že padne panna je 0,4 a že padne orel je 0,6?

2. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 3 kostkami je celkový součet bodů 7?

3. Házíme šesti hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padnou
a) vesměs různá čísla,
b) pouze lichá čísla?
Ještě než tyto pravděpodobnosti vypočítáte, zkuste předem uhodnout, která bude větší.

4. Základy teorie pravděpodobnosti vznikly v korespondenci mezi dvěma slavnými francouzskými matematiky B. Pascalem a P. de Fermatem v roce 1654. Zabývali se mimo jiné problémem, se kterým přišel šlechtic Chevalier de Méré (velký milovník hazardních her). Ze zkušenosti věděl, že je výhodné sázet na to, že při 4 hodech šestistěnnou kostkou padne šestka. Usuzoval, že při 24 hodech dvěma kostkami bude opět výhodné vsadit na to, že padnou na obou kostkách šestky. Ukázalo se však, že tomu tak není. Spočtěte pravděpodobnost, že při 4 hodech padne aspoň jednou šestka a pravděpodobnost, že při 24 hodech dvěma kostkami padnou aspoň jednou dvě šestky.

5. Předpokládejme, že dva stejně dobří hráči hrají o peníze sérii her, ve které není remíza. Dohodnou se, že kdo první vyhraje 5 her, získá celou vsazenou sumu peněz. V době, kdy první hráč vyhrál 3 hry a druhý 2 hry, museli svůj souboj přerušit. Jak si mají částku peněz spravedlivě rozdělit?

6. Jaká je pravděpodobnost nejvyšší výhry ve hře Šťastných deset? Sázející tipuje deset čísel z osmdesáti, přičemž je vylosována 20 výherních čísel.

7. Při pokru se rozdává 5 z 52 karet. Je větší pravděpodobnost, že dostaneme postupku (tj. pět po sobě jdoucích karet ne nutně stejné barvy) nebo full house (tj. trojici a dvojici karet stejných hodnot)?

8. **(narozeninový problém)** Ve třídě je n studentů. Jaká je pravděpodobnost, že existuje dvojice, která má narozeniny stejný den v roce? Pro jaké n je tato pravděpodobnost nejblíže hodnotě 0,5? Jaká je pravděpodobnost, že existuje student, který má narozeniny právě dnes? Pro jednoduchost neuvažujte přestupné dny a předpokládejte, že se během celého roku děti rodí rovnoměrně.

9. **(Banachova úloha)** Kuřák si zapaluje cigarety zápalkami ze dvou krabiček, mezi kterými volí náhodně. Za určitou dobu zjistí, že jedna krabička je prázdná. Jaká je pravděpodobnost toho, že v druhé krabičce je v té chvíli právě k zápalek, jestliže v každé krabičce bylo na počátku n zápalek?

10. **(problém šatnářky)** Sekretářka má n různých dopisů a stejný počet obálek určený různým adresátům. Dopisy vkládá do obálek náhodně. Určete pravděpodobnost, že
a) všechny dopisy se dostanou do správné obálky,
b) právě dva dopisy budou ve špatné obálce,
c) aspoň jeden dopis se dostane do správné obálky.

11. Dvě osoby A a B si smluvili schůzku na daném místě v neurčitém čase mezi 12.00 a 13.00. Každý z nich je ochoten čekat na druhého maximálně 10 minut. Předpokládáme, že přijdou nezávisle na sobě a okamžiky příchodu jsou stejně možné kdykoliv během uvedené hodiny. Určete pravděpodobnost, že se opravdu sejdou.

12. **(Buffonova úloha)** V rovině jsou narýsovány rovnoběžky vzdálené od sebe o d. Na tuto rovinu je vržena úsečka délky l ($l < d$). Určete pravděpodobnost toho, že úsečka protne některou z rovnoběžek.

13. Tyč dlouhá 200 mm je náhodně rozřezána na tři části. S jakou pravděpodobností je některá z těchto částí kratší než 10 mm, jestliže dva řezy jsou stejně možné v každém místě tyče?

2. Výběry s vracením a bez vracení, některé klasické modely

1. V osudí je 8 bílých, 8 modrých a 8 červených koulí. Vytáhneme jednu kouli zaznamenáme její barvu, kouli vrátíme, obsah osudí dobře promícháme a opět vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že obě koule mají stejnou barvu? Jak se tato pravděpodobnost změní, jestliže první vytaženou kouli do osudí nevracíme?

2. V urně máme 20 bílých a 2 černé koule. Vytáhneme m-krát kouli (po každém tahu kouli vracíme zpět). Kolik musí být nejméně tahů, aby pravděpodobnost vytažení alespoň jedné černé koule byla nejméně $1/2$. Kolik tahů bychom museli nejméně udělat v případě, kdy koule do urny nevracíme.

3. Ze stovky očíslovaných vstupenek byly náhodně vylosovány tři. Jaká je pravděpodobnost, že tyto tři vstupenky lze uspořádat v aritmetickou posloupnost?

4. **(Maxwellův-Boltzmannův model)** Mějme k koulí očíslovaných $1, 2, \ldots, k$ a n přihrádek. Každou kouli náhodně vhodíme do jedné z přihrádek. Jaká je pravděpodobnost, že v první přihrádce je právě m koulí?

5. **(Boseův-Einsteinův model)** Do vlaku s n vagóny nastoupilo k cestujících ($k \geq n$), kteří si zvolili vagóny náhodně. Určete pravděpodobnost, že do každého vagónu nastoupil alespoň 1 cestující.

6. **(Pólyovo urnové schéma)** Mějme urnu s a bílými a b černými koulemi. Z urny vytáhneme kouli, vrátíme ji zpět do urny a přidáme δ koulí stejné barvy. Tento postup opakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost, že mezi taženými je m bílých a $n-m$ černých? Jaká je pravděpodobnost, že i-tá tažená koule je bílá?

3. Nezávislost a podmíněná pravděpodobnost

1. V osudí je a bílých a b černých koulí. Vytáhneme jednu kouli, zaznamenáme její barvu a zase ji do osudí vrátíme. Po promíchání opět vytáhneme jednu kouli. Nechť náhodný jev A znamená, že první vytažená koule je bílá a jev B, že druhá vytažená koule je bílá. Jsou jevy A a B nezávislé? Jak je tomu v případě, kdy první vytaženou kouli do osudí nevracíme?

2. Házíme dvěma hracími kostkami. Jev A znamená, že na první kostce padlo liché číslo, jev B znamená, že na druhé kostce padlo sudé číslo, jev C znamená, že součet obou čísel je lichý. Jsou náhodné jevy A, B, C nezávislé? Jsou náhodné jevy A, B, C po dvou nezávislé?

3. Házíme dvěma šestistěnnými kostkami. Jaká je podmíněná pravděpodobnost toho, že na jedné kostce padne šestka za podmínky, že celkový součet je 8?

4. **(Monty Hall)** Finalista v jedné americké televizní soutěži je pozván před troje zavřené dveře. Za určitými dveřmi se skrývá auto a za zbylými dvěma pouze koza. Soutěžící si vybere jedny dveře. Poté moderátor otevře jedny ze zbylých dveří, ze kterých vyjde koza. Soutěžící se nyní může rozhodnout, které ze dvou zavřených dveří otevře. Jaká je nejlepší strategie pro soutěžícího, pokud chce vyhrát auto? Změnit svou volbu dveří nebo ne?

5. Při karetní hře jsou na stole čtyři různé karty (srdcové eso, křížové eso, srdcový král a křížový král). Soupeř si vybere dvě karty (zbylé dvě zůstanou skryté) a prohlásí, že má alespoň jedno eso. Jaká je pravděpodobnost, že má dvě esa? Změnila by se tato pravděpodobnost, pokud by řekl, že má srdcové eso?

6. V osudí je 8 koulí (5 bílých a 3 černé). Vytáhneme postupně dvě koule (nevracíme je zpět do osudí). Určete pravděpodobnost, že právě jedna z dvou vytažených koulí je bílá (zkuste přitom využít vzorce pro úplnou pravděpodobnost).

7. Cestovatel přijede do města, kde je 30% lhářů, 15% náladových a 55% normálních lidí. Lháři lžou s pravděpodobností 0,9. Normální lidi mluví s pravděpodobností 0,75 pravdu. Náladoví lidé v polovině případů lžou a v polovině říkají pravdu. Cestovatel potkal jednoho z obyvatel města a zeptal se ho, jestli je normální. Jaká je pravděpodobnost, že mu cizinec odpoví „ano“?

8. Ve třídě je 70% procent chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek. Náhodně vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?

9. Z 18 střelců se 5 trefí na cíl s pravděpodobností 0,8, 7 s pravděpodobností 0,6, 4 s pravděpodobností 0,5 a 2 s pravděpodobností 0,4. Náhodně vybraný střelec minul. Ke které skupině patří s největší pravděpodobností a s jakou?

10. Nějakým druhem rakoviny trpí 0,5% populace. Lékaři mají možnost testovat rakovinu s určitou mírou jistoty. Senzitivita testu (test je pozitivní u nemocného člověka) je 0,95. Specificita testu (test je negativní u zdravého člověka) je 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že člověk s pozitivním testem je opravdu nemocný?

4. Náhodná veličina

1. Nechť je v urně b bílých a c černých míčků. Jaká je pravděpodobnost, že v n tazích s vracením vytáhneme bílý míček právě k-krát?

2. Mějme k_n koulí, z nichž každou náhodně vhodíme do jedné z n rozlišitelných přihrádek. Uvažujme limitní chování v případě, kdy roste počet koulí i přihrádek do nekonečna tak, že v limitě je průměrný počet koulí připadajících na jednu přihrádku stabilní:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = \lambda,$$

kde $\lambda \in (0,\infty)$. Jaká je limita pravděpodobnosti toho, že v první přihrádce je právě m koulí, pokud
a) koule jsou rozlišitelné,
b) koule jsou nerozlišitelné.

3. Pravděpodobnost úspěchu v daném pokusu je p. Jaká je pravděpodobnost, že v sérii nezávislých pokusů je počet neúspěchů před r-tým úspěšným pokusem roven přesně k?

4. Z 20 chlapců a 15 dívek vytváříme náhodně družstva s 8 členy. Jaká je pravděpodobnost, že družstvo bude mít právě k chlapců?

5. Předpokládejme, že X má diskrétní rozdělení takové, že platí $P(X = k) = ck^2$ pro $k = 1,2,3$ a $P(X = k) = 0$ jinak. Spočítejte
a) hodnotu c,
b) $P(X \geq 2)$,
c) $P(X \in \{1,3\})$.

6. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ cx^2 & \text{pro } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Jaké hodnoty může nabývat konstanta c?

7. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou hustotami:
a) cx pro $x \in (0,1)$,
b) cx pro $x \in (-1,2)$,
c) $cx \sin x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
d) $c\mathrm{e}^{x}$ pro $x \in (0,\infty)$,
e) $c\mathrm{e}^{-x}$ pro $x \in (0,\infty)$,
f) $c\mathrm{e}^{-|x|}$,
g) $\frac{c}{1+x^2}$.
Mimo vymezený interval je nabízená funkce vždy rovna nule a c je vhodná konstanta. Pokud daná funkce je hustotou, tuto konstantu určete.

8. Náhodná veličina X má hustotu $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$, $0 < x < \pi$. Spočtěte její distribuční funkci.

9. Dokažte, že exponenciální rozdělení je rozdělení „bez paměti“. To znamená, že pro náhodnou veličinu X, která má exponenciální rozdělení s parametrem λ, platí

$$P(X \geq x + y \mid X \geq x) = P(X \geq y), \quad \forall x, y > 0.$$

10. Pro náhodnou veličinu X s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-1,1)$ určete pravděpodobnosti
a) $P(X^2 > \frac{1}{2})$,
b) $P(X^2 > \frac{1}{2} \mid X > 0)$.

5. Střední hodnota a momenty náhodných veličin

1. Náhodná veličina X nabývá hodnot $k = 1,2,\dots,m$ se stejnými pravděpodobnostmi $\frac{1}{m}$. Spočtěte $\mathrm{E}X$ a $\operatorname{var} X$.

Návod: Využijte vztahu $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

2. Náhodná veličina nabývá hodnoty k, $k = 1, 2, \ldots$, s pravděpodobností, která je úměrná 3^{-k}. Určete střední hodnotu takové náhodné veličiny.

3. Nechť náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem λ. Spočtěte $\mathrm{E}X(X-1)\cdots(X-k+1)$, kde k je nějaké přirozené číslo. Využijte tento výsledek k výpočtu střední hodnoty, rozptylu a třetího centrálního momentu $\mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^3$.

4. Náhodná veličina X má hustotu $f(x) = 3x^2$, $0 < x < 1$. Určete její střední hodnotu a rozptyl.

6. Další charakteristiky a transformace náhodných veličin

1. Spočtěte momentovou vytvořující funkci binomického rozdělení s parametry n a p. Pomocí ní určete střední hodnotu a rozptyl.

2. Spočtěte momentovou vytvořující funkci normovaného normálního rozdělení. Jak bude vypadat momentová vytvořující funkce obecného normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$?

3. **(lognormální rozdělení)** Nechť X má normální rozdělení s parametry (μ, σ^2). Určete hustotu, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny e^X.

4. Nechť X má normované normální rozdělení. Určete hustotu X^2.

5. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem λ. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = \lfloor X \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x.

6. Nechť distribuční funkce náhodné veličiny X je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ \sin x & \text{pro } x \in (0, \pi/2), \\ 1 & \text{pro } x > \pi/2. \end{cases}$$

Určete distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $W = \sin X$.

7. Náhodný vektor

1. Z urny obsahující 2 bílé koule a 2 černé koule vybíráme za sebou s vracením 2 koule. Definujeme náhodné veličiny X_1, X_2 následovně:

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{jestliže první tažená koule je bílá,} \\ 0 & \text{jestliže první tažená koule je černá,} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{jestliže druhá tažená koule je bílá,} \\ 0 & \text{jestliže druhá tažená koule je černá.} \end{cases}$$

Určete distribuční funkci vektoru (X_1, X_2) a zjistěte, zda jsou náhodné veličiny X_1 a X_2 nezávislé. Jak by situace vypadala v případě výběru bez vracení?

2. Házíme třikrát mincí. Označme X počet líců v prvních dvou hodech a Y počet rubů v posledních dvou hodech. Určete sdružené rozdělení vektoru (X, Y). Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?

3. Hodíme šestistěnnou kostkou a označíme X počet ok na kostce vydělený dvěma a zaokrouhlený nahoru. Potom hodíme X-krát mincí a počet orlů označíme Y. Najděte sdružené rozdělení vektoru (X, Y) a odtud marginální rozdělení veličiny Y.

4. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení
   a) na intervalu $(0, 2)$,
   b) na intervalu $(-1, 1)$.
Označme $Y = X^2$. V obou případech spočtěte kovarianci a korelační koeficient veličin X a Y.

5. Náhodný vektor (X, Y) má hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} & \text{pro } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete c tak, aby f byla hustota. Spočtěte hustotu X a hustotu Y. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé? Spočtěte $\mathrm{E}(X^2 + Y^2)$.

8. Čebyševova nerovnost a centrální limitní věta

1. Na cvičení je přihlášeno 30 studentů. Každý student přijde s pravděpodobností 0,8 (nezávisle na ostatních). Jaká je nejmenší možná kapacita posluchárny, aby se s pravděpodobností alespoň 0,95 všichni přítomní studenti do místnosti vešli?

2. Kolik je třeba vzít náhodných přirozených čísel, abychom s pravděpodobností alespoň 99% mohli tvrdit, že je mezi nimi alespoň deset sudých čísel?

3. Nechť ν_n značí relativní četnost líců (poměr počtu líců ku n) v n hodech mincí (mince je symetrická a hody provádíme nezávisle). Zjistěte, kolik musíme provést hodů, aby se s pravděpodobností 0,95 lišila relativní četnost od hodnoty 1/2 nejvýše o 0,05. Řešte pomocí a) Čebyševovy nerovnosti, b) centrální limitní věty.

4. Jaká je pravděpodobnost, že při 10 000 hodech symetrickou mincí padne rub ve více než 4 900 případech? Použijte centrální limitní větu.

5. Pojišťovna pojišťuje 1 000 lidí stejného věku. Pravděpodobnost úmrtí během roku je pro každého z nich 0,01. Každý pojištěnec zaplatí 150 korun. V případě úmrtí vyplatí pojišťovna rodině 10 000 korun. Jaká je pravděpodobnost, že pojišťovna utrpí ztrátu?

6. Házíme stokrát šestistěnnou kostkou. Odhadněte pravděpodobnost, že výsledný součet leží v intervalu $(320, 380)$. Řešte nejprve pomocí Čebyševovy nerovnosti a potom pomocí centrální limitní věty.

7. Bylo sečteno 300 čísel zaokrouhlených na 1 desetinné místo. Pomocí centrální limitní věty určete, jak velká je pravděpodobnost, že absolutní hodnota chyby součtu vzniklého zaokrouhlením není větší než 1.

9. Bodové a intervalové odhady

1. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je výběr z rovnoměrného rozdělení na $(0, \theta)$, kde $\theta > 0$. Rozhodněte, zda následující odhady parametru θ jsou nestranné a určete který z nich má menší rozptyl.
a) $\hat{\theta}_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$,
b) $\tilde{\theta}_n = \frac{n+1}{n} \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

2. Mějme geometrické rozdělení $P(X = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Určete maximálně věrohodný odhad parametru p. Rozhodněte o jeho nestrannosti a konzistenci. Jak by vypadal momentový odhad?

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny splňující pro každé $i = 1, \ldots, n$:

$$P(X_i = 0) = 1 - p - q,\ P(X_i = 1) = p,\ P(X_i = 2) = q,$$

kde $p, q \in (0, 1)$ jsou parametry takové, že $p+q < 1$. Určete odhad p a q metodou maximální věrohodnosti i metodou momentů. Liší se odvozené odhady?

4. Určete maximálně věrohodné odhady parametrů (μ, σ^2) normálního rozdělení. Rozhodněte o jejich nestrannosti a konzistenci.

5. Uvažujme hustotu ve tvaru $f(x) = (a+1)x^a$ pro $x \in (0, 1)$, kde $a > -1$ je reálný parametr. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou f. Odhadněte parametr a metodou maximální věrohodnosti.

6. Předpokládejme, že se hodnota IQ celé populace řídí normálním rozdělením $N(\mu, 225)$. Kolik pozorování by bylo třeba provést, aby 95% interval spolehlivosti pro μ nebyl širší než 3 body?

7. Nechť $X_1, \ldots, X_{100}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, 16)$. Určete oboustranný 95% interval spolehlivosti pro parametr μ, jestliže výběrový průměr je $\bar{X} = 3$. Jak by se změnila délka tohoto intervalu, kdybychom požadovali spolehlivost 99% (zvětšila, zmenšila nebo zůstala stejná)?

8. Devět měření určité fyzikální konstanty μ dalo tyto hodnoty:

1,04; 1,03; 1,06; 1,04; 1,04; 1,01; 1,03; 1,04; 1,03.

Výsledky měření považujeme za nezávislé náhodné veličiny s tímtéž normálním rozdělením o neznámých parametrech μ, σ^2. Sestrojte intervalový odhad pro μ.

10. Testování hypotéz

1. Během 16 červencových dnů byly naměřeny následující teploty:

22, 26, 28, 24, 27, 20, 29, 32,
28, 21, 25, 27, 26, 28, 30, 22.

Testujte hypotézu, že průměrná teplota v červenci je 25°C. Volte hladinu $\alpha = 0{,}05$.

2. Nechť $X_1, \dots, X_{25}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Byly vypočteny tyto hodnoty výběrového průměru a výběrového rozptylu: $\bar{X} = 5{,}8$, $S^2 = 4$.

a) Testujte na 5% hladině nulovou hypotézu $H_0 : \mu = 5$ proti alternativní $H_1 : \mu \neq 5$. Změní se naše rozhodnutí, pokud uvažujeme jednostrannou alternativu $H_1 : \mu > 5$?

b) Při testu $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu > \mu_0$ byla zjištěna p-hodnota $p = 0{,}063$. Jaké rozhodnutí lze učinit na 10% hladině významnosti? Co lze říct o hodnotě μ_0 (je menší, větší nebo rovna 5)?

3. Zácvik laboranta na určitém optickém přístroji považujeme za ukončený, jestliže při měření určitého objektu dosahuje rozptylu nanejvýš 0,0196. Učiňte za předpokladu normality rozdělení závěr na hladině $\alpha = 0{,}05$, jestliže pokus vedl k výsledkům:

6,42; 6,44; 6,38; 6,21; 6,38; 6,60; 6,51.

4. Pro porovnání dvou metod učení nazpaměť bylo mezi 18 pokusnými dvojicemi vybráno 9 párů se stejnou nebo velmi podobnou hodnotou IQ. Náhodně zvolená osoba z každého páru použila při učení metodu A, druhá osoba metodu B.

A :	90	86	72	65	44	52	46	38	43
B :	85	87	70	62	44	53	42	35	46

Testujte hypotézu, že obě metody jsou stejně dobré. Volte hladinu testu $\alpha = 0{,}05$.

5. Potravinářský výrobek je balen automatickým přístrojem. Vážením jsme získali následující údaje o přesném množství několika náhodně vybraných výrobků před a po seřízení balícího automatu.

Před seřízením:	243,2	244,3	252,1	247,5	251,0	251,7
	253,0	252,5	251,8	250,1	247,3	
Po seřízení:	250,2	249,9	251,1	249,1	249,5	250,2

Ověřte hypotézu, že se střední hodnota seřízením nezměnila. Předpokládejte, že odpovídající náhodné veličiny jsou nezávislé a mají normální rozdělení se stejným rozptylem. Hladinu testu volte $\alpha = 0{,}05$.

11. Další úlohy k procvičování

1. Mějme zásobu nerozlišitelných koulí a n přihrádek. Vybereme náhodně $m < n$ přihrádek a do každé z nich umístíme kouli. Tento postup opakujeme nezávisle na sobě k-krát. Jaká je pravděpodobnost, že všechny přihrádky budou obsazené?

2. Házíme šestistěnnou hrací kostkou a zjišťujeme, ve kterém hodu poprvé padla šestka. Určete střední hodnotu této náhodné veličiny.

3. Určete distribuční funkci maxima počtu ok při hodu třemi kostkami. Spočtěte střední hodnotu.

4. Nechť X má binomické rozdělení s parametry $n = 4$ a $p = \frac{2}{3}$. Označme $Y = (X - 2)^2$. Určete rozdělení Y (tj. jakých hodnot a s jakou pravděpodobností veličina Y nabývá).

5. Spočítejte distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c(x - x^2) & \text{pro } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde c je vhodná konstanta.

6. Nechť X je počet líců při třech hodech korunovou mincí, nechť Y je počet líců při čtyřech hodech pětikorunovou mincí. Označme celkový počet líců v těchto pokusech jako W. Určete korelační koeficient X a W.

7. Určete korelační koeficient složek náhodného vektoru $(X, Y)^T$, který má rovnoměrné rozdělení v trojúhelníku ohraničeném přímkami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ (uvnitř tohoto trojúhelníku je hustota rovna vhodné konstantě, jinak je hustota nulová).

8. Uvažujme jednotkový kruh, který je vepsán do čtverce o straně délky dvě jednotky. Výpočet obsahu kruhu pomocí metody Monte Carlo probíhá tak, že vygenerujeme n náhodných bodů ve čtverci a spočteme, kolik z nich padne do kruhu, tento počet označme X_n. Odhad obsahu jednotkového kruhu potom je $4X_n/n$. Kolik musíme vygenerovat bodů, aby absolutní hodnota relativní chyby tohoto odhadu (tj. $|4X_n/n\pi - 1|$) byla menší než 0,01 s pravděpodobností alespoň 0,95.

9. Na vysoké škole je 10% studentů s prospěchem do 1,1, jak velkou skupinu studentů musíme vzít, aby s pravděpodobností 0,95 bylo 8 až 12% s prospěchem do 1,1.