

Zápočtová písemka NSTP039 – 27. 3. 2008

1. Mějme Wienerův proces $\{W_t, t \geq 0\}$ a definujme $B_t = W_t - tW_1$, $t \in [0, 1]$. Zjistěte, zda náhodný proces $\{B_t, t \in [0, 1]\}$
 - a) je slabě stacionární proces a určete jeho autokovarianční funkci, (2 body)
 - b) je spojitý podle středu, (1 bod)
 - c) má derivaci podle středu, (2 body)
 - d) existuje Riemannův integrál $\int_0^1 B_t dt$. (1 bod)
2. Nechť $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečným kladným rozptylem σ^2 . Definujme náhodnou posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ předpisem $X_t = a + bY_t + cY_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$, kde a, b, c jsou reálné konstanty.
 - a) Rozhodněte, zda $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární a spočtěte autokovarianční funkci. (2 body)
 - b) Určete spektrální distribuční funkci a spektrální hustotu (pokud existuje). (3 body)
3. Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ a $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jsou vzájemně nezávislé stacionární centrované náhodné posloupnosti takové, že $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ má spektrální hustotu $f_X(\lambda) = 7,5$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$ a $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ má spektrální hustotu $f_Y(\lambda) = \omega \cos \frac{\lambda}{2}$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, kde $\omega \geq 0$ je konstanta. Určete autokovarianční funkci posloupnosti $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$, kde $Z_t = X_t + Y_t$ pro každé $t \in \mathbb{Z}$. (5 bodů)