

Funkce komplexní proměnné

Cauchyova věta

1. Vypočtěte integrál $I = \int_{\varphi} |z| \bar{z} dz$, kde φ je záporně orientovaný obvod jednotkového polokruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.
2. Vypočtěte $I = \int_C \frac{ze^z dz}{z^2+4}$, kde C je kladně proběhnutá kružnice o středu $2i$ a poloměru 2 .
3. Spočtěte
 - a) $\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i} dz$
 - b) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz$.
4. Spočtěte $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, je-li C kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu 2 .
5. Nechť funkce $f(z)$ je regulární v pásu $-a < \operatorname{Im} z < a$ a vyhovuje podmínce $f(z) \rightarrow 0$ když $z \rightarrow \infty$, $-a < \operatorname{Im} z < a$. Dokažte, že když $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konverguje, pak pro každé $\alpha \in (-a, a)$ integrál $\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(x) dx$ také konverguje a jeho hodnota nezávisí na α .
6. Dokažte:
Je-li f spojitá v oblasti $0 < |z - a| \leq r_0$, $0 \leq \arg(z - a) \leq b$, kde $r_0 > 0$, $0 < b \leq 2\pi$ a existuje-li vlastní limita $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = A$, potom $\lim_{r \rightarrow 0+} \int_{C_r} f(z) dz = iAb$, kde C_r je kladně proběhnutý oblouk kružnice $|z - a| = r$, vyřatý úhlem $0 \leq \arg(z - a) \leq b$.
7. Spočtěte (použijte předchozí příklad)
 - a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
 - b) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.