

Cvičení z NSTP022
7. týden cvičení (1. – 5. 4. 2013)

Borelova a Cantelliho věty

1. Nekonečně krát hodíme symetrickou šestistěnnou kostkou. Zjistěte, s jakou pravděpodobností
 - (a) padne šestka v nekonečně mnoha hodech,
 - (b) padne šestka ve všech až na konečně mnoho hodů,
 - (c) padne nekonečně krát 100 šestek za sebou.
2. Nechť X_1, X_2, \dots je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda = 1$. Určete pravděpodobnost, že
 - (a) nastane nekonečně mnoho jevů $A_i = [X_i > \ln i^2]$,
 - (b) nastane nekonečně mnoho jevů $A_i = [X_1 > \ln i^2]$,
 - (c) nastane nekonečně mnoho jevů $A_i = [X_i > \ln i]$,
 - (d) nastane nekonečně mnoho jevů $A_i = [X_1 > \ln i]$.
3. Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, pro které $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$ a $P(X_n = 1) = 1/n$.
 - (a) Zjistěte, zda X_n konverguje k 0 v pravděpodobnosti.
 - (b) Ukažte, že X_n nekonverguje k 0 skoro jistě.
4. Nechť má veličina X hustotu $f(x) = \frac{x^m}{m!} e^{-x}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = 0$ jinak, kde $m \in \mathbb{N}$.
 - (a) Spočítejte $E X$ a $\text{var } X$.
 - (b) Pomocí Čebyševovy nerovnosti ukažte, že platí

$$P(0 < X < 2(m+1)) \geq \frac{m}{m+1}.$$

5. Nechť X_n jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny. Ukažte, že
 - (a) je-li $E |X_1| = \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nekonečně mnoho jevů $[|X_n| \geq n]$.
 - (b) je-li $E |X_1| < \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nejvýše konečně mnoho jevů $[|X_n| \geq n]$.
 - (c) Položte $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Využijte předchozích výsledků a dokažte, že pokud $E |X_1| = \infty$, pak Y_n nekonverguje skoro jistě k nule.
 - (d) Dokažte, že Y_n konverguje v pravděpodobnosti k nule.

Opakování z přednášky

Definice. Nechť A_1, A_2, \dots je posloupnost náhodných jevů. Označme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (7.1)$$

Jev $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ znamená, že nastalo nekonečně mnoho jevů A_n , jev $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ znamená, že nastanou všechny A_n až na konečně mnoho.

Platí

$$\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right)^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c. \quad (7.2)$$

Příklad: Nechť $\Omega = \{0, 1\}$ a uvažujme posloupnost jevů $\{0\}, \{1\}, \{0\}, \{1\}, \{0\}, \{1\}, \dots$, pak jejich \limsup je $\{0, 1\}$ a jejich \liminf je \emptyset .

Borel-Cantelliho 0-1 zákony:

- (Cantelli) Je-li $\{A_n\}$ posloupnost jevů takových, že $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, pak

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0. \quad (7.3)$$

- (Borel) Nechť je $\{A_n\}$ posloupnost **nezávislých** jevů. Pak

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0, \text{ je-li } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty, \quad (7.4)$$

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1, \text{ je-li } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty. \quad (7.5)$$

Konvergence v pravděpodobnosti a konvergence s.j. Nechť X_1, X_2, \dots a X jsou náhodné veličiny definované na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Řekneme, že X_n konverguje k X **skoro jistě** (s.j.), jestliže

$$P(\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1. \quad (7.6)$$

Tj. pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ platí, že $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$. Jedná se tedy o konvergenci skoro všude vzhledem k míře P .

Řekneme, že X_n konverguje k X v **pravděpodobnosti**, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) = 0. \quad (7.7)$$

Tj. míra množiny těch $\omega \in \Omega$, pro které $|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon$, konverguje k nule. Jedná se tedy o konvergenci v míře P .

Čebyševova nerovnost: Je-li $X \in L_2$, pak

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var}(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{pro všechna } \varepsilon > 0. \quad (7.8)$$

Výsledky

1. (a) 1, (b) 0, (c) 1.
2. (a) 0, (b) 0, (c) 1, (d) 0.
3. (a) platí $X_n \xrightarrow{P} 0$, (b) neplatí $X_n \rightarrow 0$ s.j.
4. (a) $\mathbf{E} X = m + 1$, $\mathbf{var}(X) = m + 1$.
5. (a) a (b) plyne z 0-1 zákonů (Borelova věta) a z nerovností

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(|X| \geq n) - 1 \leq \mathbf{E}|X| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(|X| \geq n),$$

které platí pro libovolnou náhodnou veličinu X (viz např. Lemma 4.7. ve skriptech).

- (c) Plyne z definice konvergence skoro jistě a z toho, že dle (b) nastane nekonečně mnoho jevů $[|Y_n| \leq 1]$ s pravděpodobností jedna.
- (d) Plyne z definice konvergence v pravděpodobnosti.