

### Náhodné vektory

- Házíme třikrát mincí. Označme  $X$  počet líců v prvních dvou hodech a  $Y$  počet rubů v posledních dvou hodech.
  - Určete sdružené rozdělení vektoru  $(X, Y)$ .
  - Určete marginální rozdělení veličin  $X$  a  $Y$ . Jsou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé?
  - Spočtěte kovarianci  $\text{cov}(X, Y)$  a korelační koeficient  $\rho_{XY}$ . Jaký je vztah mezi nezávislostí dvou veličin a jejich kovariancí/korelací?

- Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci Kč), jsou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$ . Ze zkušenosti víte, že vektor  $(X, Y)'$  má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{pro } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Určete konstantu  $c > 0$ .
- Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
- Spočtěte kovarianci  $\text{cov}(X, Y)$  a korelační koeficient  $\rho_{XY}$ . Interpretujte.
- Jaká je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte více než dvojnásobek toho, co za jídlo?
- Spočtěte  $E\left(\frac{1}{X+Y}\right)$ .

*(Na rozmyšlení: Jak vypadá distribuční funkce  $F(x, y)$ ?)*

- Dvojice součástek má dobu životnosti popsanou sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Jaké je rozdělení dob životnosti jednotlivých součástek? Jsou tyto doby nezávislé?
  - S jakou pravděpodobností první součástka přežije druhou?
- Krajta naklade  $N$  vajíček, kde  $N$  je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením  $\text{Po}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ . Pravděpodobnost, že se z vajíčka vylíhne živá krajička, je  $p \in (0, 1)$ .
    - Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhne právě  $k$  krajiček? Jaký je očekávaný počet vylíhnutých krajiček?
    - Jaké je rozdělení  $N$ , jestliže víme, že se vylíhlo  $k$  krajiček?
    - Jsou veličiny udávající počet nakladených vajíček  $N$  a počet vylíhnutých krajiček nezávislé?

- Náhodná veličina  $X$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $(-1, 1)$ . Označme  $Y = X^2$ . Spočtěte kovarianci veličin  $X$  a  $Y$  a jejich korelační koeficient  $\rho_{XY}$ . Jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé?

- Náhodný vektor  $(X, Y)'$  má rovnoměrné rozdělení na množině  $M$ , kde

$$M = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 1], y \geq x\}.$$

- Rozhodněte, zda jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé.
  - Spočítejte  $\text{cov}(X, Y)$ .
- Nechť  $X_1, \dots, X_n$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí  $F$  a hustotou  $f$ . Označme  $U = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$  a  $V = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ .
    - Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny  $U$ .
    - Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny  $V$ .
    - Nechť  $F$  a  $f$  odpovídají rovnoměrnému rozdělení na intervalu  $[0, 1]$ . Spočtěte v tomto případě  $E U$ ,  $\text{var}(U)$ ,  $E V$  a  $\text{var}(V)$ .

## Opakování z přednášky

**Kovariance a korelace:** Nechť  $E X^2 < \infty$ ,  $E Y^2 < \infty$ . Kovariance  $\text{cov}(X, Y)$  náhodných veličin  $X, Y$  je definována jako

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - E X)(Y - E Y) = E(XY) - (E X)(E Y).$$

Koeficient korelace  $\text{cor}(X, Y) = \rho_{XY}$  je definován jako

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var } X} \sqrt{\text{var } Y}},$$

je-li  $\text{var } X, \text{var } Y > 0$ . Platí vždy  $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ .

### Marginální rozdělení:

- (a) Jestliže má  $\mathbf{X} = (X, Y)^T$  spojité rozdělení s hustotou  $f(x, y)$ , pak marginální hustotu veličiny  $X$  spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Podobně pro marginální hustotu  $f_Y$  veličiny  $Y$ .

- (b) Jestliže má  $\mathbf{X} = (X, Y)^T$  diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot  $(x_i, y_j)$ , pak marginální rozdělení veličiny  $X$  spočteme jako

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j).$$

### Nezávislost:

- (a) Jestliže má  $\mathbf{X} = (X, Y)^T$  spojité rozdělení s hustotou  $f$ ,  $X$  má marginální hustotu  $f_X$  a  $Y$  má hustotu  $f_Y$ , pak jsou veličiny  $X, Y$  nezávislé právě tehdy, když

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (b) Jestliže má  $\mathbf{X} = (X, Y)^T$  diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot  $(x_i, y_j)$ , pak jsou veličiny  $X, Y$  nezávislé právě tehdy, když

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j) \text{ pro všechna } x_i, y_j.$$

**Beta funkce:** Při výpočtech se někdy hodí používat tzv. **beta funkci**, která je pro  $a, b > 0$  definovaná jako

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Souvislost s gama funkcí (viz předchozí cvičení):

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

## Výsledky

1.(a) sdružené rozdělení:

		Y		
		0	1	2
X	0	0	1/8	1/8
	1	1/8	1/4	1/8
	2	1/8	1/8	0

(b) marginální rozdělení:  $P(X = 0) = 1/4$ ,  $P(X = 1) = 1/2$ ,  $P(X = 2) = 1/4$ , totéž pro  $Y$ . Veličiny  $X$  a  $Y$  jsou závislé.

(c)  $\text{cov}(X, Y) = -1/4$ ,  $\rho_{XY} = -1/2$ . Platí:  $X, Y$  nezávislé (a ex.  $E X^2, E Y^2$ )  $\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$ . Opačné tvrzení obecně neplatí.

2.(a)  $c = 1$ ,

(b)  $f_X(x) = x + 1/2$  pro  $x \in (0, 1)$  a  $f_X(x) = 0$  jinak;  $f_Y(y) = y + 1/2$  pro  $y \in (0, 1)$  a  $f_Y(y) = 0$  jinak; veličiny  $X$  a  $Y$  jsou závislé,

(c)  $\text{cov}(X, Y) = -1/144$ ,  $\rho_{XY} = -1/11$ ,

(d)  $P(Y > 2X) = 5/24$ ,

(e)  $E\left(\frac{1}{X+Y}\right) = 1$ .

3.(a) obě součástky mají exponenciální rozdělení:  $f_X(x) = e^{-x}$  pro  $x > 0$  a  $f_X(x) = 0$  jinak,  $f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}$  pro  $y > 0$  a  $f_Y(y) = 0$  jinak; doby životnosti jsou nezávislé,

(b)  $P(X > Y) = 1/3$ .

4.(a)  $P(X = k) = (\lambda p)^k e^{-\lambda p} / k!$ ,  $k = 0, 1, \dots$  tj. počet narozených krajiček má Poissonovo rozdělení  $\text{Po}(\lambda p)$  a tedy  $E X = \lambda p$ ,

(b)  $P(N = n | X = k) = \frac{\lambda^{n-k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)}$  pro  $n = k, k+1, \dots$ ,

(c) veličiny jsou závislé.

5.  $\rho_{XY} = 0$ , veličiny jsou závislé.

6. (a) Veličiny  $X$  a  $Y$  jsou závislé, (b)  $\text{cov}(X, Y) = 1/36$ .

7.(a)  $F_U(u) = [F(u)]^n$ ,  $f_U(u) = n[F(u)]^{n-1} f(u)$ ,

(b)  $F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n$ ,  $f_V(v) = n[1 - F(v)]^{n-1} f(v)$ ,

(c)  $E U = n/(n+1)$ ,  $\text{var}(U) = n/[(n+1)^2(n+2)]$ ,  
 $E V = 1/(n+1)$ ,  $\text{var}(V) = n/[(n+1)^2(n+2)]$ .