Cvičení z `NSTP022`
4. 3. – 8. 3. 2013

Náhodná veličina — Diskrétní rozdělení

1. V peněžence máte dvě papírové padesátikoruny, jednu stokorunovou a jednu dvousetkorunovou bankovku. Zloděj Vám z peněženky náhodně vybere dvě bankovky. Označme jako X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.
   (a) Určete rozdělení X a spočtěte Vaši očekávanou ztrátu.
   (b) Nakreslete distribuční funkci veličiny X. Jaké jsou obecné vlastnosti distribuční funkce?
   (c) Zloděj následně zaplatí 100 Kč za špatné parkování a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme jako Y veličinu udávající částku, která zlodějovi po tom všem zůstane. Určete rozdělení a očekávanou hodnotu Y.
   (d) Určete rozptyl veličiny Y.
   (e) S jakou pravděpodobností si bude zloděj moci večer v hospodě koupit jedno pivo za 21 Kč?

2. Test obsahuje n otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrtává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek.
   (a) Odvoďte rozdělení veličiny X. Jak se toto rozdělení nazývá? (Znáte ho z přednášky.)
   (b) Jaký je střední (očekávaný) počet správně zodpovězených otázek?
   (c) Jaký je rozptyl počtu správně zodpovězených otázek?
   (d) Jaká je pravděpodobnost, že student odpoví alespoň jednu otázku správně?
   (e) Jaký by byl střední počet a rozptyl správně zodpovězených otázek, kdyby na každou otázku bylo k možných odpovědí a z nich vždy právě jedna správná? Pro jaké k je rozptyl maximální?

   Poznámka: Výpočet střední hodnoty $\mathsf{E}\,X$ a rozptylu $\mathsf{Var}\,X$ můžete provést buď z definice nebo pomocí momentové vytvořující funkce.

3. Veličina X určuje počet příchozích hovorů na policejní stanici za jednu hodinu. Lze předpokládat, že na stanici přijde právě k hovorů s pravděpodobností $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \dots,$ kde $\lambda > 0$.
   (a) Ověřte, že se jedná o pravděpodobností rozdělení. Jak se toto rozdělení nazývá?
   (b) Určete očekávaný počet příchozích hovorů za jednu hodinu. (Výpočet proveďte z definice.)
   (c) Vypočítejte $\mathsf{E}\,X$ a rozptyl $\mathsf{Var}\,X$ pomocí momentové vytvořující funkce.

4. Uvažujme loterii, ve které je každý stírací los výherní s pravděpodobností p a nevýherní s pravděpodobností $1 - p$, kde $p \in (0, 1)$. Předpokládejme, že jsme se rozhodli kupovat losy, dokud nevyhrajeme (a pak už žádné další nekoupíme).
   (a) Určete rozdělení a očekávaný počet zakoupených nevýherních losů.
   (b) Předpokládejme, že výhra v dané loterii je 100 000 Kč a jeden los stojí 100 Kč. Jaké musí být alespoň p, aby se nám celá naše strategie vyplatila?

5. Na stole leží dvě urny A a B: V urně A jsou dvě bílé a dvě černé kuličky a v urně B jsou dvě černé a jedna bílá kulička. Náhodně vybereme z každé urny jednu kuličku a z těchto dvou kuliček pak náhodně zvolíme jednu. Definujme náhodnou veličinu X jako identifikátor toho, zda jsme takto obdrželi bílou kuličku (tj. $X = 1$, je-li výsledná kulička bílá, a $X = 0$ jinak). Určete rozdělení veličiny X, její střední hodnotu a rozptyl. Jak se toto rozdělení nazývá?

6. Viz příklad 8 z minulého cvičení (K $\to$ F $\to$ C). Jaký je očekávaný počet Cyrilových hodů kostkou?

7. Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $1, 2, \dots, n$, a to s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = k) = c \cdot k$ $k = 1, \dots, n$. Určete konstantu $c > 0$ tak, aby se jednalo o pravděpodobnostní rozdělení, a střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$.

Opakování z přednášky

Náhodná veličina X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

- **Rozdělení** náhodné veličiny X je pravděpodobnostní míra P_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že pro $B \in \mathcal{B}$ je $\mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}(X \in B) = \mathsf{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\})$.
- **Distribuční funkce** je funkce reálné proměnné $x \in \mathbb{R}$ definovaná jako $F(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$. Distribuční funkce jednoznačně určuje rozdělení veličiny X!
- **Střední hodnota** veličiny X je definována jako $\mathsf{E}\, X = \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{d}\mathsf{P}(\omega)$. Vyjadřuje „očekávanou hodnotu" veličiny X.

- **Rozptyl** veličiny X je definován jako $\mathsf{Var}\,(X) = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}\, X)^2 = \mathsf{E}\, X^2 - (\mathsf{E}\, X)^2$ (jestliže $\mathsf{E}\, X$ a $\mathsf{E}\, X^2$ existují). Rozptyl je vždy **nezáporné** číslo!
- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí
$$\mathsf{E}\,(a + bX) = a + b\,\mathsf{E}\, X, \quad \mathsf{Var}\,(a + bX) = b^2\, \mathsf{Var}\,(X).$$
- **Momentová vytvořující funkce** veličiny X je funkce reálné proměnné $t \in \mathbb{R}$ definovaná jako $\psi(t) = \mathsf{E}\, e^{tX}$ (existuje-li). Platí
$$\mathsf{E}\, X = \psi'(0), \quad \mathsf{Var}\,(X) = \psi''(0) - (\psi'(0))^2.$$

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot $x_1, x_2, \ldots$, říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Distribuční funkce** je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k.
- **Střední hodnota** X se spočítá jako
$$\mathsf{E}\, X = \sum_k x_k\, \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k\, p_k \quad \text{(existuje-li).}$$
Střední hodnota náhodné veličiny $Y = h(X)$ se spočítá jako
$$\mathsf{E}\, Y = \mathsf{E}\, h(X) = \sum_k h(x_k)\, \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k h(x_k)\, p_k \quad \text{(existuje-li),}$$
nebo přímo z rozdělení Y jako $\mathsf{E}\, Y = \sum_k y_k\, \mathsf{P}(Y = y_k)$.

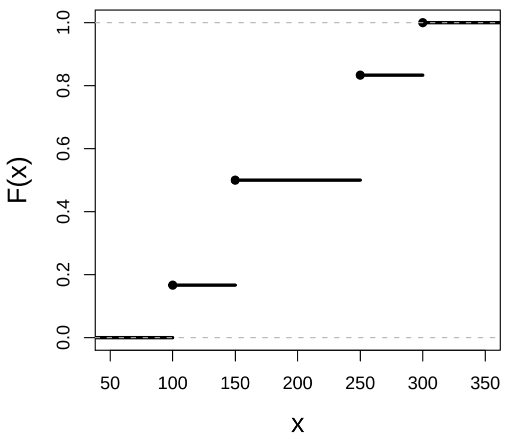
Užitečné vzorce

- Binomická věta: Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n-k)} = (a + b)^n$.
- Pro $x \in \mathbb{R}$ platí $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$ (rozvoj exponenciály).
- Je-li $|q| < 1$, pak $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1 - q}$ (geometrická řada).
Derivováním podle q dostaneme $\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} = \dfrac{1}{(1 - q)^2}$.

Výsledky

1.(a) rozdělení X: $\mathsf{P}(X = 100) = 1/6$, $\mathsf{P}(X = 150) = 1/3$, $\mathsf{P}(X = 250) = 1/3$, $\mathsf{P}(X = 300) = 1/6$; očekávaná ztráta $\mathsf{E}\,X = 200$,

(b) $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 100, \\ 1/6, & x \in [100, 150), \\ 1/2, & x \in [150, 250), \\ 5/6, & x \in [250, 300), \\ 1, & x \geq 300. \end{cases}$$



(c) rozdělení Y: $\mathsf{P}(Y = 0) = 1/6$, $\mathsf{P}(Y = 10) = 1/3$, $\mathsf{P}(Y = 30) = 1/3$, $\mathsf{P}(Y = 40) = 1/6$; střední hodnota $\mathsf{E}\,Y = 20$,

(d) $\mathsf{Var}\,Y = 200$,

(e) $\mathsf{P}(Y \geq 21) = 1/2$.

2. (a) $\mathsf{P}(X = k) = \binom{n}{k}(1/4)^k(3/4)^{n-k}$ pro $k = 0, \ldots, n$, binomické rozdělení s parametry n a $1/4$,
(b) $\mathsf{E}\,X = n/4$,
(c) $\mathsf{Var}\,X = 3n/16$,
(d) $\mathsf{P}(X \geq 1) = 1 - (3/4)^n$
(e) $\mathsf{E}\,X = n/k$, $\mathsf{Var}\,X = n(k-1)/k^2$, rozptyl je maximální pro $k = 2$
Výpočet $\mathsf{E}\,X$ a $\mathsf{Var}\,X$ buď přímo z definice nebo pomocí momentové vytvořující funkce. Pro binomické rozdělení $\mathsf{Bi}(n,p)$ je $\psi(t) = [p\mathrm{e}^t + 1 - p]^n$.

3. (a) Poissonovo rozdělení s parametrem λ, (b) $\mathsf{E}\,X = \lambda$, (c) $\mathsf{Var}\,X = \lambda$, $\psi(t) = \exp\{-\lambda + \lambda \mathrm{e}^t\}$

4. (a) geometrické rozdělení: $\mathsf{P}(X = k) = (1-p)^k p$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots,$
(b) Očekávaný zisk z loterie je kladný, pokud $p > 0{,}001$. Jiný přístup by mohl být, že požadujeme, že zisk bude kladný s pravděpodobností větší než např. $\frac{1}{2}$. Potom potřebujeme, aby $p > 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/999} \doteq 0{,}000\,694$.

5. alternativní rozdělení s parametrem $p = 5/12$, $\mathsf{E}\,X = 5/12$, $\mathsf{Var}\,X = 35/144$

6. $\mathsf{E}\,X = 150/91$

7. $c = \frac{2}{n(n+1)}$, $\mathsf{E}\,X = (2n+1)/3$