

Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

1. Nechť A, B jsou neslučitelné jevy. Mohou být tyto dva jevy nezávislé?
2. Házíme dvěma pravidelnými kostkami.
 - (a) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka za podmínky, že celkový součet je 8?
 - (b) Jsou jevy [padla šestka] a [celkový součet je 8] nezávislé?
 - (c) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka na 1.kostce za podmínky, že padla šestka alespoň na jedné kostce?
3. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy A =[na modré kostce padlo sudé číslo], B =[na zelené kostce padlo liché číslo], C =[součet čísel je lichý]. Jsou náhodné jevy A, B, C po dvou nezávislé? Jsou jevy A, B, C nezávislé?
4. Házíme dvanáctistěnnou kostkou. Rozhodněte o nezávislosti náhodných jevů A =[padlo některé z čísel $\{4, 5, 6, 7, 8, 12\}$], B =[padlo některé z čísel $\{1, 5, 6, 9, 10, 11\}$], C =[padlo některé z čísel $\{1, 2, 3, 5\}$].
5. Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.
 - (a) Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraná osoba dlouhé vlasy?
 - (b) Vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?
6. Máme tři truhly se dvěma mincemi. V truhle A jsou dvě zlaté mince, v truhle B dvě stříbrné mince a v truhle C zlatá a stříbrná mince. Náhodně vybereme truhlu a z ní vytáhneme náhodně minci. Ta je zlatá. Jaká je pravděpodobnost, že i druhá mince v této truhle je zlatá?
7. Na stole leží náhodný počet mincí: pravděpodobnost, že je na stole právě k mincí je rovna $2/3^k$ pro $k = 1, 2, \dots$. Hodíme všemi mincemi najednou. Jestliže na všech mincích padl orel, pak dostaneme odměnu.
 - (a) Je pravděpodobnější, že odměnu dostaneme nebo že odměnu nedostaneme?
 - (b) Jestliže jsme odměnu nedostali, jaká je pravděpodobnost, že na stole leželo právě n mincí?
8. Karel, Franta a Cyril postupně hází kostkou v pořadí $K \rightarrow F \rightarrow C$. Komu první padne šestka, ten vyhrává, a hra v takovém případě končí.
 - (a) Určete pravděpodobnost, s jakou Cyril vyhraje v k -tém kole.
 - (b) Určete pravděpodobnost, že Franta hodil kostkou právě k -krát.
 - (c) Určete, s jakou pravděpodobností vyhraje Karel (resp. Franta, Cyril).
9. U dvojčat je pravděpodobnost narození dvou chlapců rovna p a narození dvou děvčat rovna q , kde $0 < p + q < 1$. U dvojčat různého pohlaví je stejně pravděpodobné, že se jako první narodí dívka a že se jako první narodí chlapec. S jakou pravděpodobností se narodí dva chlapci, jestliže je prvorozené dítě z dvojčat chlapec?
10. V kuchyni je N talířů s buchtami. Na i -tém talíři je a_i buchet s tvarohovou náplní a b_i buchet s povidlovou náplní, což navenek bohužel nepoznáme. Proto náhodně vybereme jeden talíř a z něj jednu buchtu. Zjistíme, že je povidlová. S jakou pravděpodobností jsme zvolili k -tý talíř?

Připomenutí z přednášky

Nechť A, B jsou náhodné jevy, $P(B) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za podmínky B definujeme jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Nezávislost. Náhodné jevy A, B se nazývají nezávislé, jestliže platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Náhodné jevy A_1, \dots, A_n jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_r}).$$

(Tj. součinnovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice, ... atd.)

Věta o úplné pravděpodobnosti:

Nechť A, B_1, B_2, \dots jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $P(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$. Pak

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

Bayesova věta:

Nechť A, B_1, B_2, \dots jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $P(B_i) > 0$ pro všechna i a nechť $P(A) > 0$. Pak

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Věta o násobení pravděpodobností:

Jestliže náhodné jevy A_1, \dots, A_n splňují $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$, pak

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot P(A_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) \cdot \dots \cdot P(A_2 | A_1) P(A_1).$$

Výsledky

1. Mohou být nezávislé, pokud pravděpodobnost alespoň jednoho z jevů je rovna 0.
2. a) $2/5$, b) jsou závislé, c) $6/11$
3. Jevy jsou po dvou nezávislé. Nejsou nezávislé, protože $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.
4. Nejsou nezávislé.
5. a) 0,31, b) $24/31 = 0,7741935$
6. $2/3$
7. (a) $P(\text{odměna}) = 2/5$, a proto je pravděpodobnější, že odměnu nedostaneme.
(b) $P(n \text{ mincí} \mid \text{není odměna}) = \frac{5}{3} \frac{2(2^n - 1)}{6^n}$ pro $n = 1, 2, \dots$,
 $P(n \text{ mincí} \mid \text{odměna}) = 5 \left(\frac{1}{6}\right)^n$ pro $n = 1, 2, \dots$
8. (a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-1} \frac{1}{6}$ pro $k = 1, 2, \dots$
(b) $\frac{91}{216} \left(\frac{5}{6}\right)^{3k-2}$ pro $k = 1, 2, \dots$ a $1/6$ pro $k = 0$
(c) Karel $36/91$, Franta $30/91$, Cyril $25/91$
9. $\frac{2p}{1+p-q}$. V roce 2010 bylo v ČR porozeno 2 446 dvojčat, z toho v 706 případech to byli dva chlapci a v 717 případech dvě dívky. Na základě těchto dat by tedy odhad hledané pravděpodobnosti byl 0,58.
10. $\frac{\frac{b_k}{a_k+b_k}}{\sum_{i=1}^N \frac{b_i}{a_i+b_i}}$