Cvičení k základům pravděpodobnosti

Připomeňte si: klasický pravděpodobnostní prostor, elementární jev, náhodný jev, doplňkový jev, pravděpodobnost, věta o inkluzi a exkluzi, podmíněná pravděpodobnost, nezávislé jevy, věta o násobení pravděpodobností, věta o celkové pravděpodobnosti, Bayesova věta

Komentář: Některé příklady jsou snadné, některé těžší, případně vyžadující více počítání. Hlavním jejich úkolem je umožnit „osahat si“ důkladně některé principy a přemýšlet nad jejich podstatou.

Příklad 1 (klasický pravděpodobnostní prostor—šestistěnná kostka)**.** Uvažujme hod šestistěnnou symetrickou kostkou.

- Jaký je pravděpodobnostní prostor? Co jsou elementární jevy?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo, liché číslo?

Příklad 2 (klasický pravděpodobnostní prostor – hod dvěma desetistěnnými kostkami)**.** Uvažujme hod dvěma symetrickými desetistěnnými kostkami, bílou a černou, přičemž výsledek hodu na jedné kostce neovlivní výsledek na kostce druhé.

- Jak vypadá pravděpodobnostní prostor? Kolik má prvků?
- Jaká je pravděpodobnost, že na bílé kostce padne sudé číslo, pokud na černé padlo liché číslo?
- Jaká je pravděpodobnost jevu, že součet čísel na obou kostkách je menší než 5? A jaká je pravděpodobnost, že součin je alespoň 60?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne sudý součet a lichý součin?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne sudý součet nebo lichý součin?

Příklad 3 (Narozeniny)**.** Předpokládejme, že pravděpodobnost narození v určitý den v nepřestupném roce je 1/365. Pro skupinu nepříbuzných lidí narozených v roce 1989 určete

- pravděpodobnost, že alespoň dva lidé slaví narozeniny ve stejný den, je-li velikost skupiny n.
- nejmenší velikost n takovou, aby pravděpodobnost, že dva lidé mají narozeniny ve stejný den byla alespoň 1/2.
- nejmenší velikost n takovou, aby pravděpodobnost, že dva lidé mají narozeniny ve stejný den byla alespoň p.
- pravděpodobnost, že tři lidé slaví narozeniny ve stejný den, je-li velikost skupiny n.

Příklad 4 (Losování)**.** Uvažujme hru, při které se tahá náhodně pět různých čísel z dvaceti. Najděte vhodný pravděpodobnostní prostor a určete jeho velikost. Jaká je pravděpodobnost vytažení určité konkrétní pětice? Určete dále přibližnou pravděpodobnost, že ve 2 000 hodech se libovolná vytažená pětice bude opakovat.
[užijte nějakou vhodnou aproximaci]

Příklad 5 (Šatnářka)**.** Do šatny divadla si n návštěvníků uložilo kabát. Nepořádná šatnářka špatně připíchla čísla ke kabátům a po skončení představení vydává kabáty náhodně. Navrhněte vhodný pravděpodobnostní prostor pro tuto úlohu.

- Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden návštěvník dostane přímo od šatnářky svůj kabát?
- Jaká je limita předchozí pravděpodobnosti, pokud $n \to \infty$?
- Jaká je pravděpodobnost, že návštěvník s lístkem l dostane kabát návštěvníka s lístkem m a naopak (alespoň dva lidé budou mít prohozený kabát).

Příklad 6 (Maxwellovo-Boltzmanovo schéma)**.** Máme-li r rozlišitelných předmětů a n přihrádek, kolik je možností jak rozdělit předměty do přihrádek (jak velký je pravděpodobnostní prostor)?

- Určete pravděpodobnost, že daná přihrádka obsahuje právě k předmětů.
- Jaká je limita předchozí pravděpodobnosti, pokud $n \to \infty$ a $r_n/n \to \lambda > 0$?
- Jaká je pravděpodobnost, že žádná přihrádka není prázdná?

Příklad 7 (Boseovo-Einsteinovo schéma)**.** Máme-li r nerozlišitelných předmětů a n přihrádek, kolik je možností jak rozdělit předměty do přihrádek (jak velký je pravděpodobnostní prostor)?

- Určete pravděpodobnost, že daná přihrádka obsahuje právě k předmětů.
- Jaká je limita předchozí pravděpodobnosti, pokud $n \to \infty$ a $r_n/n \to \lambda > 0$?
- Jaká je pravděpodobnost, že žádná přihrádka není prázdná?

Příklad 8 (Pólyovo schéma)**.** Máme-li v osudí b bílých a c černých koulí, jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli?

- Představme si, že po každém tahu přidáme do urny Δ koulí stejné barvy jako byla vytažena v posledním tahu ($\Delta = 0$ znamená, že kouli pouze vrátíme do osudí, $\Delta = -1$ znamená, že kouli odebereme a do osudí nevracíme). Jaká je pravděpodobnost, že mezi n taženými koulemi bude B bílých?
- Jaká je pravděpodobnost, že i-tá tažená koule bude bílá?
- Dovedete si představit vhodný pravděpodobnostní prostor pro popis tohoto pokusu? Jak vypadá klasický pravděpodobnostní prostor pro popis jednoho tahu? Dal by se popsat jeden tah pomocí pravděpodobnostního prostoru s dvouprvkovou množinou elementárních jevů $\Omega = \{\mathcal{B}, \mathcal{C}\}$

Příklad 9 (Variace na Pólyovo schéma)**.** V osudí jsou tři bílé a tři černé koule. Po lichém tahu přidáme vždy 1 bílou kouli, po sudém tahu vždy 1 černou kouli.

- Jaká je pravděpodobnost, že ve druhém tahu vytáhneme bílou kouli?
- Jaká je pravděpodobnost, že v k-tém tahu vytáhneme bílou kouli?
- Jaká je pravděpodobnost, že po pátém tahu (před přidáním) nebude v osudí žádná bílá koule?
- Jaká je pravděpodobnost, že po šestém tahu nebude v osudí žádná bílá koule?

Příklad 10 (Dva hráči I)**.** Dva hráči hrají střídevě proti sobě hru v kostky. Začíná hráč A, který vyhraje, padne-li jednička, poté následuje hráč B, jemuž k výhře musí padnout pětka či šestka.

- Určete pravděpodobnost výhry hráče A.
- Určete rozdělení počtu všech hodů do výhry jednoho z hráčů.
- Určete rozdělení počtu hodů hráče B až do vítězství jednoho z hráčů.

Příklad 11 (Dva hráči II)**.** Dva hráči střídavě hrají hru, v níž hráč A (začínající) zvítězí s pravděpodobností p a hráč B (druhý v pořadí) s pravděpodobností q.

- Jaké musí být p a q aby pravděpodobnosti výhry hráče A i hráče B byly stejné? [stačí jedno řešení]
- Jaké je pak rozdělení počtu hodů hráče A i hráče B? Je (může být) stejné?

Příklad 12 (Nové a staré míčky)**.** Před hrou máme v krabici 9 míčů, z toho jsou tři již dříve použité. Pro hru si vezmeme náhodně z krabice čtyři míče.

- Jaké je rozdělení počtu použitých míčů po hře?
- Zopakujeme-li za týden opět hru (opět se čtyřmi míči), jaké bude rozdělení počtu použitých míčů poté?
- Jak se změní rozdělení z předchozího bodu, pokud si za týden vybereme ke hře jen tři míče?

Příklad 13 (Úplná pravděpodobnost)**.** V osudí je náhodný počet koulí, jedna bílá a N černých. Přitom N se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem 1. Jaká je pravděpodobnost, že z osudí vytáhneme černou kouli?

Příklad 14 (Skříňka a mince)**.** Ve skříňce jsou tři zásuvky. Jedna z nich (nevíme která) obsahuje dvě zlaté mince, druhá obsahuje dvě stříbrné mince a třetí obsahuje zlatou a stříbrnou minci. Náhodně vybereme zásuvku a z ní náhodně vytáhneme minci. Je zlatá. Jaká je pravděpodobnost, že i druhá vybraná mince je zlatá? [zkuste si také představit vhodný pravděpodobnostní prostor pro tento experiment]

Příklad 15 (Studenti a taháky)**.** Studenty čeká písemná práce a tak si připraví taháky, aby zvýšili svou šanci na úspěch. Test obsahuje celkem pět otázek a pravděpodobnost úspěšného zodpovězení otázky bez taháku je $1/2$. Použitím taháku k dané otázce zvýší student šanci na úspěšné zodpovězení otázky na $4/5$. Předpokládejme, že student si vyrobí i taháků, kde $i = 0, 1, \dots, 5$ a to s pravděpodobnostmi $p_i = 0,1$ pro $i = 0, 1, 4, 5$ a $p_2 = p_3 = 0,3$.

- Jaké je rozdělení počtu správně zodpovězených otázek bez použití taháků?
- Jaké je rozdělení počtu správně zodpovězených otázek s použitím taháků? [počet taháků je náhodné číslo]
- Jaké je rozdělení počtu použitých taháků, pokud student správně odpověděl všech pět otázek?

Příklad 16 (Skupiny studentů)**.** Tři skupiny studentů řeší obtížný příklad. Ve skupině A jsou 3 velmi chytří studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.8. Ve skupině B jsou 4 průměrní studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.6. Ve skupině C jsou 2 slabí studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností pouze 0.4.

- S jakou pravděpodobností náhodný student vyřeší příklad?
- Náhodně vybraný student příklad nevyřešil. Ze které skupiny nejpravděpodobněji byl?
- Studenti pracují nezávisle. S jakou pravděpodobností bude příklad vyřešen?

Příklad 17 (Dvě kostky)**.** Hodíme pravidelnou šestistěnnou kostkou. Podle výsledku C (číslo od jedné do šesti) si vybereme druhou kostku. S pravděpodobností $C/10$ si vezmeme desitistěnnou kostku, s pravděpodobností doplňkovou si vezmeme šestistěnnou kostku.

- Jaká je pravděpodobnost, že ve druhém hodu jsme házeli desetistěnnou kostkou, pokud výsledkem druhého hodu je číslo 5?
- Jaká je pravděpodobnost, že ve druhém hodu jsme házeli desetistěnnou kostkou, pokud výsledkem druhého hodu je číslo $i \in 1, 2, \dots, 10$?
- Jaké je rozdělení výsledku prvního hodu, pokud nám po druhém hodu padlo číslo 8?

Příklad 18 (Nezávislé jevy)**.** Dokažte, nebo vyvraťte, pro náhodné jevy A a B jejichž pravděpodobnost je nenulová a menší než jedna následující tvrzení:

- Je-li $P[A|B] = P[A]$ pak A a B jsou nezávislé.
- Je-li $P[A|B] = P[A|B^C]$ pak A a B jsou nezávislé.
- Je-li $P[A|B] = P[B|A]$ pak A a B jsou nezávislé.
- Jsou-li A a B disjunktní, pak A a B jsou nezávislé.
- Je-li $P[A] = P[B]$, pak $P[A|B] = P[B|A]$.
- Jsou-li A a B nezávislé, pak $P[A] = P[B]$.

Cvičení k náhodným veličinám

Připomeňte si: náhodná veličina, rozdělení náhodné veličiny, distribuční funkce, hustota, diskrétní náhodná veličina, střední hodnota, rozptyl, momenty, Čebyševova nerovnost, vybraná diskrétní a spojitá rozdělení, normální rozdělení, funkce náhodné veličiny a její rozdělení.

Příklad 19 (Dvě kostky)**.** Hodíme dvěma šestistěnnými kostkami. Označme X náhodnou veličinu udávající součet výsledků na kostkách.

- Jaký je vhodný (klasický) pravděpodobnostní prostor?
- V jaké množině $\mathcal{M}$ má náhodná veličina X hodnoty [*uvědomte si tedy, odkud kam je X měřitelné zobrazení*]?
- Jak vypadá (indukované) rozdělení náhodné veličiny X na množině $\mathcal{M}$ [*zde si uvědomte, jak vypadá indukovaná míra P_X ve vztahu k míře P na klasickém pravděpodobnostním prostoru*]?

Příklad 20 (Tři kostky)**.** Hodíme třemi šestistěnnými kostkami, bílou, zelenou a černou. Označme X náhodnou veličinu udávající součet výsledků na bílé kostce a na zelené kostce, zatímco Y udává součet výsledků na bílé kostce a na černé kostce

- Jaký je vhodný (klasický) pravděpodobnostní prostor?
- V jakých množinách ($\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_Y$) mají náhodné veličiny X a Y hodnoty?
- Jak vypadá (indukované) rozdělení náhodných veličin X a Y?

Příklad 21 (Test)**.** Test obsahuje 8 otázek, ke kterým je nabídnuto 5 možností odpovědi a, b, c, d, e, z nichž právě jedna je správná.

- Jaké je rozdělení počtu správných odpovědí při náhodné volbě odpovědi? Jak se toto rozdělení nazývá? Načrtněte distribuční funkci tohoto rozdělení.
- Jaká je pravděpodobnost, že alespoň 4 otázky odpovíme správně?
- Jaký je střední počet správně zpodpovězených otázek?

Příklad 22 (Dvě urny)**.** Na stole leží dvě urny A a B. V urně A jsou dvě bílé a dvě černé kuličky. V urně B jsou dvě černé a jedna bílá kulička. Náhodně vybereme z každé urny jednu kuličku a z těchto dvou kuliček pak náhodně zvolíme jednu. Definujme máhodnou veličinu X jako identifikátor toho, že jsme takto obdrželi bílou kuličku (tj., $X = 1$, je-li výsledná kulička bílá a $X = 0$ jinak).

- Určete rozdělení náhodné veličiny X.
- Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.
- Jak se nazývá rozdělení náhodné veličiny X?

Příklad 23 (Loterie)**.** Uvažujme loterii, ve které je každý stírací los výherní s pravděpodobností $p \in (0,\ 1)$ a nevýherní s pravděpodobností $1 - p$. Předpokládejme, že jsme se rozhodli kupovat losy, dokud nevyhrajeme (a pak už žádné další nekoupíme).

(1) Určete rozdělení a očekávaný počet zakoupených nevýherních losů.
(2) Určete, s jakou pravděpodobností bude vaše strategie zisková.
(3) Určete očekávaný zisk, je-li výherní vždy jeden los ze sta.

Příklad 24 (Objem krychle)**.** Hrana krychle má náhodnou délku X s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0,\ 10]$, tj. X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x \in [0,\ 10], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a rozptyl objemu krychle.

Příklad 25 (Čekání na autobus)**.** Doba mezi příjezdy autobusů má exponenciální rozdělení ve tvaru

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{10}} & x \ge 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

(1) Určete hustotu doby mezi příjezdy autobusů.
(2) Spočtěte střední hodnotu doby čekání na autobus.
(3) Jaká je pravděpodobnost, že budeme na autobus čekat déle než 25 minut?

Příklad 26 (Distribuční funkce)**.** Nechť F a G jsou distribuční funkce, Dokažte, že

(1) pro $\alpha \in (0,\ 1)$ je $\alpha F + (1 - \alpha)G$ též distribuční funkce,
(2) $F \cdot G$ je distribuční funkce,
(3) pro $r \in \mathbb{N}$ je F^r též distribuční funkce (čeho?),
(4) pro $r \in \mathbb{N}$ je $1 - (1 - F)^r$ též distribuční funkce (čeho?).

Příklad 27 (Posloupnost distribučních funkcí)**.** Nechť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost distribučních funkcí tak, že $F_n(x)$ je cauchyovská $\forall x$. Obecně $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$ není distribuční funkce. Nalezněte příklady, kdy existuje $H = \lim\limits_{n\to\infty} F_n$, ale

(1) H nesplňuje $\lim\limits_{x\to\infty} H(x) = 1$,
(2) H nesplňuje $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = 0$,
(3) H není zprava spojitá.

Nalezněte dále příklady, kdy

(1) F_n jsou distribuční funkce spojitých náhodných veličin, ale H je distribuční funkcí diskrétní náhodné veličiny,
(2) F_n jsou distribuční funkce diskrétních náhodných veličin, ale H je distribuční funkcí spojité náhodné veličiny.

Příklad 28 (Geometrické rozdělení)**.** Nezávislé pokusy reprezentují náhodné veličiny X_1, $X_2, \dots$ s rozdělením $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$ $(i = 1, 2, \dots)$. Na úspěch v řadě nezávislých pokusů můžeme čekat libovolně dlouho, pokud $P(X_i = 1) = p < 1$ $(i = 1, 2, \dots)$. Nechť X je počet neúspěchů před prvním úspěchem.

- Určete rozdělení náhodné veličiny X.
- Spočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.
  (1) Počítejte z definice.
  (2) Počítejte pomocí momentové vytvořující funkce.

Příklad 29 (Negativně binomické rozdělení)**.** Nezávislé pokusy reprezentují náhodné veličiny X_1, $X_2, \dots$ s rozdělením $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1-p$ $(i = 1, 2, \dots)$. Na M-tý úspěch v řadě nezávislých pokusů můžeme čekat libovolně dlouho, pokud $P(X_i = 1) = p < 1$ $(i = 1, 2, \dots)$. Nechť X je počet neúspěchů před M-tým úspěchem.

- Určete rozdělení náhodné veličiny X.
- Spočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

Příklad 30 (Poissonovo rozdělení)**.** Poissonovo rozdělení může modelovat počet jevů, které nastávají s malou pravděpodobností v krátkém časovém úseku, za nějaký delší časový interval. Označme $\lambda > 0$ intenzitu výskytu sledovaných událostí (např. počet spamů došlých do e-mailové schránky za 1 den, počet telefonních hovorů přišlých za 1 hodinu do ústředny, …). Náhodná veličina X řídící se Poissonovým rozdělením nabývá hodnot 0, 1, … s následujícími pravděpodobnostmi:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad (k = 0,\, 1,\, \dots).$$

- Spočtěte z definice střední hodnotu náhodné veličiny X.
- Určete momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny X.
- Určete rozptyl náhodné veličiny X.

Příklad 31 (Rozdělení sinu)**.** Nechť náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, \pi]$. Jaké rozdělení má náhodná veličina $Y = \sin X$?

Příklad 32 (Rozdělení kosinu)**.** Nechť náhodná veličina X má rozdělení popsané předpisem

$$P(X = k\pi/4) = \mathrm{e}^{-1}\frac{1}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots.$$

Jaké rozdělení má náhodná veličina $Y = \cos X$.

Příklad 33 (Náhodný počet kostek)**.** Na stole leží N šestistěnných kostek, kde N je náhodná veličina s rozdělením $P(N = i) = 1/6$, $i = 1, \dots, 6$.

- Spočtěte střední hodnotu a rozptyl veličiny N.
- Určete rozdělení N za podmínky, že součet čísel na všech kostkách dohromady je roven 5.
- Určete rozdělení N za podmínky, že na kostkách padly právě 4 šestky.
- Porovnejte (např. graficky) původní pravděpodobnosti $P(N = i)$ s podmíněnými pravděpodobnostmi z předchozích bodů.

Příklad 34 (Čekání na výhru)**.** Házíme dvěma hracími kostkami najednou dokud nepadne součet 5 nebo součet 7 (na obou kostkách dohromady).

- S jakou pravděpodobností padne dříve součet 5 než součet 7?
- Určete rozdělení, očekávanou hodnotu a rozptyl celkového počtu hodů kostkou.
- Určete rozdělení, očekávanou hodnotu a rozptyl celkového počtu hodů kostkou za podmínky, že hra byla ukončena pětkou (totéž se sedmičkou).

Příklad 35. Mějme dán pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou $c = 1$. Úhel mezi odvěsnou b a přeponou c je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, \pi/2)$.

- S jakou pravděpodobností je daný trojúhelník rovnoramenný?
- Jaké je rozdělení úhlu, který svírá odvěsna a s přeponou c? S jakou pravděpodobností leží tento úhel v intervalu $(\pi/6, \pi/3)$?
- Určete rozdělení délky odvěsny a. Načrtněte graf hustoty a distribuční funkce tohoto rozdělení. S jakou pravděpodobností je odvěsna a delší než $1/2$?
- Spočtěte střední délku odvěsny a a její rozptyl.
- Určete očekávaný obsah trojúhelníku.

Příklad 36 (Normální rozdělení)**.** Nechť náhodná veličina X má normální rozdělení s parametry μ a σ^2.

- Určete střední hodnotu a rozptyl X.
- Spočítejte momentovou vytvořující funkci X a ovšřte předchozí výsledek.
- Jaké rozdělení má náhodná veličina $Y = aX + b$, kde $a \neq 0$?
- Navrhněte transformaci τ takovou, že náhodná veličina $Z = \tau(X)$ bude mít normované normální rozdělení.

Příklad 37 (Hustoty)**.** Rozhodněte, kdy jde o hustoty a zda existují všechny momenty.

- Definujme
$$f(x) = \begin{cases} cx^{-a}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$
Pro jaká a a c jde o hustotu? Spočtěte obecný moment tohoto rozdělení. Existují všechny momenty?
- Definujme
$$f(x) = \frac{c}{1 + (x - a)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Pro jaká a a c jde o hustotu? Existují všechny momenty? A umíte je spočítat?
- Definujme
$$f(x) = cx^{a-1} \exp(-bx^a), \qquad x > 0.$$
Pro jaká a, b a c jde o hustotu? Existují všechny momenty? A umíte je spočítat?
- Definujme
$$f(x) = c \exp\left(-\frac{|x - a|}{b}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Pro jaká a, b a c jde o hustotu? Existují všechny momenty? A umíte je spočítat?

Příklad 38 (Exponenciální rozdělení)**.** Dokažte následující dvě tvrzení.

- Nechť náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem l. Pak
$$P[X > x + a | X > x] = P[X > a], \qquad \text{pro každé } x > 0, a > 0.$$
- Nechť náhodná veličina X je nezáporná, má absolutně spojité rozdělení a splňuje
$$P[X > x + a | X > x] = P[X > a], \qquad \text{pro každé } x > 0, a > 0.$$
Pak X má exponenciální rozdělení pro nějaký parametr $l > 0$.

Příklad 39 (Exponenciální rozdělení II)**.** Nechť náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem $l > 0$, čili hustota X je tvaru
$$f(x) = \begin{cases} l \exp(-lx), & x > 0 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$
Určete obecné momenty X (existují všechny?) a momentovou vytvořující funkci X (existuje konečná na otevřeném okolí nuly; kde existuje konečná?).
[připomeňte si gama funkci a pokuste se ji použít pro výpočty]

Příklad 40 (Gama rozdělení)**.** Nechť náhodná veličina X má rozdělení s hustotou tvaru

$$f(x) = \begin{cases} Cl^p x^{p-1} \exp(-lx), & x > 0 \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $l > 0$ a $p > 0$ jsou parametry.

- Určete C tak, aby šlo o hustotu.
- Určete obecné momenty náhodné veličiny X.
- Dokážete spočítat momentovou vytvořující funkci?
- Porovnejte momenty a momentovou vytvořující funkci X a náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem l (viz příklad *exponenciální rozdělení II*).

Příklad 41 (Beta rozdělení)**.** Nechť náhodná veličina X má rozdělení s hustotou tvaru

$$f(x) = \begin{cases} Cx^{p-1}(1-x)^{q-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $p > 0$ a $q > 0$ jsou parametry.

- Určete C tak, aby šlo o hustotu.
- Určete obecné momenty náhodné veličiny X.
- Dokážete spočítat momentovou vytvořující funkci.

[připomeňte si definici beta funkce a použijte ji při výpočtech]

Cvičení k náhodným vektorům

Připomeňte si: náhodná vektor a jeho rozdělení, distribuční funkce a její vlastnosti, hustota vůči σ-konečné součinové míře, diskrétní náhodná veličina, střední hodnota reálné funkce náhodného vektoru, rozptyl a varianční matice, vlastnosti varianční matice, korelace, vektor středních hodnot, multinomické a normální rozdělení,nezávislost a kritéria nezávislosti, rozdělení součtu, součinu a podílu dvou nezávislých náhodných veličin, rozdělení součtu normálně rozdělených náhodných veličin, χ^2-rozdělení a Studentovo t-rozdělení.

Příklad 42 (Distribuční funkce)**.** Určete, zda následující funkce jsou distribuční funkce a rozmyslete si, jakému rozdělení odpovídají.

$$F_1(x,y) = \max\{0, \min\{1,x\}\} \times \max\{0, \min\{1,y\}\}, \qquad \text{pro } x,y \in \mathbb{R}$$

$$F_2(x,y) = \frac{1}{2}\big(\max\{0, \min\{1,x\}\} + \max\{0, \min\{1,y\}\}\big), \quad \text{pro } x,y \in \mathbb{R}$$

$$F_3(x,y) = \begin{cases} \min\{1, x+y\} & \text{pokud } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$F_4(x,y) = \begin{cases} \max\big\{0, \min\{1, x+y-1\}\big\} & \text{pokud } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Příklad 43 (Součty náhodných veličin)**.** Určete rozdělení součtu $X + Y$ pokud

- X má binomické rozdělení s parametry (n, p), Y má $\mathrm{Bi}(m, p)$ a jsou nezávislé.
- X má Poissonovo s parametrem λ a Y má $\mathrm{Po}(\mu)$ a jsou nezávislé.
- X i Y mají geometrické s parametrem p a jsou nezávislé.
- X i Y mají exponenciální s parametrem λ a jsou nezávislé.
- X a Y mají sdružené rovnoměrné rozdělení (konstantní hustotu) na čtverci $[0,1]^2$.
- Vektor (X, Y) má obecné dvourozměrné normální rozdělení.

Příklad 44 (Součty nezávislých náhodných veličin II)**.** Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = X_1 + \cdots + X_n$, pokud $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením:

- exponenciálním s parametrem $\lambda > 0$.
- normálním s parametry (μ, σ^2).
- alternativním s parametrem p.

- geometrickým s parametrem p.
- $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 1/2$.

[použijte indukci]

Příklad 45 (Hmyz)**.** Samička hmyzu naklade R vajíček, kde R je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením $\mathrm{Po}(\lambda)$. Pravděpodobnost, že se z vajíčka vylíhne živý jedinec je $p \in (0, 1)$. Jaká je pravděpodobnost, že po snůšce se vylíhne právě k živých jedinců?

Příklad 46 (Nekorelovanost a nezávislost)**.** Nechť X a Y mají stejný rozptyl. Spočtěte kovarianci $\mathrm{cov}(X+Y, X-Y)$. Jsou $X+Y$ a $X-Y$ nezávislé? Uvažujte následující případy:

- X a Y jsou nezávislé rovnoměrně rozdělené na intervalu [0,1]. Jsou $X+Y$ a $X-Y$ nezávislé? Umíte spočítat sdružené rozdělení vektoru $(X+Y, X-Y)$?
- X a Y jsou nezávislé normálně rozdělené se střední hodnotou 0 a rozptylem 1. Jsou $X+Y$ a $X-Y$ nezávislé? Umíte spočítat sdružené rozdělení vektoru $(X+Y, X-Y)$?
- Vektor (X, Y) má sdružené normované normální rozdělení (střední hodnotu $\mathbf{0}$ a varianční matici $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, kde $|\rho| < 1$. Jsou $X+Y$ a $X-Y$ nezávislé? Umíte spočítat sdružené rozdělení vektoru $(X+Y, X-Y)$?

Příklad 47 (Kovariance a korelace)**.** Určete varianční (a korelační) matici náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$, kde $\boldsymbol{X}$ má hustotu (rozdělení)

- $f(x, y) = c(x+y)$ pokud $x, y \in [0, 1]$ a $f(x, y) = 0$ jinak.
- $f(x, y) = c(x-y)$ pokud $0 < y < x < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak.
- $f(x, y) = (1-y)^{-1}$ pokud $0 < y$, $0 < x$ a $x + y < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak.

Příklad 48 (Rozdělení podílu)**.** Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Určete rozdělení X/Y, pokud

- X a Y mají rovnoměrné rozdělení na intervalu [1,2].
- X a Y mají normované normální rozdělení.

Příklad 49 (Náhodná procházka I)**.** Uvažujte posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots$. Definujme $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Určete rozdělení S_n.
- Určete sdružené rozdělení náhodného vektoru (S_k, S_l), kde $k < l$. Spočítejte střední hodnotu a varianční matici tohoto vektoru.
- Určete sdružené rozdělení náhodného vektoru (S_j, S_k, S_l), kde $j < k < l$.
- Určete sdružené rozdělení náhodného vektoru $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

[uvědomte si, jaký vztah mají S_k a $S_n - S_k$ a jaké mají rozdělení]

Příklad 50 (Žáci ve škole)**.** V daný den přijde do školy X dívek a Y chlapců, kde X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry $\lambda > 0$ a $\mu > 0$.

- Určete rozdělení a očekávanou hodnotu celkového počtu žáků ve škole v daný den.
- Jaké je rozdělení počtu dívek, jestliže víme, že je ve škole v daný den celkem n žáků?

Příklad 51 (Dvě žárovky)**.** Dvojice žárovek má dobu životnosti (v tisících hodin) popsanou sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Jaké je rozdělení dob životnosti jednotlivých součástek? Jsou tyto doby nezávislé?
- S jakou pravděpodobností první součástka přežije druhou? A s jakou pravděpodobností přežije druhou o alespoň tisíc hodin?
- Jaká je pravděpodobnost toho, že první součástka alespoň dvakrát přežije druhou součástku?
- Určete distribuční funkci a hustotu veličiny $2X + Y$.
- Jaké je rozdělení $2X + Y$ a $X - Y$?

Příklad 52 (Plně závislé leč nekorelované)**.** Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1,1)$. Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci veličin X a Y a jejich korelační koeficient ρ_{XY}. Jsou X a Y nezávislé?

Příklad 53 (Závislost a korelovanost)**.**
Náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na množině $M = \{(x,y): \ x \in [0,1], \ y \in [0,1], \ y \geq x\}$.

- Nakreslete si M a odhadněte, zda jsou X a Y nezávislé či nekorelované, případně jaké znaménko má jejich korelace. Odpověď si zdůvodněte.
- Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.
- Spočítejte $\mathrm{cov}(X,Y)$.

Příklad 54 (Minimum a maximum)**.** Nechť $X_1,\ldots,X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F a hustotou f Označme $U = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ a $V = \min_{1\leq i\leq n} X_i$.

- Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny U. .
- Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny V.
- Nechť F a f odpovídají rovnoměrnému rozdělení na intervalu $[0,1]$. Spočtěte v tomto případě $\mathrm{E}U$, $\mathrm{var}U$, $\mathrm{E}V$ a $\mathrm{var}V$.
- Zkuste spočítat distribuční funkci a hustotu náhodného vektoru (U,V). Pak určete kovarianci $\mathrm{cov}(U,V)$, jsou-li $X_1,\ldots,X_n$ nezávislé rovnoměrně rozdělené na [0,1].
- Zkuste spočítat distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $X_{(k)}$, kde $X_{(k)}$ je k-tá nejmenší hodnota mezi $X_1,\ldots,X_n$.

Cvičení k limitním větám

Připomeňte si: Borelova a Cantelliova věta, slabý zákon velkých čísel a jeho předpoklady, silný zákon velkých čísel pro nestejně rozdělené náhodné veličiny a pro stejně rozdělené náhodné veličiny, centrální limitní věta

Příklad 55 (Nekonečně šestek?)**.** Uvažujme nekonečnou posloupnost nezávislých hodů hrací kostkou.

- Jaká je pravděpodobnost, že padne nekonečně mnoho šestek?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne nekonečně mnoho šestek, pokud v n-tém hodu použijeme kostku, na níž padne šestka s pravděpodobností $1/n$?
- S jakou pravděpodobností padne nekonečněkrát 100 šestek v řadě?
- S jakou pravděpodobností nastane nekonečně mnoho z jevů *padlo právě n šestek v řadě*, $n = 1,2,\ldots$. (zde uvažujeme schema pokusů 1 hod, 2 hody, 3 hody, ...)

Příklad 56 (Konvergence v pravděpodobnosti vs. skoro jistě)**.** Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny a platí $P[X_n = 1] = 1/n$, $P[X_n = 0] = 1 - 1/n$. Dokažte, že X_n konvergují k nule v pravděpodobnosti, nikoliv skoro jistě.

Uvědomte si, co znamená, že posloupnost náhodných veličin *konverguje/nekonverguje* skoro jistě. Zapište tento fakt pomocí kvantifikátorů!

Příklad 57 (Vztah 0-1 zákona a absolutního momentu)**.** Nechť $X, X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny.

- Ukažte, že platí
$$\sum_{i=1}^{\infty} P[|X| \geq i] \leq \mathrm{E}|X| \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} P[|X| \geq i].$$
- Jak souvisí $\mathrm{E}|X_1|$ s pravděpodobností toho, že jevů $[|X_n| \geq n]$ nastane nekonečně mnoho?

Příklad 58 (Náhodná procházka)**.** Buďte $X_1, X_2, \ldots$ nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. $P[X_1 = 1] = P[X_1 = -1] = 1/2$. Označme $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Jaká je pravděpodobnost, že $X_n = 1$ pro nekonečně mnoho n?
- Jaká je pravděpodobnost, že $X_n = 1$ pro všechna až na konečně mnoho n?

- Jaká je pravděpodobnost, že $S_n \geq n - k$ pro nekonečně mnoho n, je-li k libovolná konečná konstanta.
- Jaká je pravděpodobnost, že $S_n \geq kn$ pro nekonečně mnoho n, je-li $k \in (0,1]$? [použijte vhodné odhady faktoriálů]
- Platí odtud, že $S_n/n \to 0$ v pravděpodobnosti, skoro jistě?
- Platí, že $S_n \to 0$ v pravděpodobnosti či skoro jistě? [dokažte či vyvraťte]

Příklad 59 (Zákony velkých čísel I)**.** Uvažujme nekonečnou posloupnost nezávislých pokusů a nechť p je pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu.

- Ukažte, že relativní počet úspěchů R_n v prvním n pokusech konverguje k p v pravděpodobnosti i skoro jistě.
- Ukažte, že celkový počet úspěchů C_n roste nade všechny meze v pravděpodobnosti i skoro jistě.
- Pomocí Čebyševovy nerovnosti odvoďte pravděpodobnost, $P[|R_n - p| > \alpha p]$, $\alpha \in (0,1)$. Odhadněte, jak velké musí být n, aby tato pravděpodobnost byla nejvýše β, $\beta \in (0,1)$.

Příklad 60 (Silný zákon velkých čísel)**.** Určete, zda následující posloupnosti náhodných veličin splňují předpoklady platnosti silného zákona velkých čísel. Ve všech případech určete, pro jaké hodnoty parametrů jsou předpoklady splněny.

- $P[X_n = n^\alpha] = P[X_n = -n^\alpha] = 1/2$.
- $P[X_n = 2^n] = P[X_n = -2^n] = k^{-n}$ a $P[X_n = 0] = 1 - k^{-n}$.
- X_n má hustotu $f_n(x) = \frac{1}{2} n^\lambda \exp\{-n^\lambda |x|\}$, $x \in \mathbb{R}$.
- X_n má hustotu $f(x) = \frac{1}{2}(\alpha - 1)|x|^{-\alpha}$ $|x| \in [1, \infty)$, $\alpha > 1$.

Příklad 61 (Házení kostkou a centrální limitní věta)**.** Uvažujme nekonečný počet nezávislých hodů kostkou. Označme S_n počet šestek v prvních n hodech. Pomocí centrální limitní věty určete:

- Jaké jsou pravděpodobnosti $P[S_{120} \leq 25]$ a $P[S_{120} \leq 30]$? A jaké jsou pravděpodobnosti $P[S_{1200} \leq 250]$ a $P[S_{120} \leq 300]$?
- Určete a takové, aby $P[S_{240} > a] = 0,95$. Určete a tak, aby $P[60 - a < S_{360} < 60 + a]$.
- Určete n tak, aby $P[S_n/n \in (5/36, 7/36)] \geq 0,9$.

Příklad 62 (Centrální limitní věta a Čebyševova nerovnost I)**.** Předpokládejme, že v posloupnosti 100 měření dochází v každém kroku k náhodné a nezávislé chybě měření. Tyto chyby mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1/2, 1/2]$ a načítají se. Označme C celkovou chybu měření.

- Tipněte si hodnotu t takovou, že $P[-t < C < t] \geq 0,99$.
- Odhadněte t pomocí Čebyševovy nerovnosti.
- Odhadněte t pomocí centrální limitní věty.

Příklad 63 (Počet úspěchů a centrální limitní věta)**.** Nechť v posloupnosti nezávislých pokusů je pravděpodobnost úspěchu rovna p v každém pokusu. Označme U_n počet úspěchů v n pokusech a R_n relativní počet úspěchů v n pokusech. Pomocí centrální limitní věty určete:

- Jaká je pravděpodobnost $P[U_n < np + k]$ a jaká je pravděpodobnost $P[U_n < npl]$, $k \in (-np, n(1-p))$, $l \in (0, 1/p)$?
- Jaké jsou limity předchozích pravděpodobností, když $n \to \infty$?
- Jaká je pravděpodobnost $P[R_n < p + k]$ a jaká je pravděpodobnost $P[R_n < pl]$, $k \in (-p, 1-p)$, $l \in (0, 1/p)$?
- Jaké jsou limity předchozích pravděpodobností, když $n \to \infty$?

Pomocí předchozích určete:

- $P[U_{100} < 55]$ a $P[40 < U_{100} < 55]$, je-li $p = 0,5$.
- $P[R_{400} < 0,33]$ a $P[0,29 < R_{400} < 0,33]$, je-li $p = 0,3$.
- Hodnoty a a b tak, aby $P[U_{200} < a] \leq 0,1$ a $P[a < U_{200} < b] \geq 0,95$, pokud $p = 0,8$ (*v druhém případě a a b nejsou jednoznačné, zkuste je najít tak, aby interval (a, b) byl co nejkratší*).
- Počet pokusů n tak, aby $P[0,396 < R_n < 0,404] > 0,99$, je-li $p = 0,4$.

Příklad 64 (Centrální limitní věta a Čebyševova nerovnost II)**.** Uvažujme nezávislé hody symetrickou mincí. Označme L_n počet líců v n hodech a R_n relativní počet líců v n hodech. Určete pomocí centrální limitní věty a pomocí Čebyševovy nerovnosti následující hodnoty a porovnejte je.

- Jaká je pravděpodobnost $P[L_n \leq (n+k)/2]$? Jaká je pravděpodobnost $P[L_{100} \in (40, 60)]$?
- Určete a tak, aby $P[L_{200} \in (100 - a, 100 + a)] \geq 0,95$.
- Kolik pokusů musíme učinit, aby $P[R_n \in (0,49; 0,51)] \geq 0,99$?

Cvičení k odhadům parametrů

Připomeňte si: náhodný výběr, parametrická třída rozdělení, bodový odhad, nestrannost a konzistence, nejlepší nestranný odhad, metoda maximální věrohodnosti, intervalový odhad, kvantily, intervalové odhady parametrů normálního rozdělení, intervalové odhady založené na centrální limitní větě.

Příklad 65 (Maximálně věrohodné odhady v různých spojitých rozděleních)**.** Pro následující rozdělení daná hustotou určete maximálně věrohodné odhady a prozkoumejte jejich vlastnosti (nestrannost a konzistenci). Předpokládejte, že máte náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z uvedeného rozdělení.

- Exponenciální rozdělení s parametrem λ, tedy $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pro $x > 0$.
  [*rozdělení součtu nezávislých exponenciálně rozdělených náhodných veličin je takzvané gama rozdělení.*]
- Normální rozdělení s parametry (μ, σ^2) platí-li
  - $\mu = \mu_0$ je známé.
  - $\sigma = \sigma_0$ je známé.
  - oba parametry jsou neznámé.
- Laplaceovo rozdělení $f(x) = 1/2 \exp\{-|x - a|\}$, a je reálný parametr, $x \in \mathbb{R}$.
- Rovnoměrné rozdělení s parametrem θ, kde $f(x) = \theta^{-1}$ pro $x \in [0, \theta]$.

Příklad 66 (Maximálně věrohodné odhady v různých diskrétních rozděleních)**.** Pro následující diskrétní rozdělení určete maximálně věrohodné odhady a prozkoumejte jejich vlastnosti (nestrannost a konzistenci). Předpokládejte, že máte náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z uvedeného rozdělení.

- Poissonovo rozdělení s parametrem λ, $P[X = k] = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k = 0, 1, \ldots$.
- Alternativní rozdělení s parametrem p, $P[X = 1] = p = 1 - P[X = 0]$.
- Geometrické rozdělení s parametrem p, $P[X = k] = (1 - p)^k p$, $k = 0, 1, \ldots$.
  [*rozdělení součtu nezávislých geometricky rozdělených náhodných veličin je takzvané negativně binomické rozdělení.*]

Příklad 67 (Odhad střední hodnoty rovnoměrného rozdělení)**.** Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[a-1, a+1]$, kde a je neznámý parametr. Uvažujte následující odhady a a vyšetřete jejich vlastnosti.

- $\widehat{a} = \overline{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- $\widehat{a} = (X_{1:n} + X_{n:n})/2$, kde $X_{1:n} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ a $X_{n:n} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
- $\widehat{a} = \mathrm{med}(X_1, \ldots, X_n)$, kde výběrový medián

$$\mathrm{med}(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} X_{(n+1)/2:n} & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ \big(X_{n/2:n} + X_{(n+2)/2:n}\big)/2 & \text{je-li } n \text{ sudé,} \end{cases}$$

a $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ značí náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ uspořádané podle velikosti. Který odhad je podle vás nejlepší?