MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

Ondřej Paclík

Různé sekvenční testy

15. března 2023

- máme $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost iid náhodných veličin
- $X_i \sim \mathrm{Alt}(p_X) \quad i = 1, 2, \dots,$
- $\Rightarrow \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = p_X, \; \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_X$
- testujeme

$$H_0 : \; p_X = p_0 \quad \text{proti} \quad H_1 : \; p_X = p_1,$$

$$0 < p_0 < p_1 < 1$$

Test s pevným rozsahem výběru

- volíme horní mez α pro pravděpodobnost chyby prvního druhu (pravděpodobnost zamítnutí platné hypotézy)
- volíme pevný rozsah výběru $N = n_0$
- přijmeme H_0, když
$$\sum_{i=1}^{n_0} X_i \leq k$$
- zamítneme H_0, když
$$\sum_{i=1}^{n_0} X_i > k$$
- operační charakteristika
$$L(p) = F_{n_0}(k, p), \ (\mathit{distr.\ fce.}\ \mathrm{Binom}(n_0, p))$$

Dvoustupňový test

- volíme horní mez α pro pravděpodobnost chyby prvního druhu (pravděpodobnost zamítnutí platné hypotézy)
- volíme pevné rozsahy výběru n_1 a n_2
- přijmeme H_0, když

$$\sum_{i=1}^{n_1} X_i \leq a$$

- přijmeme H_1, když

$$\sum_{i=1}^{n_1} X_i > b$$

- jinak pokračujeme a přijmeme H_0, když (jinak přijmeme H_1)

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i \leq b$$

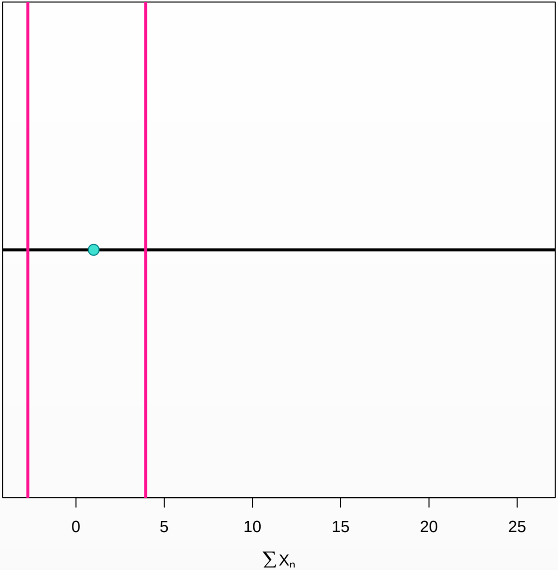
Waldův sekvenční test

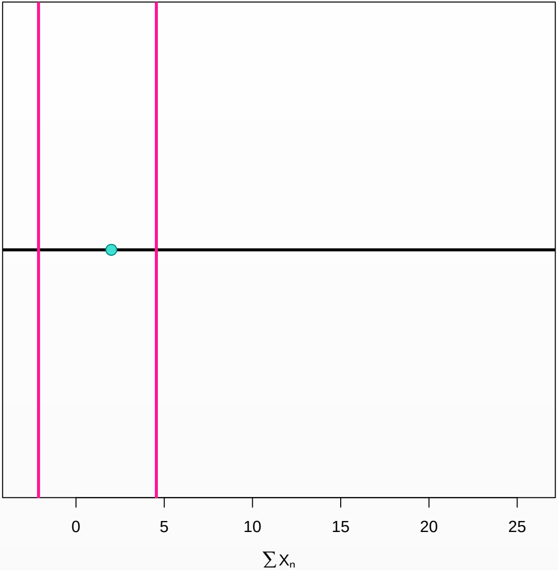
- volíme pravděpodobnosti prvního a druhého druhu (α a β)
- přijmeme H_0, když
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq h_b + n \cdot s$$
- přijmeme H_1, když
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geq h_a + n \cdot s$$
- jinak pokračujeme a uplatňujeme pravidla na další výběry
- volíme
$$b = \log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right), \quad a = \log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)$$

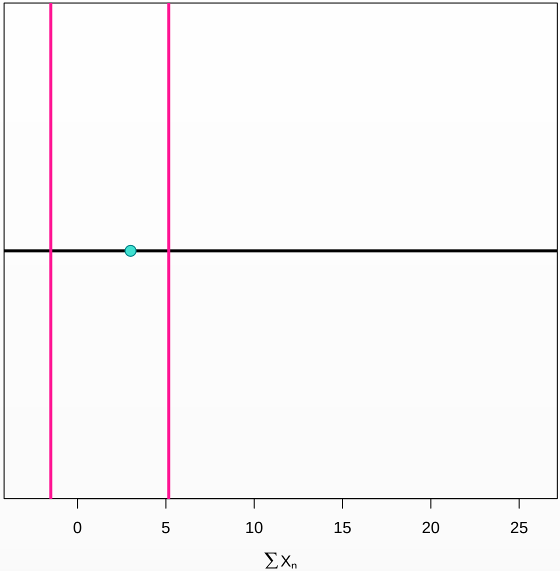
- uvažujeme $p_0 = 0.5$, $p_1 = 0.708$, $a = -b = 2.957$
- dle skript jsou známy exaktní hodnoty $L(p)$ a $\mathbb{E}(N, p)$
- 100000 krát nasimulujeme test
- vypočteme průměrný rozsah výběru
- vypočteme podíl přijatých H_0

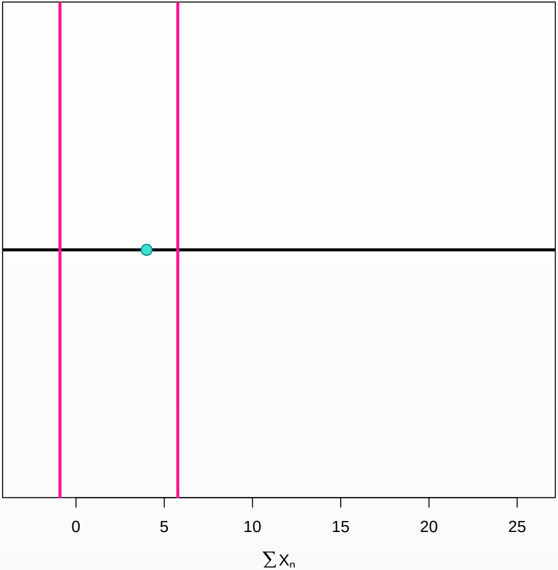
p	$L(p)$	$\mathbb{E}(N,p)$
0.45	0.9868	23.16
0.50	0.9456	31.83
0.60	0.4953	51.63
0.70	0.0432	31.85

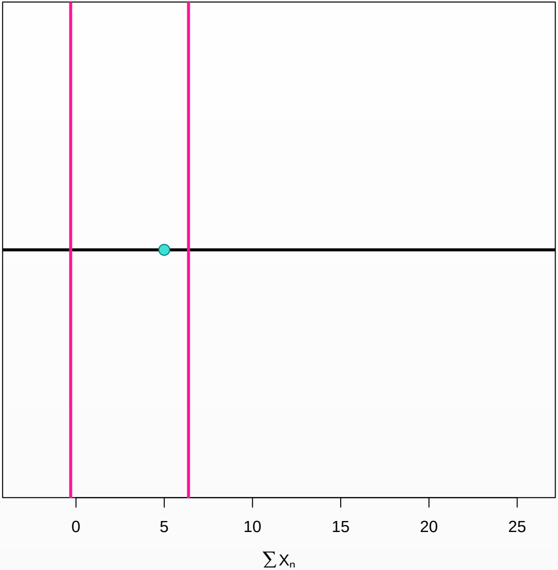
p	$\hat{L}(p)$	podíl přijatých H_0	$\widehat{\mathbb{E}}(N,p)$	průměr rozsahů
0.45	0.9869	0.9896	20.5359	22.3340
0.50	0.9500	0.9549	27.8054	30.3382
0.60	0.5502	0.5502	45.8685	52.0893
0.70	0.0636	0.0516	31.2205	33.8336

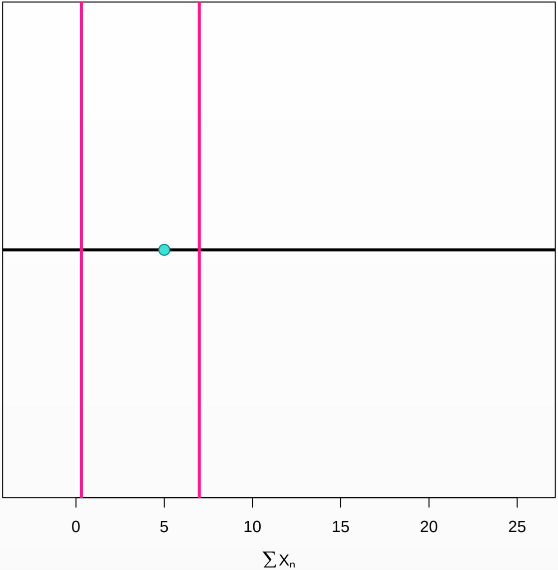

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$


0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

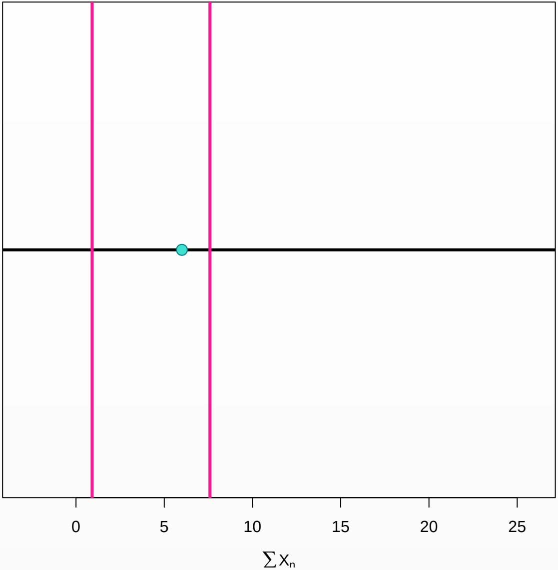

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

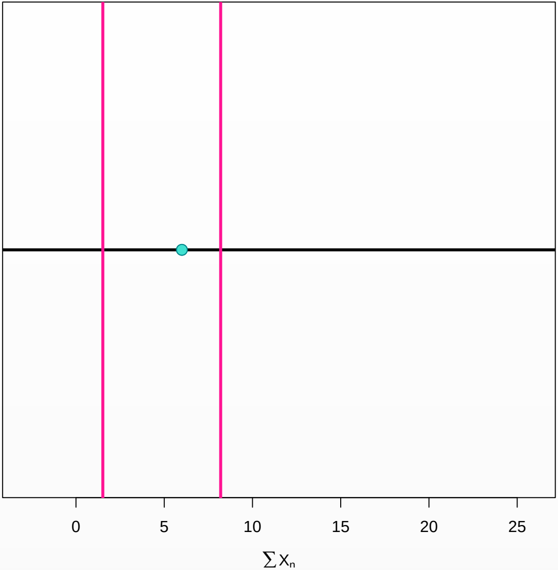

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

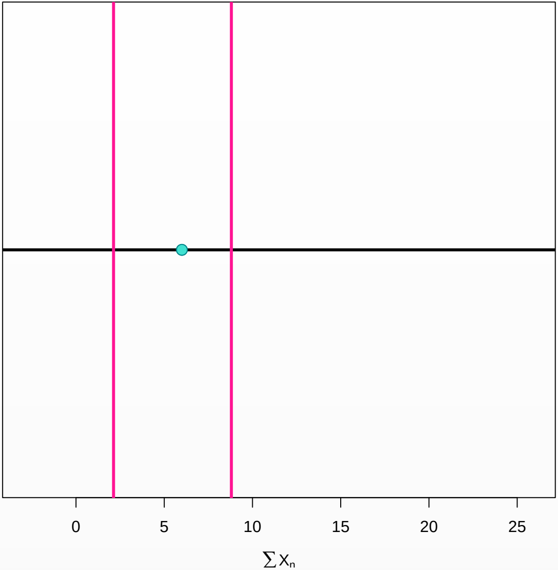

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

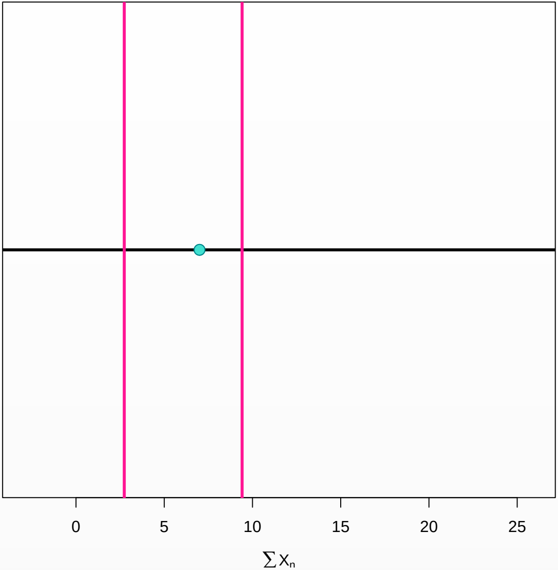


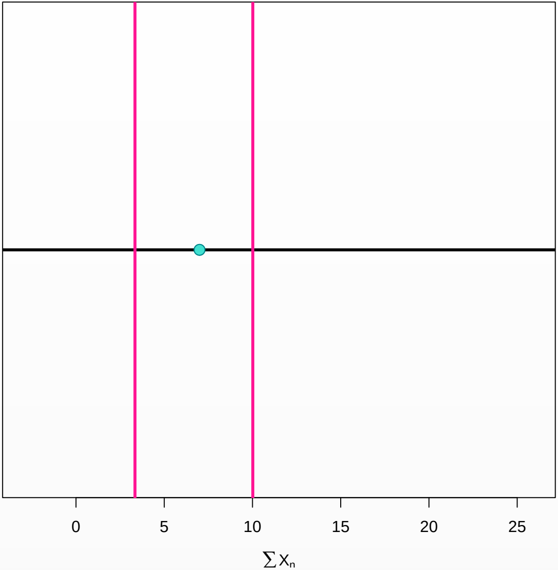
0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

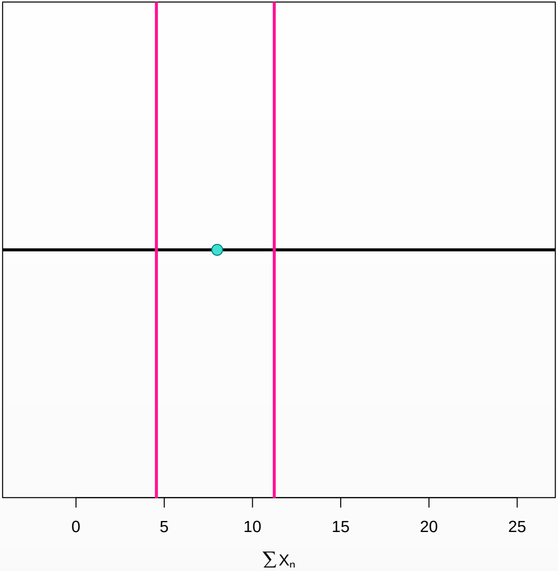

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

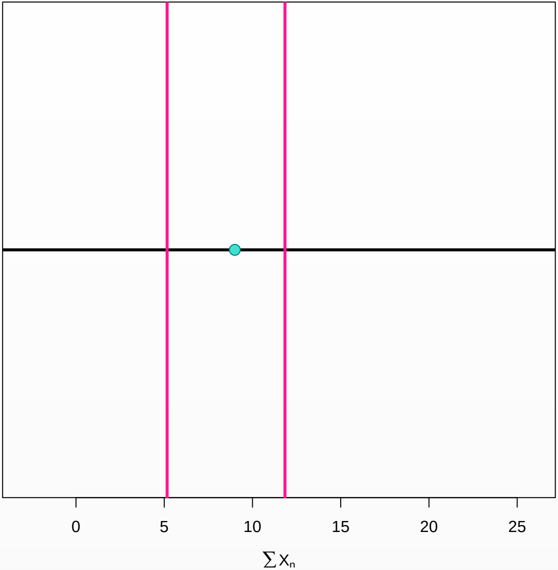

0
5
10
15
20
25
∑Xn

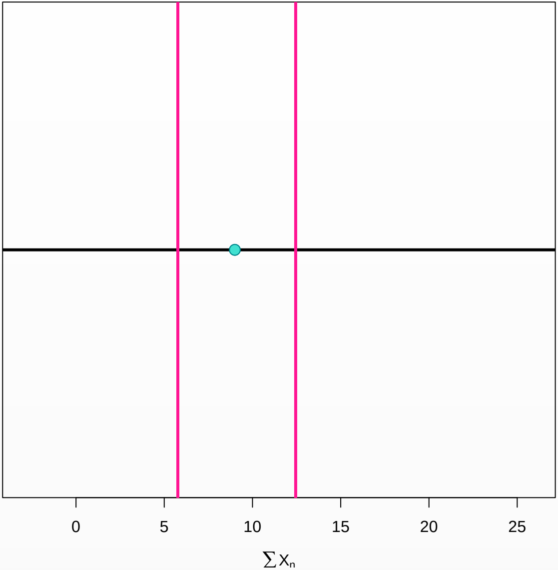

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

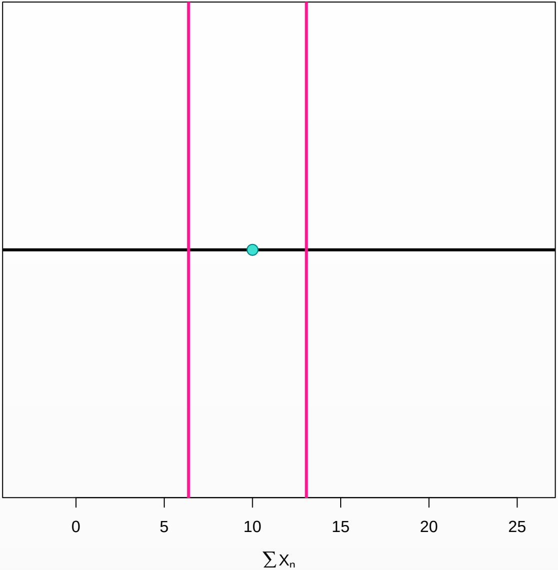

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

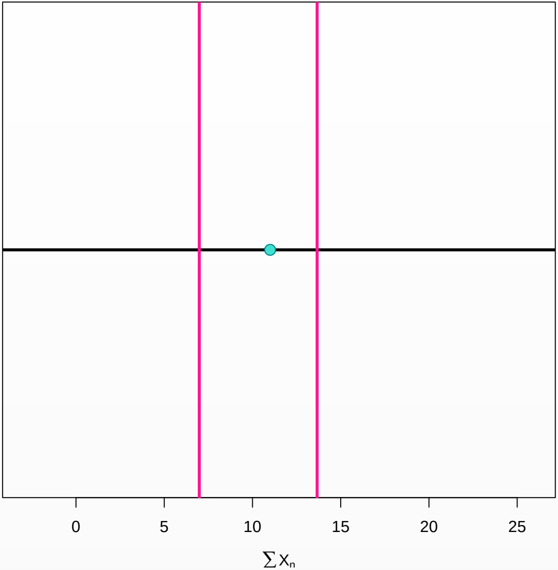

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

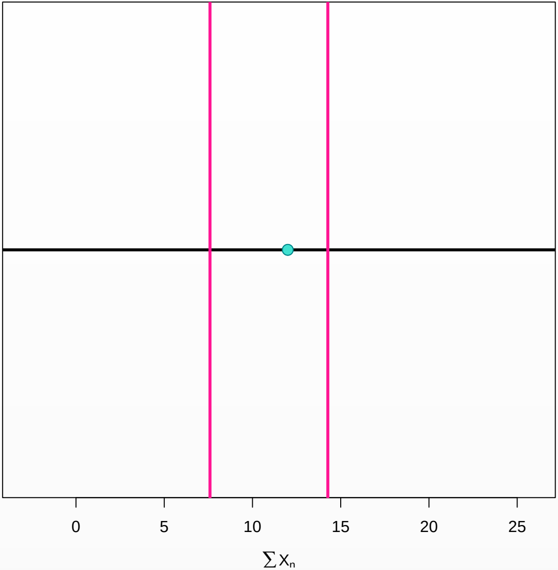

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

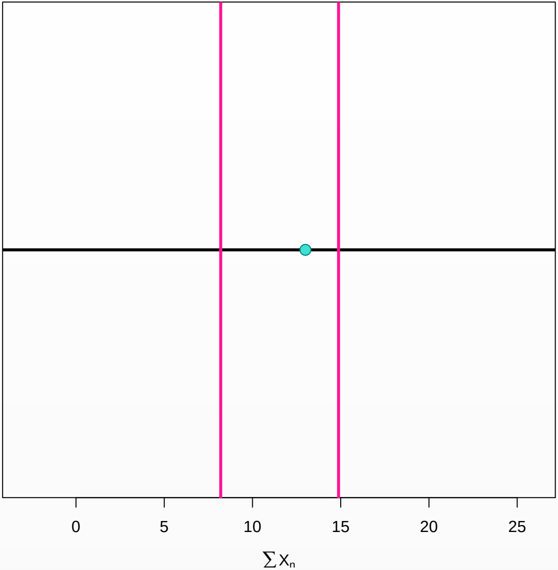

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

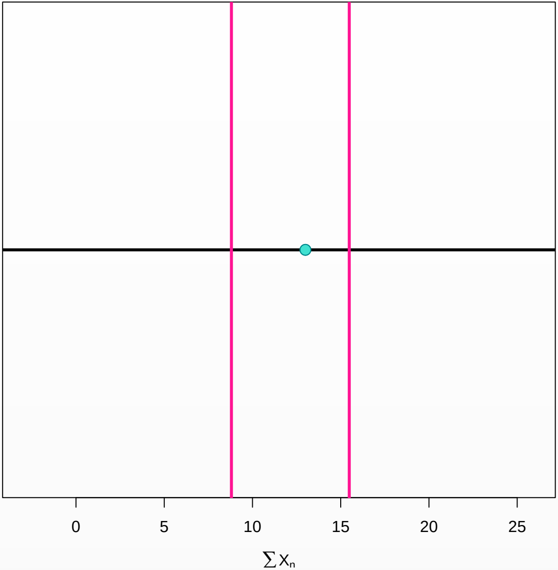

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

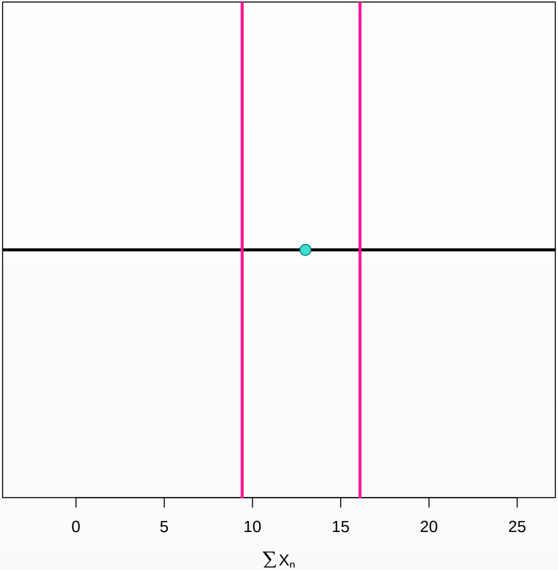

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

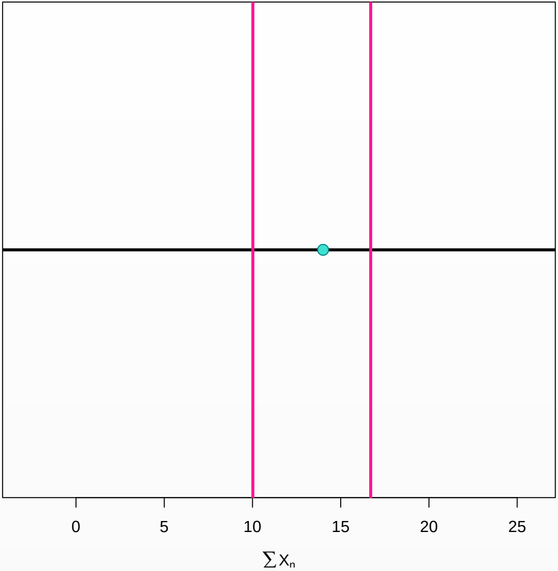

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

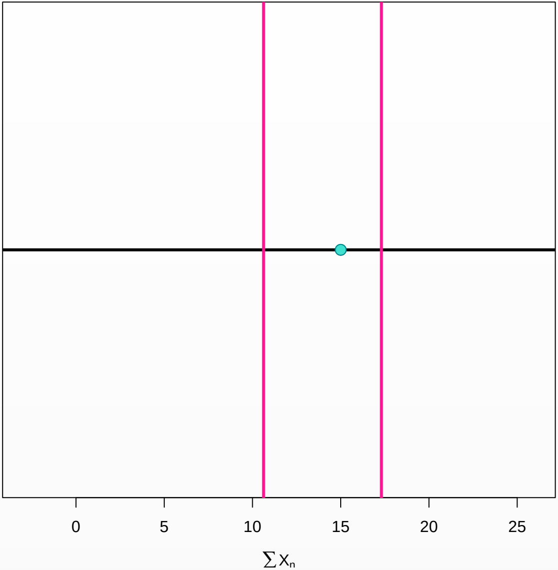

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

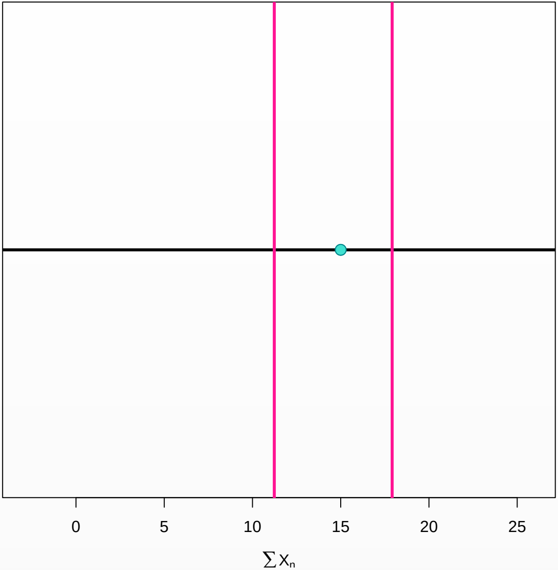

0
5
10
15
20
25
∑Xn

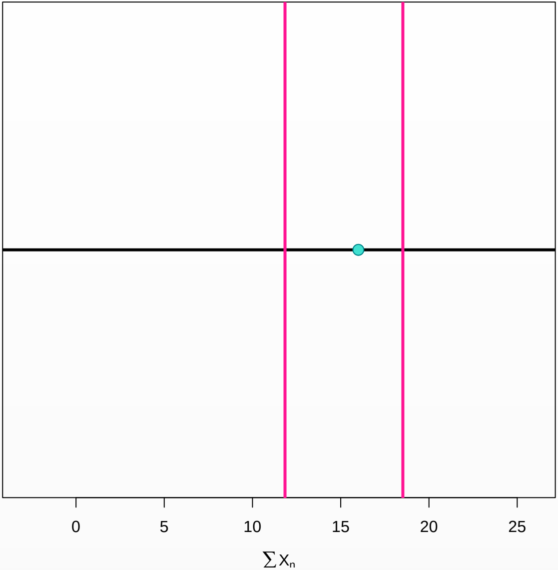

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

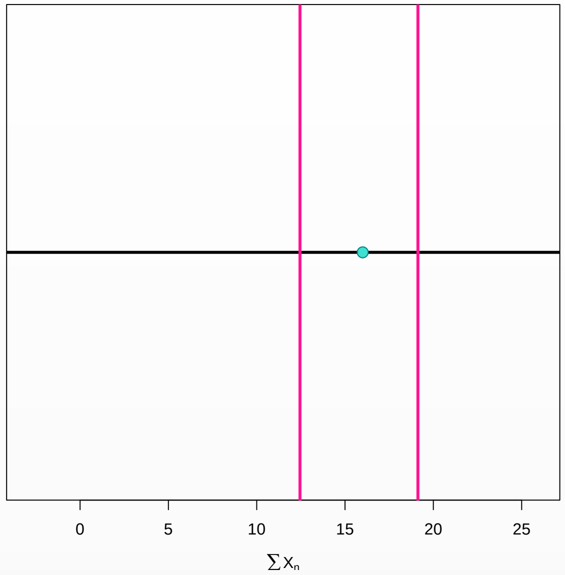

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

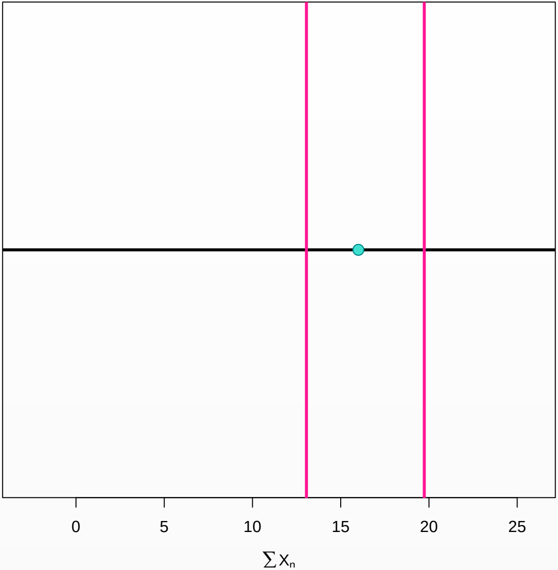

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

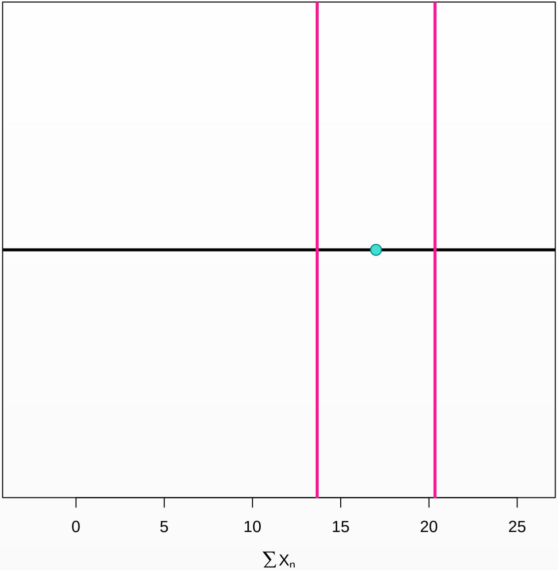

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

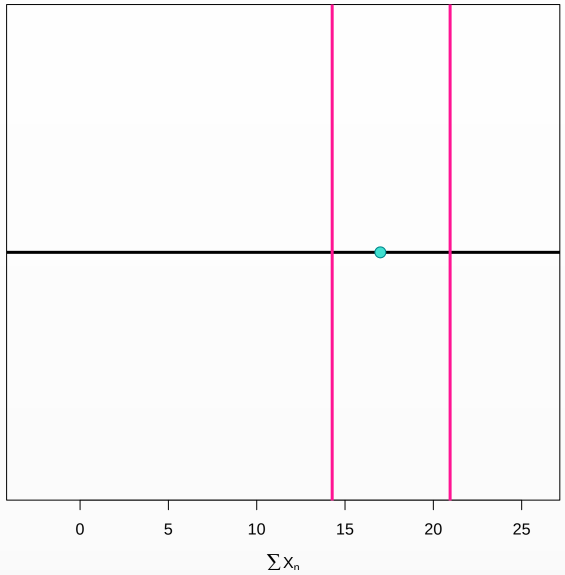

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

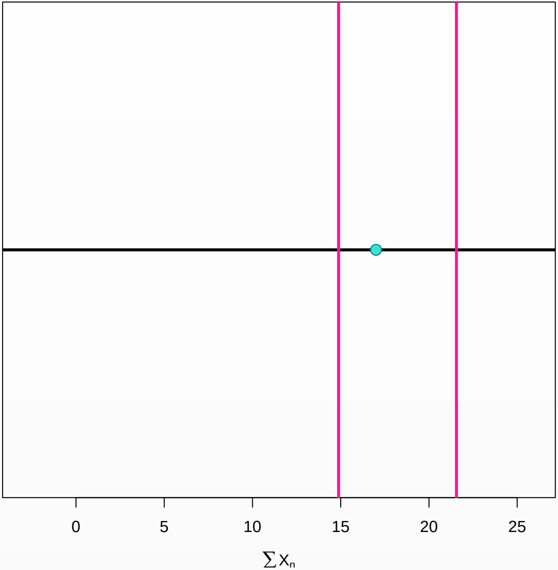

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

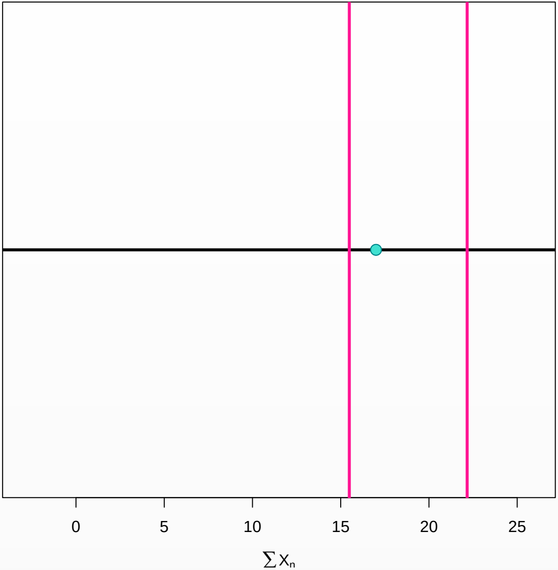

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

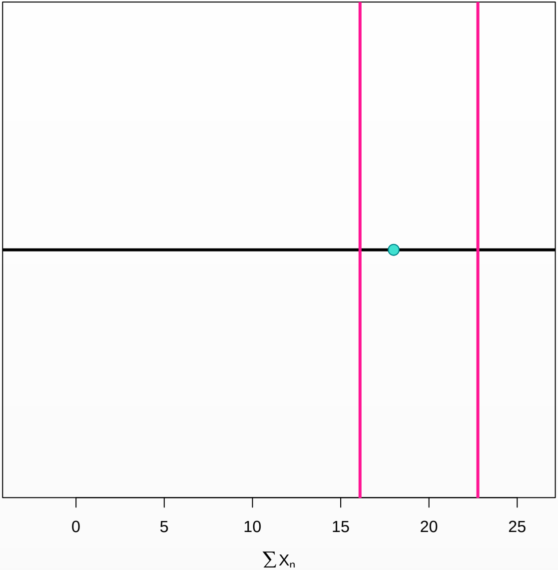

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

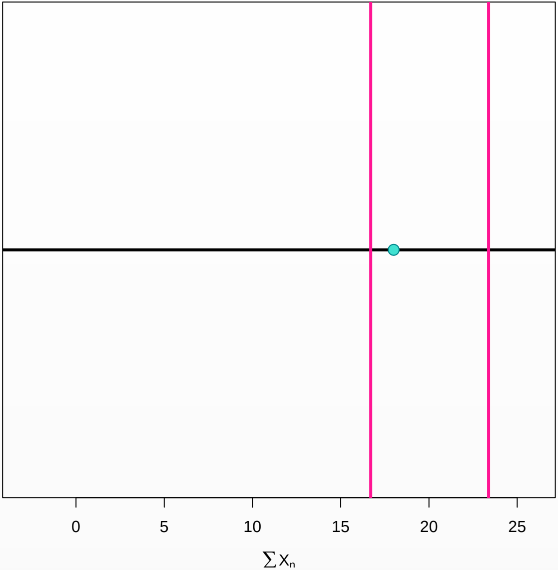

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

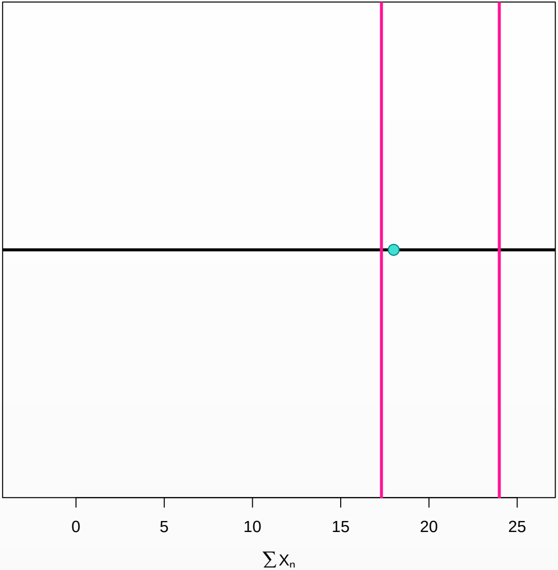

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

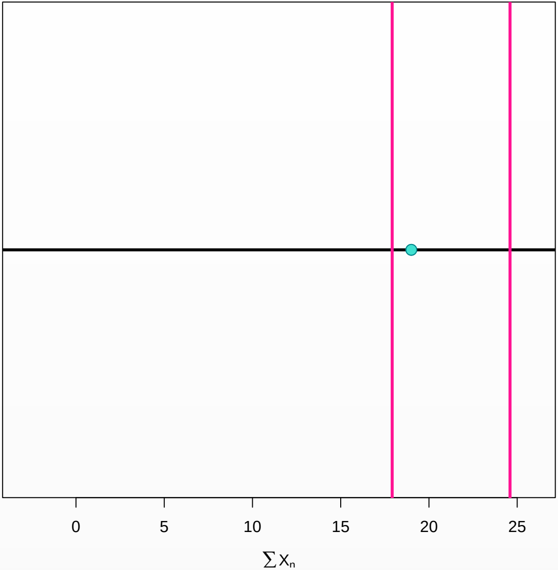

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

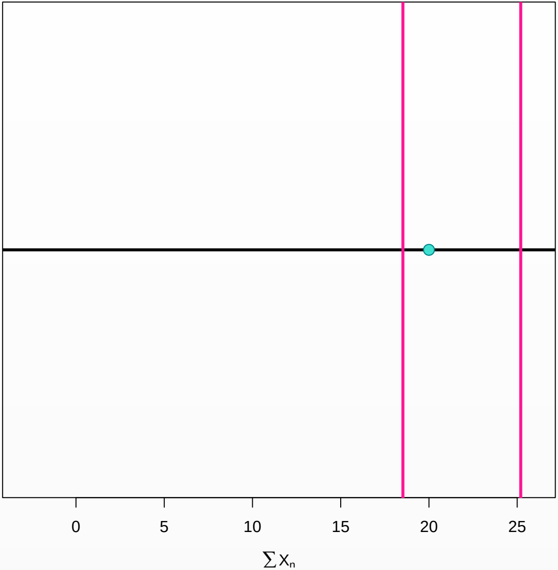

0
5
10
15
20
25
ΣXn

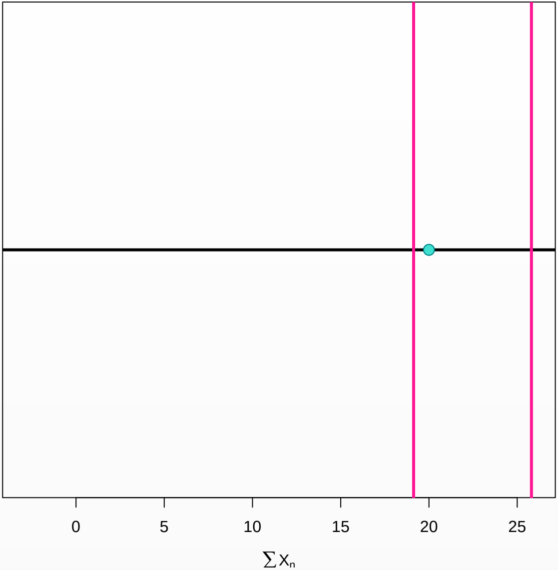

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

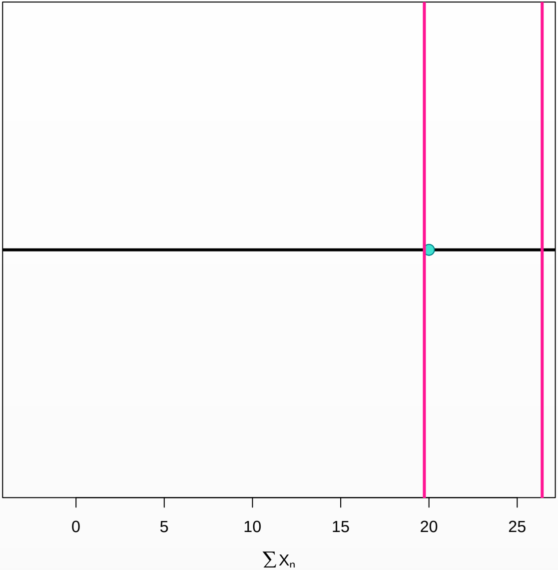

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

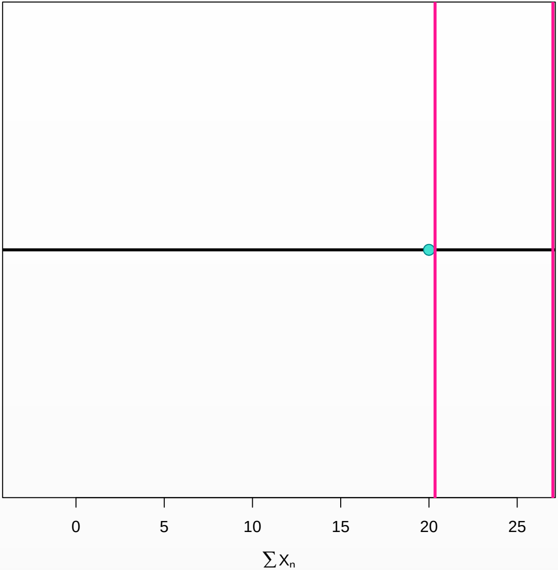

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$


0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$


0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$


0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$


0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$


0
5
10
15
20
25
∑Xn

Useknutý Waldův test

- volíme pravděpodobnosti prvního a druhého druhu (α a β)
- volíme $n_0 \in \mathbb{N}$
- pro každé $n < n_0$ aplikujeme pravidla klasického Waldova sekvenčního testu
- pro $n = n_0$ přijmeme H_0, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n_0} X_i \leq n \cdot s$$

- pro $n = n_0$ přijmeme H_1, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n_0} X_i > n \cdot s$$

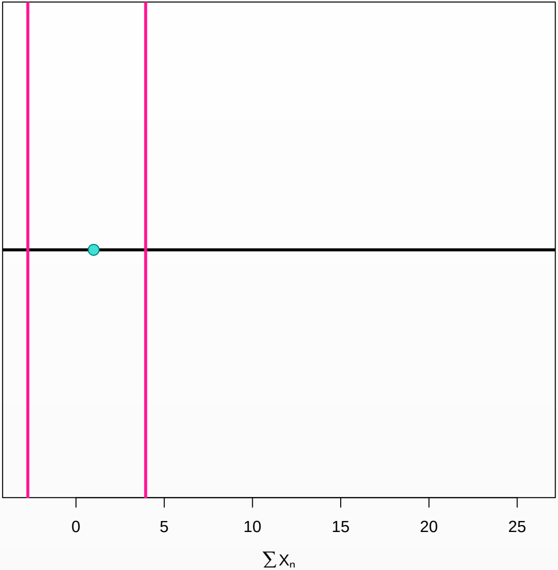
- ponecháme p_0, p_1, a, b jako dříve, volíme $n_0 = 30$

p	$\hat{L}(p)$	podíl přijatých H_0	$\widehat{\mathbb{E}}(N,p)$	průměr rozsahů
0.45	0.9869	0.9896	20.5359	22.3340
0.50	0.9500	0.9549	27.8054	30.3382
0.60	0.5502	0.5502	45.8685	52.0893
0.70	0.0636	0.0516	31.2205	33.8336

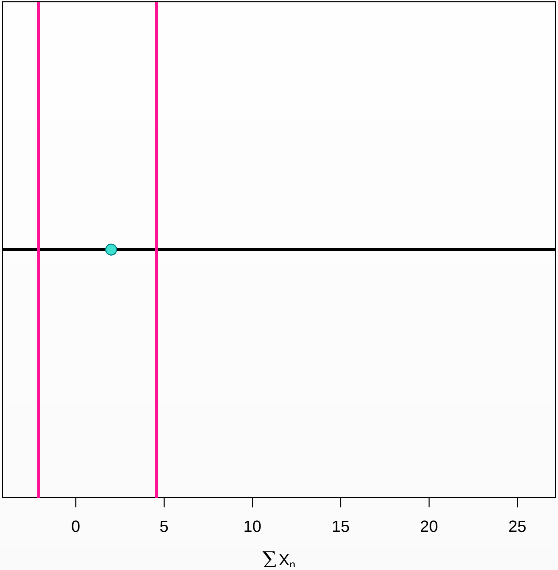
Tabulka: klasický sekvenční Waldův test

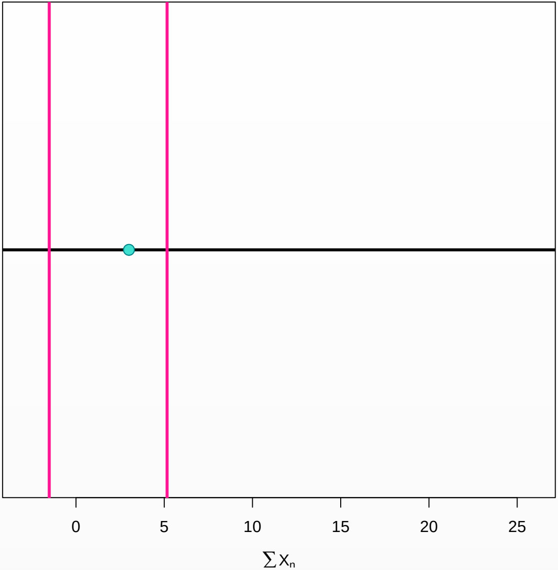
p	podíl přijatých H_0	průměr rozsahů
0.45	0.8965	22.5046
0.50	0.8978	22.4927
0.60	0.5658	26.0121
0.70	0.1583	23.8308

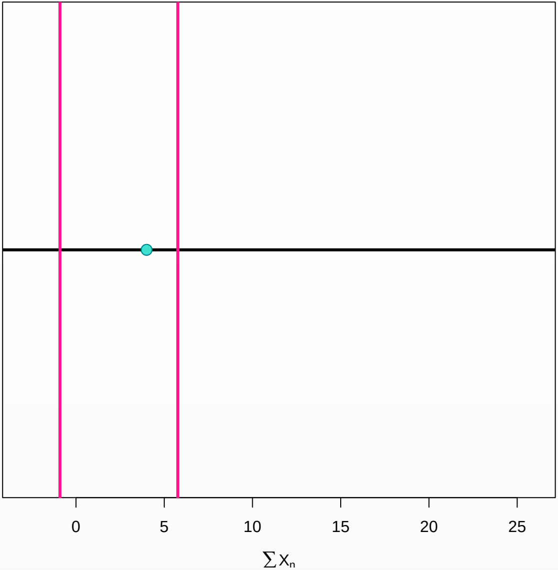
Tabulka: useknutý sekvenční Waldův test

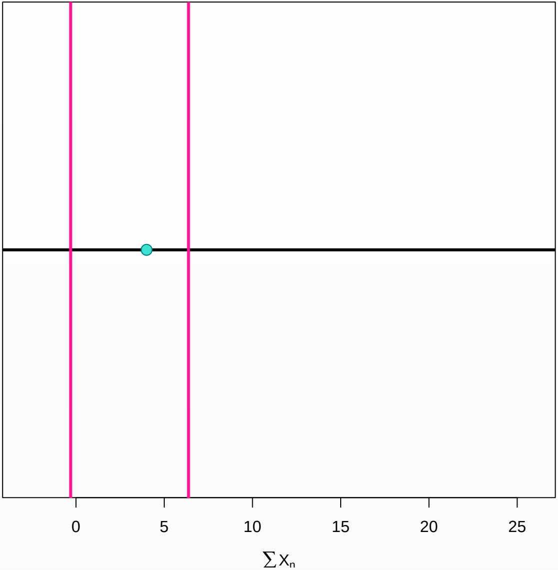


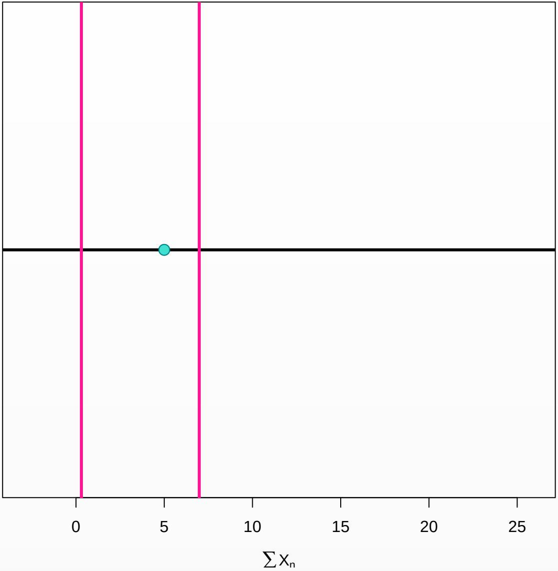
0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

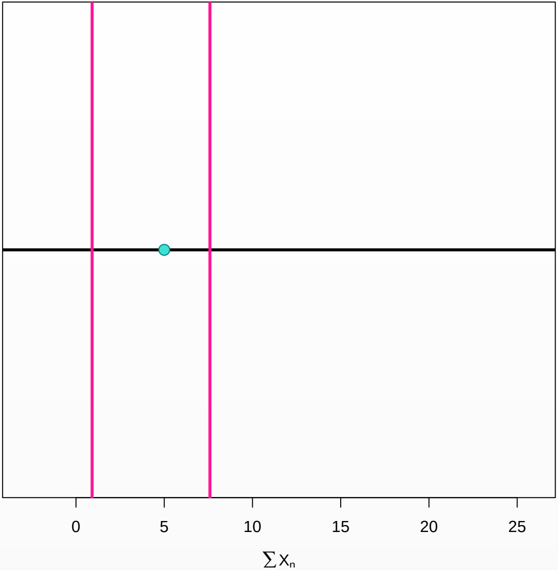

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

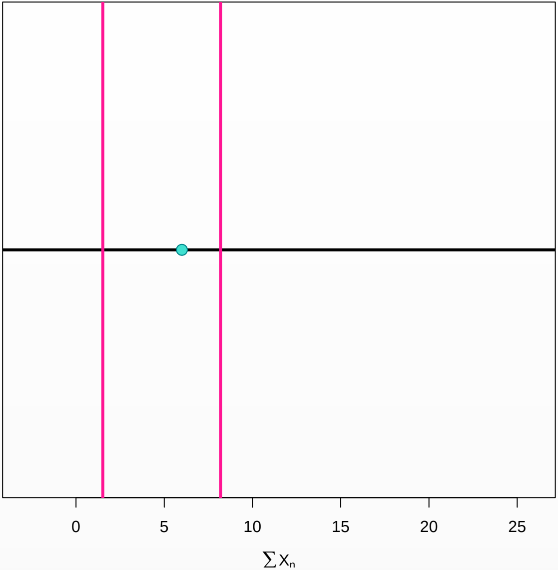

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

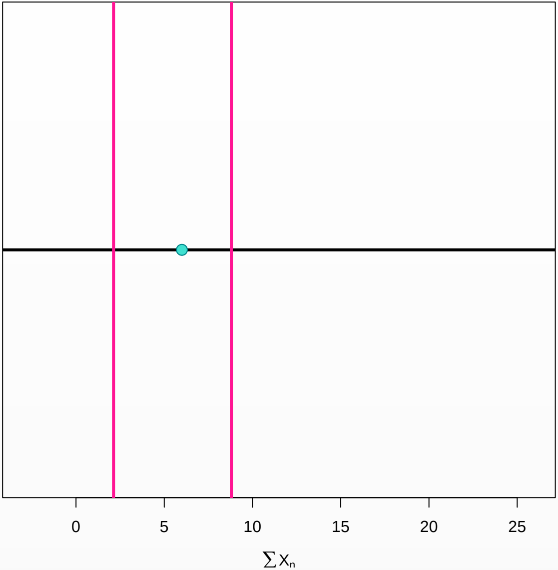

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

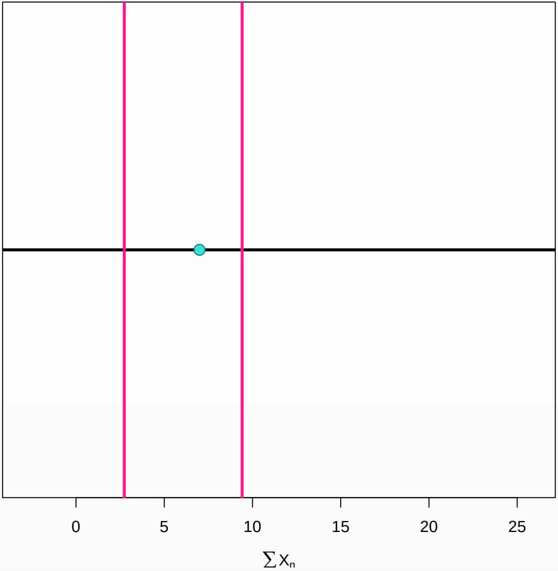

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

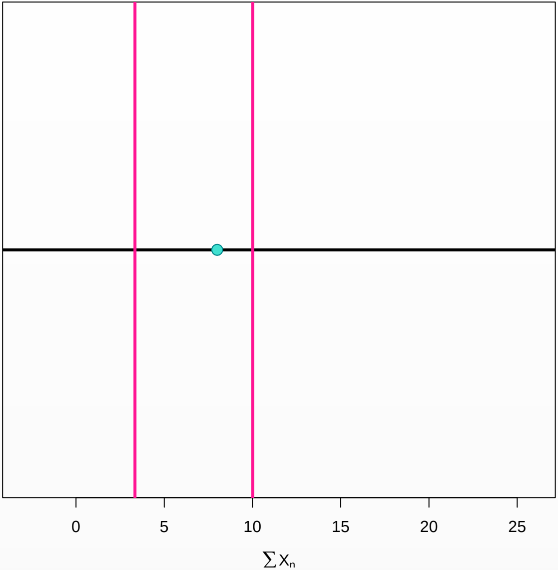

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

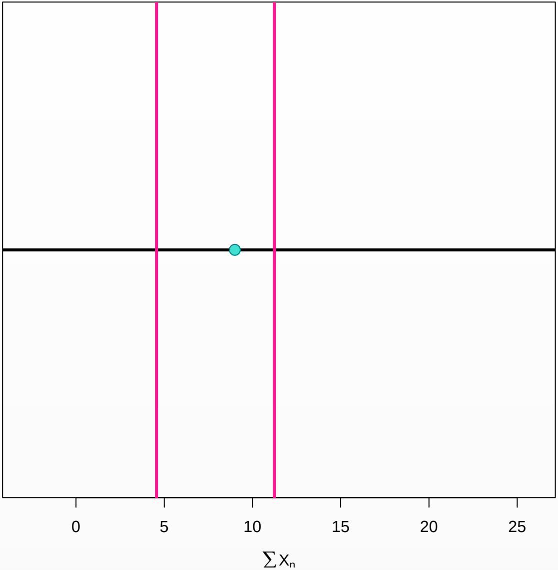

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

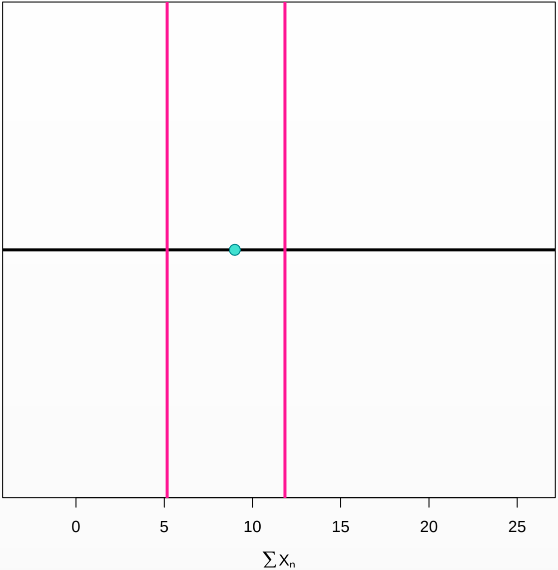

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

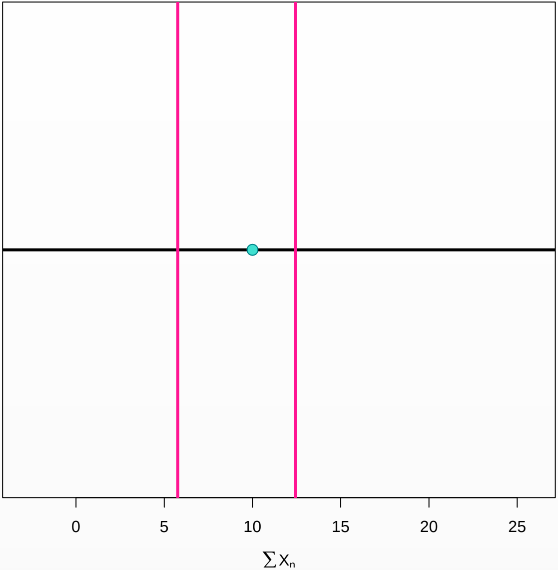

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

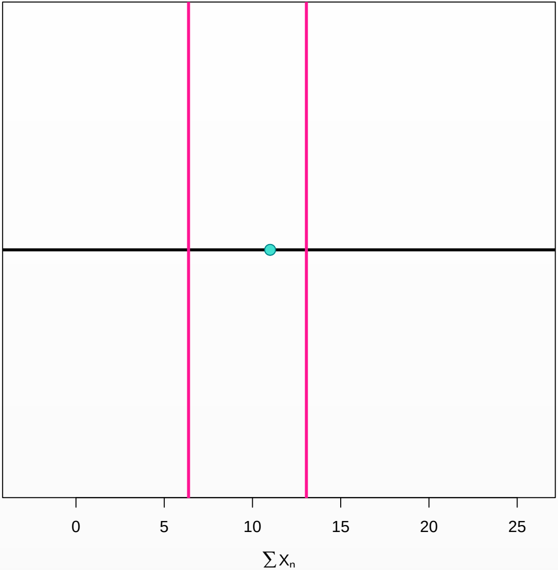

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

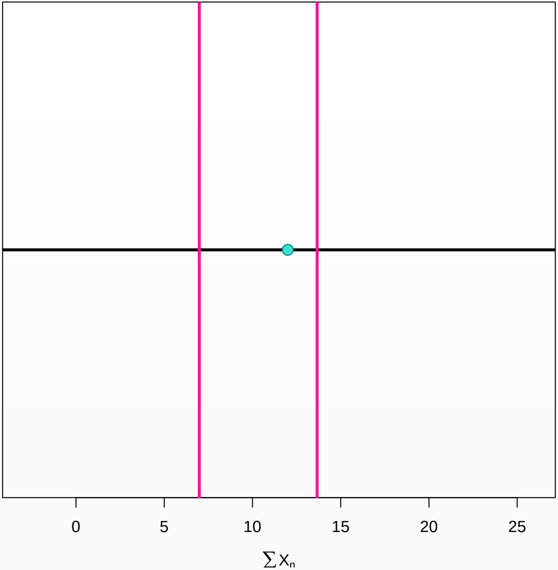

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

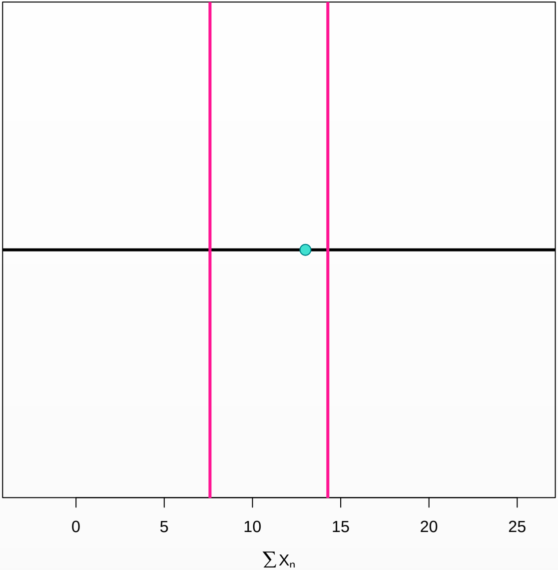

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

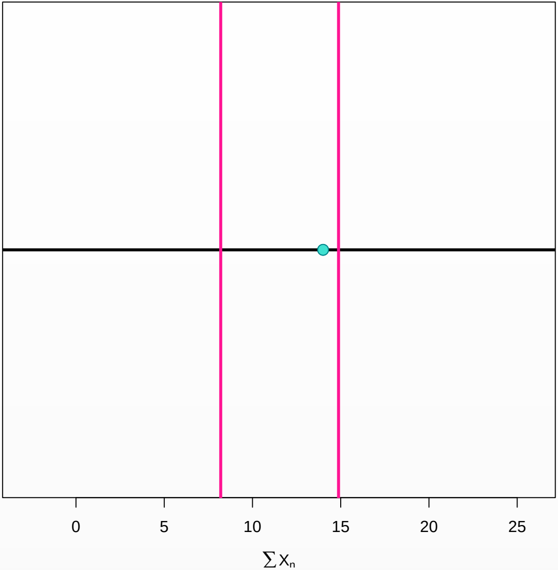

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

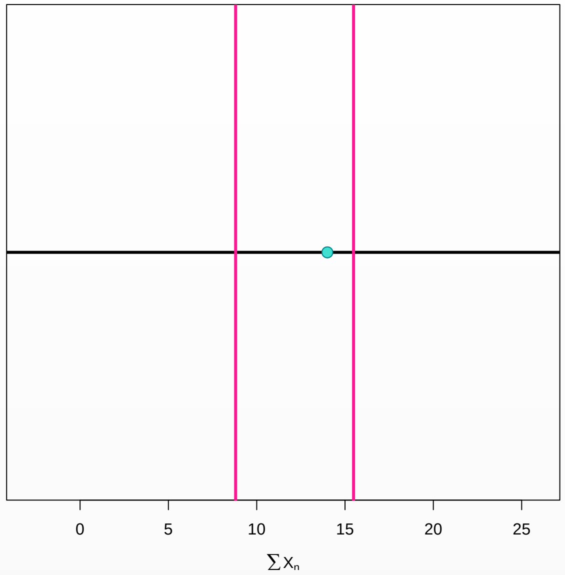

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

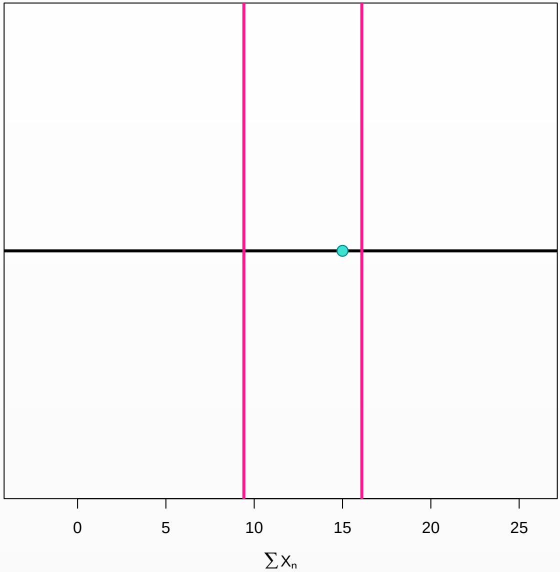

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

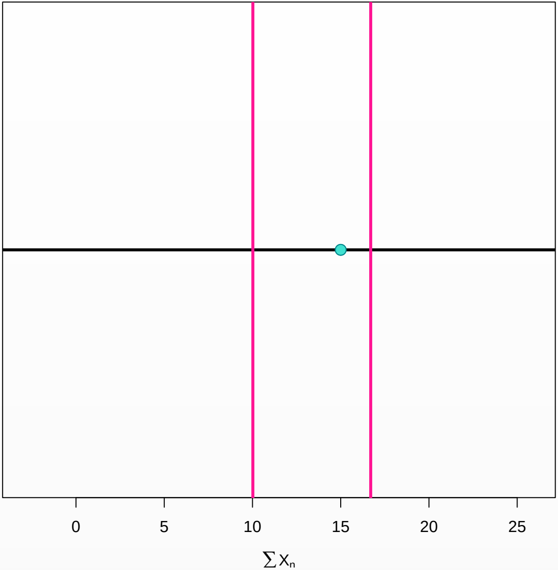

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

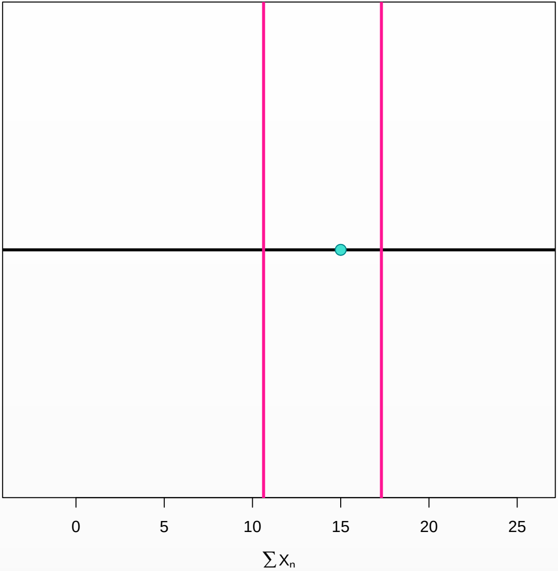

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

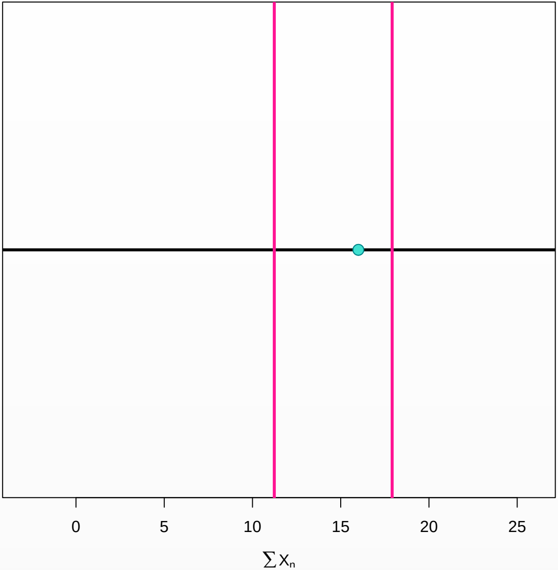

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

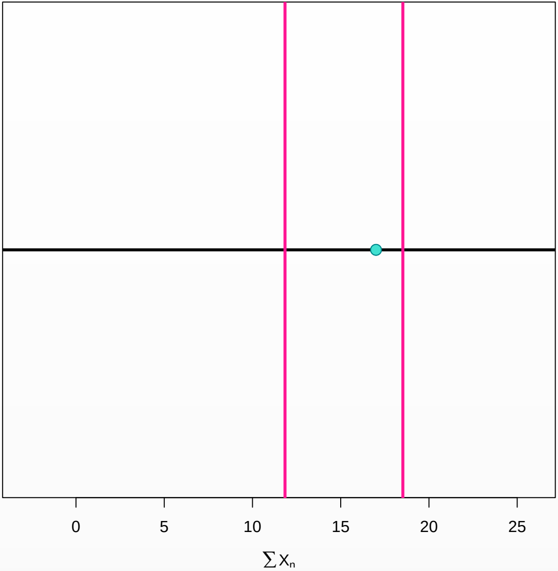

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

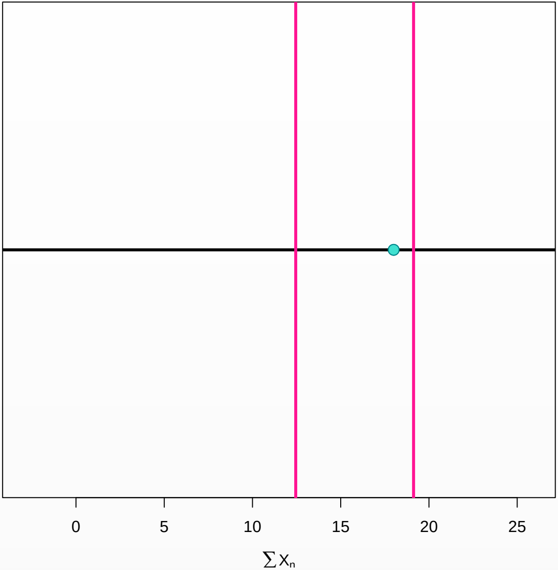

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

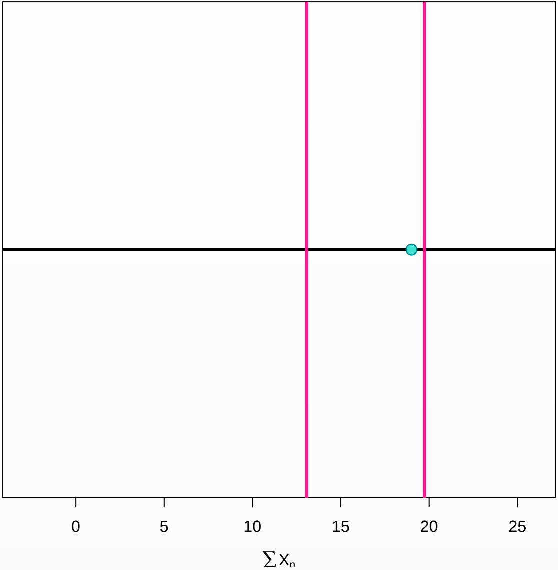

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

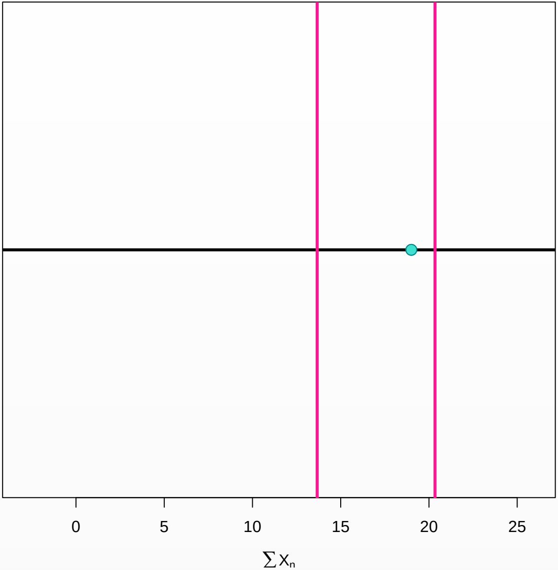

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

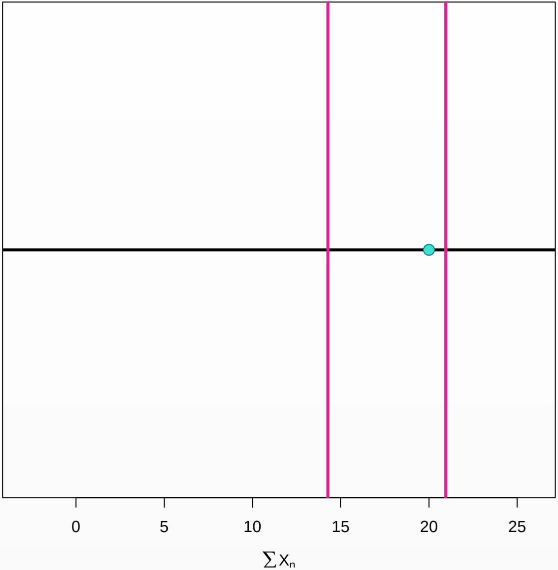

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

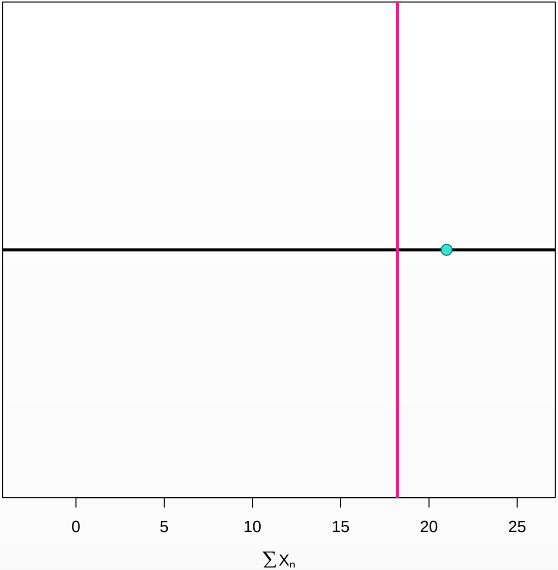

0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$


0
5
10
15
20
25
∑Xn


0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$


0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$


0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$


0
5
10
15
20
25
$\sum X_n$

Waldův sekvenční test rozptylu

V normální rozdělení se známou střední hodnotou

- máme $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost iid náhodných veličin
- $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma_X^2) \quad i = 1, 2, \ldots,$
- μ je známé
- testujeme

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_0^2 \quad \text{proti} \quad H_1 : \sigma_X^2 = \sigma_1^2,$$

$$0 < \sigma_0^2 < \sigma_1^2 < 1$$

- dále postupujeme stejně jako v případě alternativního rozdělení

- volíme a, b jako v předchozích simulacích
- dále $\mu = 1$, $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = 2$

σ^2	$\hat{L}(\sigma^2)$	podíl přijatých H_0	$\widehat{\mathbb{E}}(N, \sigma^2)$	průměr rozsahů
1.00	0.9506	0.9738	27.5936	30.1248
1.25	0.7107	0.7625	36.5696	44.6926
1.50	0.3398	0.3561	33.3232	43.4502
1.75	0.1283	0.1236	24.1770	31.3942
2.00	0.0494	0.0456	17.3686	22.7905

- volíme a, b jako v předchozích simulacích
- dále $\mu = 1$, $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = 11$

σ^2	$\hat{L}(\sigma^2)$	podíl přijatých H_0	$\widehat{\mathbb{E}}(N, \sigma^2)$	průměr rozsahů
1.0	0.9506	0.9930	3.5798	4.5481
3.5	0.3390	0.3689	2.4286	5.8070
6.0	0.1406	0.1199	3.9163	1.3904
8.5	0.0771	0.0574	0.9386	3.0515
11.0	0.0494	0.0356	0.7011	2.6067

Waldův sekvenční test rozptylu

V normální rozdělení s neznámou střední hodnotou

- máme $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost iid náhodných veličin
- $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma_X^2) \quad i = 1, 2, \ldots,$
- μ je neznámé
- testujeme

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_0^2 \quad \text{proti} \quad H_1 : \sigma_X^2 = \sigma_1^2,$$

$$0 < \sigma_0^2 < \sigma_1^2 < 1$$

- zavedeme náhodné veličiny

$$Y_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - nX_{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \sim \quad \mathrm{N}(0, \sigma_X^2)$$

- dále použijeme Waldův sekvenční test rozptylu se známou střední hodnotou

- volíme a, b jako v předchozích simulacích
- dále budeme předpokládat, že skutečné μ je 1, $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = 2$

σ^2	$\hat{L}(\sigma^2)$	podíl přijatých H_0	$\widehat{\mathbb{E}}(N, \sigma^2)$	průměr rozsahů
1.00	0.9506	0.9722	27.5936	31.2326
1.25	0.7107	0.7618	36.5696	45.5935
1.50	0.3398	0.3555	33.3232	44.3014
1.75	0.1283	0.1235	24.1770	32.4396
2.00	0.0494	0.0446	17.3686	23.7381

σ^2	$\hat{L}(\sigma^2)$	podíl přijatých H_0	$\widehat{\mathbb{E}}(N, \sigma^2)$	průměr rozsahů
1.00	0.9506	0.9738	27.5936	30.1248
1.25	0.7107	0.7625	36.5696	44.6926
1.50	0.3398	0.3561	33.3232	43.4502
1.75	0.1283	0.1236	24.1770	31.3942
2.00	0.0494	0.0456	17.3686	22.7905

Tabulka: známá střední hodnota

σ^2	$\hat{L}(\sigma^2)$	podíl přijatých H_0	$\widehat{\mathbb{E}}(N, \sigma^2)$	průměr rozsahů
1.00	0.9506	0.9722	27.5936	31.2326
1.25	0.7107	0.7618	36.5696	45.5935
1.50	0.3398	0.3555	33.3232	44.3014
1.75	0.1283	0.1235	24.1770	32.4396
2.00	0.0494	0.0446	17.3686	23.7381

Tabulka: neznámá střední hodnota

Waldův sekvenční test rozptylu

σ^2	$\hat{L}(\sigma^2)$	podíl přijatých H_0	$\widehat{\mathbb{E}}(N, \sigma^2)$	průměr rozsahů
1.00	0.9506	0.9730	27.5936	31.2264
1.25	0.7107	0.7614	36.5696	45.6151
1.50	0.3398	0.3563	33.3232	44.2696
1.75	0.1283	0.1224	24.1770	32.4169
2.00	0.0494	0.0441	17.3686	23.7001

Tabulka: neznámé $\mu = 50$

σ^2	$\hat{L}(\sigma^2)$	podíl přijatých H_0	$\widehat{\mathbb{E}}(N, \sigma^2)$	průměr rozsahů
1.00	0.9506	0.9722	27.5936	31.2326
1.25	0.7107	0.7618	36.5696	45.5935
1.50	0.3398	0.3555	33.3232	44.3014
1.75	0.1283	0.1235	24.1770	32.4396
2.00	0.0494	0.0446	17.3686	23.7381

Tabulka: neznámé $\mu = 1$