Vybrané sekvenčné postupy

Filip Olejko

Univerzita Karlova
Matematicko-Fyzikální fakulta
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

26. apríl 2023

Prepoklady

- Nech $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ je iid postupnosť náhodných veličín s hustotou f$(x;\theta)$ vzhľadom k σ-konečnej miere μ
- uvažujeme odhad parametru $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$
- uvažujeme úlohu testu hypotézy: $H_0 : \theta \in \omega_0$ proti $H_1 : \theta \in \omega_1$ kde $\omega_0, \omega_1 \subseteq \Theta$, $\overline{\omega_0} \cap \overline{\omega_1} = \emptyset$ a aspoň jedna z možnín obsahuje viac než jeden bod

Princíp váhových funkcí

- Konštrukcia sekvenčného testu pre test hypotézy H_0 proti H_1
- Za uvedených predpokladov zvolíme pravdepodobnostné miery w_0, w_1 definované na borelovský podmnožinách ω_0 resp. ω_1
- w_0, w_1 nazývame váhové funkcie
- definujeme nové hustoty pre (X_1, ..., X_n) predpisom:

$$f_{0n}(x_1, ..., x_n) = \int_{\omega_0} \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)\, dw_0(\theta)$$

$$f_{1n}(x_1, ..., x_n) = \int_{\omega_1} \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)\, dw_1(\theta)$$

- definujeme štatistiku:

$$Q_n^* = ln(\frac{f_{1n}(x_1, ..., x_n)}{f_{0n}(x_1, ..., x_n)})$$

Princíp váhových funkcí

- Pre riešenie úlohy môžeme použiť modifikáciu Waldovho testu:
  prijímame H_0, ak $Q_n^* \leq b$
  prijímame H_1, ak $Q_n^* \geq a$
  inak pokračujeme vo výbere, kde $a < b$ sú dané konštanty.
- Test označíme S(b,a,w_0,w_1)
- Ak test skončí s pravdepodobnosťou 1 a pri požiadavku :

$$\int_{\omega_1} P(prij.\ H_0\ pri\ S(b, a, w_0, w_1); \theta)\, dw_1(\theta) \leq \beta,$$

$$\int_{\omega_0} P(prij.\ H_1\ pri\ S(b, a, w_0, w_1); \theta)\, dw_0(\theta) \leq \alpha$$

kde $0 < \alpha + \beta < 1$, platia aproximácie:

$$ln(\frac{\beta}{1-\alpha}) \leq b, \qquad a \leq ln(\frac{1-\beta}{\alpha})$$

Sobel-Waldov test

- Predpokladáme, že $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ je iid postupnosť náhodných veličín s hustotou f$(x;\theta)$ exponencialneho typu:

$$f(x;\theta) = C(\theta)exp\{D(\theta)T(x)\}h(x),\ x \in E \subseteq R, \theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$$

kde T(x) a h(x) sú borelovské funckie zavislé iba na x, $C(\theta)$ a $D(\theta)$ sú reálne funkcie, $D(\theta)$ je klesajúca a E nezavisí na θ.

- Uvažujeme úlohu diskriminácie medzi tromi hypotézami:

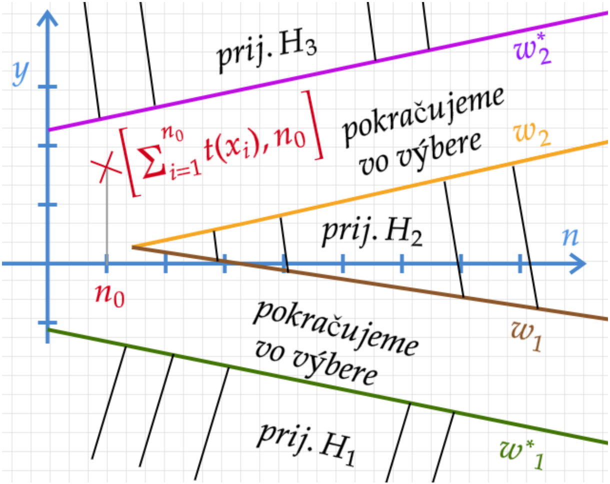
$$H_1 : \theta = \theta_1,\ H_2 : \theta = \theta_2,\ H_3 : \theta = \theta_3$$

kde $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3,\ \theta_i \in (\underline{\theta}, \overline{\theta}),\ i = 1, 2, 3$

Sobel-Waldov test

- Pri sekvenčnom prístupe použijeme tzv. Sobel-Waldov test (ozn. $\mathrm{S}(b_1, b_2, a_1, a_2)$) určený nasledujúcim pravidlom:
  a) prij. H_1, ak prij. H_1 na základe Waldovho testu $S_1(b_1, a_1)$
  b) prij. H_2, ak prij. H_2 na základe Wald. testov $S_1(b_1, a_1)$ a $S_2(b_2, a_2)$
  c) prij. H_3, ak prij. H_3 na základe Waldovho testu $S_2(b_2, a_2)$
  d) inak pokračujeme vo výbere
- Test $S_1(b_1, a_1)$ je Waldov test pre H_1 proti H_2 a $S_2(b_2, a_2)$ je Waldov test pre H_2 proti H_3

Sobel-Waldov test



Sobel-Waldov test

Príklad:

- Predpokladáme, že $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ je iid postupnosť náhodných veličín s rozdelením N(μ,1)
- Testujeme hypotézu:

$$H_0^* : \mu = \mu_0 \textit{ proti } H_1^* : |\mu - \mu_0| \geq \delta, \ \delta > 0 \textit{ dané}.$$

- Požadujeme, aby platilo:

$$P(prij.H_0^*; \theta_0) \geq 1 - \alpha, \ P(prij.H_1^*; \theta_0 - \delta) \geq 1 - \alpha,$$

$$P(prij.H_1^*; \theta_0 + \delta) \geq 1 - \alpha$$

Sobel-Waldov test

Riešenie pre konkrétnu voľbu parametrov bude:

- $\xi = \frac{\alpha}{2} = 0.025,\ \mu_0 = 0,\ \delta = 0.1,\ \alpha = 0.05$, potom:

$$-b_1^*(\xi) = a_2^*(\xi) = 3.376,\ -b_2^*(\xi) = a_1^*(\xi) = 2.970$$

- Pravidlo pre testovanie bude dané ako:
  H_0^* prijímame, ak $|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)| \leq$ -29.7 + 0.05n,
  H_1^* prijímame, ak $|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)| \geq 33.8 + 0.05$n,
  inak pokračujeme vo výbere.

Sobel-Waldov test

Riešenie pre konkrétnu voľbu parametrov bude:

- Tiež dostávame aproximatívne nerovnosti pre $\mathbb{E}(N;\theta)$:

$$661.4 \leq \mathbb{E}(N;-0.1) \leq 727.5$$

$$561 \leq \mathbb{E}(N;0) \leq 727.5$$

$$1080.5 \leq \mathbb{E}(N;0.1) \leq 1269.6$$

Porovnanie parametrov dvoch rozdelení

Príklad:

- Predpokladáme, že $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ sú iid postupnosť náhodných veličín s alternatívnym rozdelením s parametrami p_1, resp. p_2
- Chceme otestovať hypotézu:

$$H_0 : p_1 < p_2 \; proti \; H_1 : p_1 > p_2$$

- $H_0^{'}$ prijímame, ak $\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i)\epsilon \leq$ b,
  $H_1^{'}$ prijímame, ak $\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i)\epsilon \geq$ a,
  inak pokračujeme vo výbere.

Sekvenčný t-test

- K sekvenčnému t-testu sa dá dopracovať pomocou princípu váhových funkcií
- Uvažujme, že $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ je iid postupnosť náhodných veličín s rozdelením $\mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$, *kde* $\sigma^2 > 0,\ -\infty < \mu < +\infty$
- Uvažujme test hypotézy:

$$H_0 : \frac{\mu}{\sigma} = \lambda_0 \ \textit{proti} \ \frac{\mu}{\sigma} = \lambda_1,\ \lambda_0 < \lambda_1$$

K témuž testu můžeme dospět i na základě principu váhových funkcí. Položíme-li pro $i=1,2$

$$\frac{\partial w_{i,k}(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sigma \ln k}, \quad \mu = \lambda_i \sigma, \quad k^{-1} < \sigma < k,$$
$$= 0 \quad \text{jinak,}$$

Sekvenčný t-test

$$e_{n,k} = \ln \frac{\int_{k^{-1}}^{k} (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, w_{1,k}(\mu, \sigma^2) \, d\sigma}{\int_{k^{-1}}^{k} (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, w_{0,k}(\mu, \sigma^2) \, d\sigma} =$$

(4.3)

$$= \ln \frac{\int_{k^{-1}}^{k} \sigma^{-n-1} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda_1 \sigma)^2 / 2\sigma^2\right\} d\sigma}{\int_{k^{-1}}^{k} \sigma^{-n-1} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda_0 \sigma)^2 / 2\sigma^2 \right. d\sigma} .$$