

Zápočtová písemka z NMSA332

Varianta - vzorová verze

Příklad 1 (16 bodů)

Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení s hustotou

$$f(x, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \exp \left\{ \frac{-x^2}{2\sigma^2} \right\} \mathbb{I}\{x \geq 0\}.$$

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\sigma^2 > 0$.
- (ii) Sestavte test poměrem věrohodnosti, Raův skórový test a Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \sigma^2 = 1$ proti alternativě $H_1 : \sigma^2 \neq 1$.

Příklad 2 (10 bodů)

Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z Gamma rozdělení s hustotou

$$f_X(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{\{x>0\}},$$

kde $\alpha, \beta > 0$. Označme $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^\top$ neznámý vektorový parametr.

- (i) Je statistika $T_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ suficientní pro $\boldsymbol{\theta}$?
- (ii) Je statistika $T_2(\mathbf{X}) = (\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i)^\top$ suficientní pro $\boldsymbol{\theta}$?
- (iii) Je některá ze statistik $T_1(\mathbf{X})$ a $T_2(\mathbf{X})$ minimální suficientní pro $\boldsymbol{\theta}$?

Příklad 3 (24 bodů)

Uvažujte nezávislé náhodné vektory $(Y_1, X_1)^\top, \dots, (Y_n, X_n)^\top$ takové, že $Y_i|X_i$ má normální rozdělení $N(\beta X_i, \sigma^2)$ a X_i má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$. Parametry β a σ^2 jsou neznámé.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad vektorového parametru $\boldsymbol{\theta} = (\beta, \sigma^2)^\top$.
- (ii) Sestavte konfidenční množinu o (asymptotické) spolehlivosti $1 - \alpha$ pro parametr $\boldsymbol{\theta}$.
- (iii) Sestavte oboustranný intervalový odhad o (asymptotické) spolehlivosti $1 - \alpha$ pro parametr β .
- (iv) Sestavte (nějaký) test pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = 1$ proti alternativě $H_1 : \beta \neq 1$.