Základy teorie pravděpodobnosti

Pro předmět Matematická statistika 1

Michal Kulich

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Matematicko-fysikální fakulta University Karlovy

Tyto poznámky poskytují souhrn základních poznatků z teorie pravděpodobnosti, jež jsou potřebné pro výuku předmětu „Matematická statistika 1“ v rámci bakalářského studia oboru „Obecná matematika“ na MFF UK. Některé z nich se probírají v předmětech „Pravděpodobnost a matematická statistika“ a „Teorie pravděpodobnosti 1“, některé budou probrány na cvičení k předmětu „Matematická statistika 1“.

Tento učební text představuje drobnou modifikaci učebního textu, který připravil ***doc. Michal Kulich, Ph.D.****. Autor bude povděčen za upozornění na případné překlepy a nejasnosti, které laskavý čtenář nalezne kdekoli v tomto dokumentu.*

Obsah

Značení

$\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}$	transpozice vektoru $\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{a}^{\otimes 2}$	$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}$
$\lVert\boldsymbol{a}\rVert$	eukleidovská norma vektoru $\boldsymbol{a}$
$\xrightarrow{\mathsf{P}}$	konvergence v pravděpodobnosti
$\xrightarrow{\mathsf{sj}}$	konvergence skoro jistě
$\xrightarrow{\mathsf{d}}$	konvergence v distribuci
$X \sim \mathcal{L}$	X má přesné rozdělení $\mathcal{L}$
$X \overset{\mathsf{as.}}{\sim} \mathcal{L}$	X má přibližně (asymptoticky) rozdělení $\mathcal{L}$
γ_3	šikmost náhodné veličiny
γ_4	špičatost náhodné veličiny
λ	Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$
μ_S	čítací míra na nejvýše spočetné množině S
μ_k	k-tý centrální moment náhodné veličiny
μ_k'	k-tý moment náhodné veličiny
$\varrho(X, Y)$	korelační koeficient náhodných veličin X a Y
σ_X	směrodatná odchylka náhodné veličiny X
σ_X^2	rozptyl náhodné veličiny X
φ	hustota normovaného normálního rozdělení
Φ	distribuční funkce normovaného normálního rozdělení
Ω	prostor elementárních jevů
$\mathbb{1}_B$	indikátor množiny B
$\mathcal{A}$	σ-algebra náhodných jevů na Ω
$\mathcal{B}_0$	borelovská σ-algebra na $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}_0^n$	borelovská σ-algebra na $\mathbb{R}^n$
$\operatorname{cor}(X, Y)$	korelační koeficient náhodných veličin X a Y
$\operatorname{cor}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$	korelační matice náhodných vektorů $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$
$\operatorname{cov}(X_1, X_2)$	kovariance náhodných veličin X_1 a X_2
$\operatorname{cov}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$	kovarianční matice náhodných vektorů $\boldsymbol{X}_1$ a $\boldsymbol{X}_2$
$\mathsf{E}\,X$	střední hodnota náhodné veličiny (vektoru) X
$\mathsf{E}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z})$	podmíněná střední hodnota náhodného vektoru $\boldsymbol{U}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}$
$\mathsf{E}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})$	podmíněná střední hodnota náhodného vektoru $\boldsymbol{U}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z}$

f_X	hustota náhodné veličiny (vektoru) X
$f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z})$	podmíněná hustota náhodného vektoru $\boldsymbol{Y}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}$
F_X	distribuční funkce náhodné veličiny (vektoru) X
F_X^{-1}	kvantilová funkce náhodné veličiny X
$\mathcal{L}^p$	množina náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ s konečným p-tým absolutním momentem
$\mathcal{L}(X)$	rozdělení náhodné veličiny (vektoru) X
m_X	medián náhodné veličiny X
P	pravděpodobnost
P_X	rozdělení náhodné veličiny X, její indukovaná míra na výběrovém prostoru
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
S_X	nosič rozdělení náhodné veličiny X
$u_X(\alpha)$	α-kvantil náhodné veličiny X
$\mathsf{var}\, X$	rozptyl náhodné veličiny X
$\mathsf{var}\, \boldsymbol{X}$	rozptylová matice náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$
$\mathsf{var}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z})$	podmíněný rozptyl náhodného vektoru $\boldsymbol{U}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}$
$\mathsf{var}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})$	podmíněný rozptyl náhodného vektoru $\boldsymbol{U}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z}$
$\mathcal{X}$	výběrový prostor

1 Úvod

1.1 Pravděpodobnost

Nechť je dána libovolná množina Ω.

Definice 1.1 Systém $\mathcal{A}$ podmnožin množiny Ω nazveme *σ-algebrou* pokud platí
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
(iii) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Definice 1.2 (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti) Nechť Ω je nějaká množina a $\mathcal{A}$ σ-algebra jejích podmnožin. Funkci $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \langle 0, 1 \rangle$ nazveme *pravděpodobností*, právě když splňuje následující podmínky:
(a) $\mathsf{P}(A) \geq 0$, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;
(b) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ a $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j \Rightarrow \mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$.
[Dupač & Hušková 1999, Df. 1.1]

Definice 1.3 Množinu Ω nazýváme *prostor elementárních jevů*, její prvky $\omega \in \Omega$ nazýváme elementární jevy. Prvky σ-algebry $\mathcal{A}$ nazýváme *měřitelné množiny* nebo také *náhodné jevy*. Trojici $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ nazýváme *pravděpodobnostní prostor*.

Definice 1.4 (Podmíněná pravděpodobnost) Mějme náhodné jevy A, B, nechť $\mathsf{P}(B) > 0$. *Podmíněná pravděpodobnost* jevu A za podmínky, že nastal jev B je dána vztahem

$$\mathsf{P}\left(A \mid B\right) = \frac{\mathsf{P}(A \cup B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

[Dupač & Hušková 1999, Df. 1.2]

Tvrzení 1.1 Pro libovolných $n+1$ jevů $A_1, \ldots, A_{n+1}$ takových, že $\mathsf{P}(A_1 \cdots A_n) > 0$ platí

$$\mathsf{P}(A_1 \cdots A_{n+1}) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}\left(A_1 \mid A_0\right) \cdot \cdots \cdot \mathsf{P}\left(A_{n+1} \mid A_1 \cdots A_n\right).$$

[Dupač & Hušková 1999, V. 1.2]

Tvrzení 1.2 Nechť $B_1, B_2, \ldots$ je posloupnost vzájemně neslučitelných jevů takových, že $\mathsf{P}(B_i) > 0 \; \forall i$ a $\sum_i \mathsf{P}(B_i) = 1$. Pak pro libolný náhodný jev A platí

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(A \mid B_i\right) \mathsf{P}(B_i).$$

[Dupač & Hušková 1999, V. 1.3]

Definice 1.5 (Nezávislost náhodných jevů)

- Náhodné jevy $A_1, \ldots, A_n$ nazveme *(vzájemně) nezávislé* právě když platí
$$\mathsf{P}(A_1 \cdots A_n) = \mathsf{P}(A_1) \cdot \cdots \cdot \mathsf{P}(A_n).$$
- Náhodné jevy $A_1, A_2, \ldots$ nazveme *nezávislé* právě když platí
$$\forall k > 1 \quad \forall n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \quad A_{n_1}, \ldots, A_{n_k} \text{ jsou nezávislé.}$$

[Dupač & Hušková 1999, Df. 1.3 a 1.4]

Tvrzení 1.3 Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé jevy. Pak platí
(i) $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n^c$ jsou nezávislé jevy.
(ii) $\mathsf{P}\left(A_1 \cdots A_j \,\middle|\, A_{j+1} \cdots A_n\right) = \mathsf{P}(A_1 \cdots A_j)$.
[Dupač & Hušková 1999, V. 1.5 a 1.6]

1.2 Náhodná veličina

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$.

Definice 1.6 Měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$, kde $\mathcal{X}$ je nějaká množina a $\mathcal{B}$ nějaká σ-algebra na $\mathcal{X}$, nazveme *náhodnou veličinou*. Množinu $\mathcal{X}$ nazýváme *výběrový prostor*.

Poznámka. Nechť jsou dány σ-algebry $\mathcal{A}$ na množině Ω a $\mathcal{B}$ na množině $\mathcal{X}$. Zobrazení $X : \Omega \to \mathcal{X}$ je měřitelné vzhledem k σ-algebrám $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když $\forall B \in \mathcal{B}$ platí $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ (tj. vzory měřitelných množin jsou měřitelné).

Poznámka. Zvolíme-li $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ a za $\mathcal{B}$ vezmeme borelovské množiny na $\mathbb{R}$, dostaneme reálnou náhodnou veličinu (většinou zvanou pouze „náhodná veličina“). Zvolíme-li $\mathcal{X} = \mathbb{R}^k$ a za $\mathcal{B}$ vezmeme borelovské množiny na $\mathbb{R}^k$, dostaneme náhodný vektor. Jiné volby $\mathcal{X}$ pak vygenerují náhodnou posloupnost či náhodný proces.

1.3 Rozdělení náhodné veličiny, hustota

Definice 1.7 *Rozdělením* náhodné veličiny $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ rozumíme indukovanou pravděpodobnostní míru P_X na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ definovanou vztahem
$$\mathsf{P}_X(B) \overset{\text{df}}{=} \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}), \qquad B \in \mathcal{B}.$$
Pravděpodobnost $\mathsf{P}_X(B)$ značíme také $\mathsf{P}\,[X \in B]$. [Dupač & Hušková 1999, pozn. na str. 20]

Poznámka. Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ se pro danou náhodnou veličinu X transformuje na pravděpodobnostní prostor $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_X)$.

Tvrzení 1.4 (Věta o přenosu integrace) Nechť h jest měřitelná funkce z $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_0)$. Pak platí
$$\int_\Omega h(X(\omega))\, d\mathsf{P}(\omega) = \int_{\mathcal{X}} h(x)\, d\mathsf{P}_X(x).$$
[Anděl 2002, V. 1.1]

Poznámka.

- Míra μ na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ je σ-konečná, právě když existují množiny $B_1, B_2, B_3, \ldots \in \mathcal{B}$ takové, že $\mu(B_i) < \infty$ a $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \mathcal{X}$.
- Míra P_X je absolutně spojitá vzhledem k míře μ na $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ právě když $\forall B \in \mathcal{B}\ \mu(B) = 0 \Rightarrow \mathsf{P}_X(B) = 0$.

Tvrzení 1.5 (Radon-Nikodymova věta) Nechť $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ je náhodná veličina, nechť μ je σ-konečná míra na $\mathcal{X}$ a nechť P_X je absolutně spojitá vzhledem k μ. Pak existuje reálná měřitelná nezáporná funkce $f_X(x)$ taková, že pro každou měřitelnou funkci $h : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_0)$ platí

$$\int_{\mathcal{X}} h(x)\, d\mathsf{P}_X(x) = \int_{\mathcal{X}} h(x) f_X(x)\, d\mu(x).$$

Funkce $f_X(x)$ je určena jednoznačně μ-skoro všude.

Definice 1.8 Funkce f_X z předchozí věty se nazývá *hustotou* náhodné veličiny X vzhledem k míře μ.

Definice 1.9 Nechť $B \in \mathcal{B}$. Funkci

$$\mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in B, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

nazýváme *indikátor* množiny B.

Poznámka. Zvolme nějaké $B \in \mathcal{B}$ a dosaďme za funkci h indikátor množiny B. Pak máme z věty o přenosu integrace

$$\int_{\Omega} \mathbb{1}_B(X(\omega))\, d\mathsf{P}(\omega) = \int_B 1\, d\mathsf{P}_X(x) = \mathsf{P}\,[X \in B]$$

a z Radon-Nikodymovy věty

$$\mathsf{P}\,[X \in B] = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{1}_B(x)\, d\mathsf{P}_X(x) = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{1}_B(x) f_X(x)\, d\mu(x) = \int_B f_X(x)\, d\mu(x).$$

Hustota tedy jednoznačně určuje rozdělení náhodné veličiny X.

2 Reálná náhodná veličina a její rozdělení

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. V této kapitole se zabýváme reálnými náhodnými veličinami, tj. $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_0)$.

2.1 Charakterizace rozdělení reálné náhodné veličiny

Uveďme si několik způsobů, jak specifikovat rozdělení reálné náhodné veličiny. Výčet nebude úplný, existují i jiné způsoby (charakteristická funkce).

Hustota

Zvolme σ-konečnou míru μ na $\mathbb{R}$ tak, aby P_X byla absolutně spojitá vzhledem k μ. Podle tvrzení 1.5 a poznámky pod definicí 1.8 existuje nezáporná měřitelná $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (jednoznačně určená skoro všude) taková, že $\mathsf{P}[X \in B] = \int_B f_X(x)\, d\mu(x)\ \forall B \in \mathcal{B}_0$. Vezmeme-li $B = \mathbb{R}$, máme $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, d\mu(x) = 1$.

Příklad.

- P_X absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře λ: X je *spojitá náhodná veličina* [náhodná veličina se *spojitým rozdělením*]
- P_X absolutně spojitá vzhledem k čítací míře μ_S (S nejvýše spočetná množina v $\mathbb{R}$): X je *diskrétní náhodná veličina* [náhodná veličina s *diskrétním rozdělením*]
- P_X absolutně spojitá vzhledem k $\lambda + \mu_{\{0\}}$: náhodná veličina s diskrétní i spojitou složkou

Distribuční funkce

Definice 2.1 Funkci $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem $F_X(x) = \mathsf{P}[X \le x]$ nazýváme *distribuční funkcí* náhodné veličiny X. [Dupač & Hušková 1999, Df. 2.4]

Poznámka. Distribuční funkce F_X jednoznačně charakterizuje rozdělení X.
(Jedním směrem zřejmé, druhým směrem plyne z toho, že množiny $(-\infty, x\rangle$ generují borelovskou σ-algebru $\mathcal{B}_0$).

Poznámka.

- U spojité náhodné veličiny máme $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$, z čehož plyne $f_X(x) = dF_X(x)/dx$ skoro všude.
- U diskrétní náhodné veličiny s hodnotami v S máme $F_X(x) = \sum_{t \in S,\, t \le x} \mathsf{P}[X = t]$, z čehož plyne $\mathsf{P}[X = x] = \Delta F_X(x)$.

Tvrzení 2.1 (Vlastnosti distribuční funkce)
(i) F_X je neklesající, zprava spojitá
(ii) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
(iii) Pro libovolnou měřitelnou $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí

$$\int h(x) f_X(x)\, d\mu(x) = \int h(x)\, dF_X(x)$$

[Dupač & Hušková 1999, V. 2.2]

Poznámka. $\int h(x)\, dF_X(x)$ je Lebesgueův-Stieltjesův integrál. Tvrzení 1.4, 1.5 a 2.1 dohromady dávají

$$\int_\Omega h(X(\omega))\, d\mathsf{P}(\omega) = \int h(x)\, d\mathsf{P}_X(x) = \int h(x) f_X(x)\, d\mu(x) = \int h(x)\, dF_X(x).$$

Kvantilová funkce

Definice 2.2 Nechť F_X je distribuční funkce reálné náhodné veličiny X. Funkce

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x : F_X(x) \geq u\}, \quad u \in (0,1)$$

se nazývá *kvantilová funkce* náhodné veličiny X.

Poznámka. Kvantilová funkce je neklesající a zleva spojitá. Z kvantilové funkce lze jednoznačně určit funkci distribuční. Je-li F_X rostoucí a spojitá, pak F_X^{-1} je inversní funkcí k F_X.

Definice 2.3 Nechť $\alpha \in (0,1)$. α-*kvantil* $u_X(\alpha)$ rozdělení F_X je kterékoli reálné číslo splňující $\lim_{h\searrow 0} F_X(u_X(\alpha) - h) \leq \alpha$ a $F_X(u_X(\alpha)) \geq \alpha$.

Poznámka. Definicí kvantilu je více, tato jej neurčuje vždy jednoznačně. $F_X^{-1}(\alpha)$ je vždy jeden z α-kvantilů.

Definice 2.4
- 0.5-kvantil se zove *medián* náhodné veličiny X; budeme jej značit m_X
- 0.25- a 0.75-kvantily se zovou *kvartily* náhodné veličiny X

2.2 Momenty reálné náhodné veličiny

Definice 2.5 *Střední hodnotou* $\mathsf{E}\,X$ (reálné) náhodné veličiny X rozumíme reálné číslo $\mathsf{E}\,X$ dané výrazem

$$\mathsf{E}\,X \stackrel{\text{df}}{=} \int_\Omega X(\omega)\, d\mathsf{P}(\omega),$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Poznámka. Tuto definici lze snadno použít i v obecnějších výběrových prostorech.

Poznámka. Nechť h je reálná měřitelná funkce. Poznámka pod tvrzením 2.1 říká, že

$$\mathsf{E}\, h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, d\mathsf{P}_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\, d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dF_X(x)$$

Integrál uprostřed umíme v principu počítat pro μ Lebesgueovu nebo čítací míru. Integrál vpravo je Lebesgueův-Stieltjesův integrál. Výhodou tohoto zápisu je, že nemusíme specifikovat míru μ.

Značení. Značkou $\mathcal{L}^p$ budeme značit množinu všech reálných náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ takových, že $\mathsf{E}\, |X|^p < \infty$.

Tvrzení 2.2 (Vlastnosti střední hodnoty) Nechť $X, Y \in \mathcal{L}^1$. Pak platí

(i) $\mathsf{E}\,(a + bX) = a + b\mathsf{E}\, X \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathsf{E}\,(X + Y) = \mathsf{E}\, X + \mathsf{E}\, Y$

(iii) $\mathsf{P}\,[X \le Y] = 1 \Rightarrow \mathsf{E}\, X \le \mathsf{E}\, Y$

(iv) Jestliže $\exists \mu \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$ pak $\mathsf{E}\, X = \mu$

Věta 2.3 Nechť $X \in \mathcal{L}^1$ je spojitá, má distribuční funkci F_X a platí $X \ge 0$ s.j. Pak

$$\mathsf{E}\, X = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)]\, dx.$$

[Anděl 2002, V. 1.2]

Definice 2.6

- $\mu'_k \overset{\text{df}}{=} \mathsf{E}\, X^k$ se nazývá *k-tý moment* náhodné veličiny X (typicky je k přirozené, ale nemusí to tak nutně být)
- $\mu_k \overset{\text{df}}{=} \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}\, X)^k$ se nazývá *k-tý centrální moment* náhodné veličiny X
- $\mathsf{E}\, |X|^k$ se nazývá *k-tý absolutní moment* náhodné veličiny X

Definice 2.7

- *Rozptyl* $\mathsf{var}\, X$ náhodné veličiny X je její druhý centrální moment, tj. $\mathsf{var}\, X = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}\, X)^2$. Rozptyl se může také značit σ_X^2 nebo σ^2.
- *Směrodatná odchylka* σ_X náhodné veličiny X je odmocnina z jejího rozptylu, $\sigma_X = \sqrt{\mathsf{var}\, X}$.
- *Šikmost* γ_3 náhodné veličiny X je definována jako $\gamma_3 \overset{\text{df}}{=} \mu_3/\sigma^3$.
- *Špičatost* γ_4 náhodné veličiny X je definována jako $\gamma_4 \overset{\text{df}}{=} \mu_4/\sigma^4$.

Tvrzení 2.4 (Vlastnosti rozptylu) Nechť X je náhodná veličina taková, že $\mathsf{var}\, X < \infty$. Pak platí

(i) $\mathsf{var}\, X \ge 0$; navíc $\mathsf{var}\, X = 0 \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : \mathsf{P}\,[X = c] = 1$

(ii) $\mathsf{var}\, X = \mathsf{E}\, X^2 - (\mathsf{E}\, X)^2$

(iii) $\mathsf{var}\,(a + bX) = b^2\, \mathsf{var}\, X$ pro $a, b \in \mathbb{R}$

Věta 2.5 (Jensenova nerovnost) Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v intervalu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ (může být nekonečný), tj. $\mathsf{P}\,[X \in \mathcal{I}] = 1$. Nechť g je [neostře] konvexní funkce na $\mathcal{I}$ taková, že existuje $\mathsf{E}\, g(X)$. Pak

$$\mathsf{E}\, g(X) \ge g(\mathsf{E}\, X)$$

a rovnost nastává právě když $g(x) = a + bx$ nebo X je konstanta skoro jistě.

Důsledky.

1. $\mathsf{E}\,X^2 \geq (\mathsf{E}\,X)^2$.
2. $\mathsf{E}\,\log X \leq \log \mathsf{E}\,X$ pro $X \in \mathcal{L}^1$ takovou, že $\mathsf{P}\,[X > 0] = 1$.
3. Nechť $p > q > 0$. Pak $(\mathsf{E}\,|X|^p)^{1/p} \geq (\mathsf{E}\,|X|^q)^{1/q}$.
4. Nechť $p > q > 0$ a $\mathsf{E}\,|X|^p < \infty$. Pak $\mathsf{E}\,|X|^q < \infty$.

Věta 2.6 (Markovova nerovnost) Nechť $X \in \mathcal{L}^r$, kde $r > 0$. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\,[|X| \geq \varepsilon] \leq \frac{\mathsf{E}\,|X|^r}{\varepsilon^r}.$$

[Dupač & Hušková 1999, V. 2.10(ii)]

Důsledek (Čebyševova nerovnost)**.** Pro $X \in \mathcal{L}^2$ a pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\mathsf{P}\,[|X - \mathsf{E}\,X| \geq \varepsilon] \leq \frac{\mathsf{var}\,X}{\varepsilon^2}.$$

Důsledek. Pro $X \in \mathcal{L}^2$ s rozptylem $\mathsf{var}\,X = \sigma^2$ platí (například)

$$\mathsf{P}\,[|X - \mathsf{E}\,X| \geq 3\sigma] \leq \frac{1}{9}.$$

3 Náhodný vektor a mnohorozměrné rozdělení

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. V této kapitole se zabýváme náhodnými vektory, tj. $\boldsymbol{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0^n)$.

3.1 Rozdělení náhodného vektoru

Poznámka. Náhodný vektor je (do sloupce) uspořádaná n-tice náhodných veličin, tj.

$$\boldsymbol{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))^\mathsf{T}.$$

Definice 3.1 $\mathcal{B}_0^n$ je borelovská σ-algebra v $\mathbb{R}^n$ definovaná jako

$$\mathcal{B}_0^n = \sigma\{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n); a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n \in \mathbb{R}\}$$

Poznámka. Míru na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0^n)$ stačí definovat na některém generátoru borelovské σ-algebry, např. na otevřených nebo uzavřených n-rozměrných kvádrech.

Hustota náhodného vektoru

Poznámka. Podle Radon-Nikodymovy věty (Tvrzení 1.5) platí: Jestliže $\mathsf{P}_{\boldsymbol{X}}$ je absolutně spojitá vzhledem k σ-konečné míře μ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0^n)$, tj. $\mu(B) = 0 \Rightarrow \mathsf{P}[\boldsymbol{X} \in B] = 0$ pro $B \in \mathcal{B}_0^n$, pak existuje jednoznačně (až na množiny s nulovou mírou μ) daná nezáporná měřitelná funkce $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, zvaná *hustota* náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$ taková, že

$$\int_\Omega h(\boldsymbol{X}(\omega))\, d\mathsf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{x})\, d\mathsf{P}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\, d\mu(\boldsymbol{x})$$

pro každou měřitelnou funkci $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Značení. V dalším výkladu používáme v argumentech funkcí definovaných na $\mathbb{R}^n$ záměnně značení $\boldsymbol{x}$ a $(x_1, \dots, x_n)$.

Poznámka.

- Jestliže je rozdělení $\boldsymbol{X}$ absolutně spojité vzhledem k Lebesgueově míře λ^n na $\mathbb{R}^n$, pak rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$ nazýváme *spojité* a $\mathsf{P}[\boldsymbol{X} \in B]$ počítáme jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_B(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

- Nechť je rozdělení $\boldsymbol{X}$ absolutně spojité vzhledem k čítací míře μ_S na $\mathbb{R}^n$, kde S je nejvýše spočetná množina bodů v $\mathbb{R}^n$ tvaru $S_1 \times S_2 \times \cdots S_n$ a $S_k = \{t_{k,1}, t_{k,2}, \ldots\}$. Pak rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$ nazýváme *diskrétní* a $\mathsf{P}\left[\boldsymbol{X} \in B\right]$ počítáme jako

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=1}^{\infty} \mathbb{1}_B(t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \ldots, t_{n,i_n}) \cdot \mathsf{P}\left[\boldsymbol{X} = (t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \ldots, t_{n,i_n})\right].$$

- Jestliže náhodný vektor obsahuje diskrétní i spojité složky, pak jeho rozdělení není ani diskrétní, ani spojité. Přesto pro něj máme použitelnou hustotu, s jejíž pomocí můžeme vyjádřit $\mathsf{P}\left[\boldsymbol{X} \in B\right]$
- Jestliže všechny složky náhodného vektoru jsou spojité, neznamená to nutně, že vektor jako celek má spojité rozdělení. Příklad: rozdělení na jednotkové kružnici v $\mathbb{R}^2$.

Distribuční funkce náhodného vektoru

Definice 3.2 Funkci

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}\left[X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\right]$$

nazýváme *distribuční funkcí* náhodného vektoru. [Dupač & Hušková 1999, Df. 3.1]

Tvrzení 3.1 Jestliže je rozdělení $\boldsymbol{X}$ absolutně spojité vzhledem k Lebesgueově míře λ^n, pak

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

a naopak,

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^n F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \quad \text{skoro všude.}$$

[Dupač & Hušková 1999, Df. 3.3]

Poznámka.

1. Distribuční funkce jednoznačně určuje rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.
2. Kvůli jednoduššímu značení budeme psát

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{x})\, dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{df}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\, d\mu(\boldsymbol{x}).$$

Sdružené a marginální rozdělení

Definice 3.3

- Rozdělení celého náhodného vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ se říká *sdružené rozdělení*. Jeho distribuční funkce a hustota se nazývají *sdružená distribuční funkce* a *sdružená hustota*.
- Rozdělením jednotlivých náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$ se říká *marginální rozdělení*. Jejich distribuční funkce a hustoty se nazývají *marginální distribuční funkce* a *marginální hustoty*.

Tvrzení 3.2 Ze sdruženého rozdělení $\boldsymbol{X}$ lze jednoznačně určit marginální rozdělení $X_1, \ldots, X_n$. Platí

$$F_{X_i}(u) = \lim_{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n \to \infty} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

a pro spojitý náhodný vektor navíc

$$f_{X_i}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n. \tag{3.1}$$

3.2 Momenty

Střední hodnota

Poznámka. Podle definice 2.5 a poznámek na str. 15 a 16 máme pro libovolnou měřitelnou funkci $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}\, h(\boldsymbol{X}) = \int_\Omega h(\boldsymbol{X}(\omega))\, d\mathsf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\, d\mu(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{x})\, dF_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}).$$

Definice 3.4 Pro měřitelnou $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definujeme

$$\mathsf{E}\, g(\boldsymbol{X}) = (\mathsf{E}\, g_1(\boldsymbol{X}), \ldots, \mathsf{E}\, g_m(\boldsymbol{X}))^\mathsf{T}.$$

Poznámka. Střední hodnota náhodného vektoru je tedy vektorem středních hodnot jejích složek. Střední hodnota matice náhodných veličin je maticí středních hodnot jednotlivých prvků.

Rozptyl

V této části nechť $X_i \in \mathcal{L}^2$, $i = 1, \ldots, n$.

Značení. Nechť $\boldsymbol{a}$ je sloupcový vektor v $\mathbb{R}^n$. Pak definujeme $\boldsymbol{a}^{\otimes 2} \overset{\mathrm{df}}{=} \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\mathsf{T}$ (matice součinů prvků a_i a a_j).

Definice 3.5

(a) Matice

$$\operatorname{var} \boldsymbol{X} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathsf{E}\,(\boldsymbol{X} - \mathsf{E}\,\boldsymbol{X})^{\otimes 2} = \mathsf{E}\,(\boldsymbol{X} - \mathsf{E}\,\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X} - \mathsf{E}\,\boldsymbol{X})^\mathsf{T}$$

se nazývá *rozptylová* (varianční) matice náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$. [Dupač & Hušková 1999, Df. 3.5]

(b) (i, j)-tý prvek matice $\operatorname{var} \boldsymbol{X}$ jest $\mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\,X_i)(X_j - \mathsf{E}\,X_j)$ a nazývá se *kovariance* náhodných veličin X_i a X_j. [Dupač & Hušková 1999, Df. 3.4]

(c) Rozdělíme-li $\boldsymbol{X}$ na $\boldsymbol{X} = \binom{\boldsymbol{X}_1}{\boldsymbol{X}_2}$, pak matice

$$\mathsf{cov}\,(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) \stackrel{\mathsf{df}}{=} \mathsf{E}\,(\boldsymbol{X}_1 - \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_1)(\boldsymbol{X}_2 - \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_2)^{\mathsf{T}}$$

se nazývá *kovarianční matice* vektorů $\boldsymbol{X}_1$ a $\boldsymbol{X}_2$.

Tvrzení 3.3
(i) i-tý diagonální prvek matice $\mathsf{var}\,\boldsymbol{X}$ je $\mathsf{var}\,X_i$.
(ii) $\mathsf{var}\,\boldsymbol{X}$ je positivně semidefinitní matice [značíme $\mathsf{var}\,\boldsymbol{X} \geq 0$], tj. $\forall \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n\ \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}(\mathsf{var}\,\boldsymbol{X})\boldsymbol{c} \geq 0$.
(iii) Je-li $\mathsf{var}\,\boldsymbol{X}$ singulární, pak existuje lineární kombinace složek $\boldsymbol{X}$, jež je skoro jistě rovna konstantě.
(iv) $\mathsf{var}\,\boldsymbol{X} = \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}^{\otimes 2} - (\mathsf{E}\,\boldsymbol{X})^{\otimes 2}$, $\mathsf{cov}\,(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2^{\mathsf{T}} - \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_1\,\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_2^{\mathsf{T}}$.
(v) $\mathsf{cov}\,(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = \mathsf{cov}\,(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_1)^{\mathsf{T}}$, $\mathsf{cov}\,(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \mathsf{var}\,\boldsymbol{X}$.
(vi) Pro vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ a matice $\mathbb{B}$, $\mathbb{D}$ vhodných dimenzí platí

$$\mathsf{cov}\,(\boldsymbol{a} + \mathbb{B}\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{c} + \mathbb{D}\boldsymbol{X}_2) = \mathbb{B}\,\mathsf{cov}\,(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)\mathbb{D}^{\mathsf{T}}.$$

Speciálně: $\mathsf{var}\,(\boldsymbol{a} + \mathbb{B}\boldsymbol{X}) = \mathbb{B}\,(\mathsf{var}\,\boldsymbol{X})\mathbb{B}^{\mathsf{T}}$.

Důsledek. Dosadíme-li v části (vi) předchozího tvrzení $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2 = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ a $\mathbb{B} = \mathbb{D} = (1, \ldots, 1)$, dostaneme vztah pro rozptyl součtu n náhodných veličin:

$$\mathsf{var}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{var}\,X_i + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mathsf{cov}\,(X_i, X_j) \tag{3.2}$$

Tvrzení 3.4 Nechť $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ jsou náhodné vektory v $\mathbb{R}^n$, jejichž složky mají konečné druhé momenty. Pak platí

$$\mathsf{var}\,(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) = \mathsf{var}\,\boldsymbol{X} + \mathsf{cov}\,(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + \mathsf{cov}\,(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})^{\mathsf{T}} + \mathsf{var}\,\boldsymbol{Y}$$

3.3 Nezávislost

Definice 3.6 [Dupač & Hušková 1999, Df. 3.6 a V. 3.6]

- Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nazveme *(vzájemně) nezávislé* právě když pro každý bod $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{X_1}(x_1) \cdot \cdots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

- Náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots$ nazveme *(vzájemně) nezávislé* právě když

$$\forall k > 1 \quad \forall n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \quad X_{n_1}, \ldots, X_{n_k} \text{ jsou nezávislé.}$$

- Náhodné vektory $\boldsymbol{X}_1$ s n_1 složkami a $\boldsymbol{X}_2$ s n_2 složkami nazveme *nezávislé* právě když pro každý bod $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{x}_1) \cdot F_{\boldsymbol{X}_2}(\boldsymbol{x}_2),$$

kde $n = n_1 + n_2$, $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{X}_2^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$ a $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{x}_2^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$.

Poznámka. Pro nezávislé náhodné veličiny platí, že vezmeme-li libovolné borelovské množiny $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0$, pak

$$\mathsf{P}\left[\boldsymbol{X} \in B_1 \times \dots \times B_n\right] = \mathsf{P}\left[X_1 \in B_1\right] \cdot \dots \cdot \mathsf{P}\left[X_n \in B_n\right],$$

neboli náhodné jevy $[X_i \in B_i]$ jsou vzájemně nezávislé [Dupač & Hušková 1999, V. 3.8]. Dále máme např.

$$\mathsf{P}\left[X_1 \in B_1 \mid X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n\right] = \mathsf{P}\left[X_1 \in B_1\right].$$

Pro nezávislé náhodné vektory platí, že vezmeme-li libovolné borelovské množiny $B_1 \in \mathcal{B}_0^{n_1}$ a $B_2 \in \mathcal{B}_0^{n_2}$, pak

$$\mathsf{P}\left[\boldsymbol{X} \in B_1 \times B_2\right] = \mathsf{P}\left[\boldsymbol{X}_1 \in B_1\right] \cdot \mathsf{P}\left[\boldsymbol{X}_2 \in B_2\right],$$

neboli náhodné jevy $[\boldsymbol{X}_i \in B_i]$ jsou nezávislé.

Tvrzení 3.5 Nechť náhodná veličina X_i má hustotu f_{X_i} vzhledem k σ-konečné míře μ_i, $i = 1, \dots, n$. Pak jsou náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ vzájemně nezávislé právě když vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ má hustotu $f_{\boldsymbol{X}}$ vzhledem k součinové míře $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ a platí

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i).$$

[Dupač & Hušková 1999, V. 3.9]

Tvrzení 3.6 Nechť $\boldsymbol{X}_1$ a $\boldsymbol{X}_2$ jsou nezávislé náhodné vektory a $g_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^q$ a $g_2 : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^s$ jsou libovolné měřitelné funkce. Pak $g_1(\boldsymbol{X}_1)$ a $g_2(\boldsymbol{X}_2)$ jsou nezávislé náhodné vektory.

Tvrzení 3.7 Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé.
- (i) Jsou-li $X_i \in \mathcal{L}^1$, pak $\mathsf{E}\,(X_1 \cdot \dots \cdot X_n) = \mathsf{E}\,X_1 \cdot \dots \cdot \mathsf{E}\,X_n$.
- (ii) Jsou-li $X_i \in \mathcal{L}^2$, pak $\mathsf{cov}\,(X_i, X_j) = 0 \;\forall i \neq j$.
- (iii) Jsou-li $X_i \in \mathcal{L}^2$ a $\sigma_i^2 = \mathsf{var}\,X_i$, pak $\mathsf{var}\,\boldsymbol{X} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$.

[Dupač & Hušková 1999, V. 3.17, 3.18, 3.19(4)]

Poznámka. Z vlastností (i) – (iii) předchozího tvrzení neplyne bez dalších podmínek nezávislost.

3.4 Korelace

Definice 3.7 Nechť X, Y jsou náhodné veličiny s kladnými a konečnými rozptyly. *Korelační koeficient* veličin X a Y se značí $\varrho(X, Y)$ nebo $\mathsf{cor}\,(X, Y)$ a je definován vztahem

$$\varrho(X, Y) = \frac{\mathsf{cov}\,(X, Y)}{\sqrt{\mathsf{var}\,X\,\mathsf{var}\,Y}}.$$

[Dupač & Hušková 1999, Df. 3.5]

Tvrzení 3.8 (Cauchyova-Schwartzova nerovnost)
Nechť $X, Y \in \mathcal{L}^2$. Pak $(\mathsf{E}\,XY)^2 \leq \mathsf{E}\,X^2\,\mathsf{E}\,Y^2$ a rovnost platí, právě když $X = bY$ s.j. pro nějaké $b \neq 0$.

Důsledek. Pro jakékoli veličiny $X, Y \in \mathcal{L}^2$ máme $|\operatorname{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\operatorname{var} X \operatorname{var} Y}$ a tudíž, pokud mají nenulový rozptyl, také $|\varrho(X, Y)| \leq 1$.

Tvrzení 3.9 (Vlastnosti korelačního koeficientu) Nechť $X, Y \in \mathcal{L}^2$, $\operatorname{var} X > 0$, $\operatorname{var} Y > 0$.

(i) $\varrho(X, Y) = \varrho(Y, X)$;

(ii) $-1 \leq \varrho(X, Y) \leq 1$,
- $\varrho(X, Y) = 1$ právě když $X = a + bY$ s.j., kde $b > 0$;
- $\varrho(X, Y) = -1$ právě když $X = a + bY$ s.j., kde $b < 0$;

(iii) $\varrho(a + bX, c + dY) = \operatorname{sgn}(bd)\varrho(X, Y)$.

Poznámka.
- Je-li $\varrho(X, Y) = 0$ (nebo $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$), náhodným veličinám X, Y se říká *nekorelované veličiny*. Nezávislé veličiny jsou i nekorelované, opak nutně neplatí.
- Korelační koeficient měří sílu *lineárního* vztahu mezi X a Y.

Definice 3.8 Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ a $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)^\mathsf{T}$ jsou dva náhodné vektory se složkami, jež mají konečné a kladné rozptyly. *Korelační maticí* $\operatorname{cor}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ vektorů $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ rozumíme matici typu $n \times m$ se složkami $\varrho(X_i, Y_j)$ na místě (i, j).

Poznámka. Korelační matice $\operatorname{cor}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})$ má tvar

$$\operatorname{cor}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{12} & \ldots & \varrho_{1n} \\ \varrho_{12} & 1 & \ldots & \varrho_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varrho_{1n} & \varrho_{2n} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\varrho_{jk} = \varrho(X_i, X_j)$. Je-li $\mathbb{V} = \operatorname{var} \boldsymbol{X}$, $\sigma_i = \sqrt{\operatorname{var} X_i}$ a $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, pak máme $\operatorname{cor}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{V}\mathbb{D}^{-1}$.

4 Podmíněné rozdělení

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. V této kapitole uvažujeme náhodné veličiny a náhodné vektory definované na tomto prostoru.

4.1 Podmíněná hustota

Uvažujme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$, který je rozdělen na dva podvektory $\boldsymbol{Y} = (X_1, \dots, X_r)^\top$ a $\boldsymbol{Z} = (X_{r+1}, \dots, X_n)^\top$, $1 \leq r < n$. Chceme zkoumat rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{Y}$ v situaci, kdy víme, že náhodný vektor $\boldsymbol{Z}$ nabyl konkrétní hodnoty $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n-r}$.

Definice 4.1 Nechť náhodný vektor $\boldsymbol{Y}$ má hustotu $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})$ vzhledem k σ-konečné míře μ_1 na $(\mathbb{R}^r, \mathcal{B}_0^r)$. Nechť náhodný vektor $\boldsymbol{Z}$ má hustotu $f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})$ vzhledem k σ-konečné míře μ_2 na $(\mathbb{R}^{n-r}, \mathcal{B}_0^{n-r})$. Nechť náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{Y}^\top, \boldsymbol{Z}^\top)^\top$ má hustotu $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ vzhledem k součinové míře $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0^n)$.

Podmíněnou hustotou náhodného vektoru $\boldsymbol{Y}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}$ nazveme libovolnou nezápornou měřitelnou funkci $f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z})$, která pro všechna $B \in \mathcal{B}_0^r$ a $C \in \mathcal{B}_0^{n-r}$ splňuje rovnost

$$\mathsf{P}\left[\boldsymbol{Y} \in B, \boldsymbol{Z} \in C\right] = \int_C \left[\int_B f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z})\, d\mu_1(\boldsymbol{y})\right] f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})\, d\mu_2(\boldsymbol{z}). \tag{4.1}$$

[Anděl 2002, Df. 3.18]

Poznámka. Podmíněná hustota za daných předpokladů existuje a je jednoznačně určena μ_1-skoro všude. Předpoklad existence hustoty $f_{\boldsymbol{X}}$ vzhledem k součinové míře $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ je závažný (někdy neplatí) a nutný (jinak nelze podmíněnou hustotu rovností (4.1) definovat).

Poznámka (Výpočet podmíněné hustoty)**.** Levá strana rovnosti (4.1) je vlastně

$$\int_{B \times C} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\, d\mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

Pravá strana dává

$$\int_{B \times C} f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})\, d\mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

Rovnost pro každé B a C nastane právě když

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})$$

μ-skoro všude. Podmíněnou hustotu tudíž můžeme počítat vztahem

$$f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z}) = \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})}{f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})}$$

pro $\boldsymbol{z}$ taková, že $f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) \neq 0$.

Věta 4.1 (Bayesova) Platí-li podmínky definice 4.1, pak podmíněná hustota $p(\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{y})$ náhodného vektoru $\boldsymbol{Z}$, je-li dáno $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$ je rovna

$$p(\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-r}} f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})\, d\mu_2(\boldsymbol{z})} & \text{pokud jmenovatel není roven 0,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

[Anděl 2002, V. 3.21]

4.2 Podmíněná střední hodnota

Stále se zabýváme náhodným vektorem $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ rozděleným na dva podvektory $\boldsymbol{Y} = (X_1, \dots, X_r)^\top$ a $\boldsymbol{Z} = (X_{r+1}, \dots, X_n)^\top$, $1 \leq r < n$. Máme tedy $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{Y}^\top, \boldsymbol{Z}^\top)^\top$.

Definice 4.2 Nechť $h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ je měřitelná funkce $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Označme $\boldsymbol{U} = h(\boldsymbol{X}) = h(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$.

1. *Podmíněná střední hodnota* $\mathsf{E}(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z})$ náhodného vektoru $\boldsymbol{U} \equiv h(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, je-li dáno $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}$ je definována výrazem

$$\mathsf{E}(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}) = \int_{\mathbb{R}^r} h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z})\, d\mu_1(\boldsymbol{y})$$

   (pokud existuje).

2. Označme $\phi(\boldsymbol{z}) = \mathsf{E}(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z})$ (je to nějaká měřitelná funkce z $\mathbb{R}^{n-r}$ do $\mathbb{R}^m$). Náhodný vektor $\phi(\boldsymbol{Z})$ značíme $\mathsf{E}(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})$ a nazýváme jej *podmíněnou střední hodnotou* náhodného vektoru $\boldsymbol{U} = h(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ při daném (leč neurčeném) $\boldsymbol{Z}$.

Poznámka. Jak je řečeno výše, podmíněná střední hodnota $\mathsf{E}(\cdot \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z})$ je funkce argumentu $\boldsymbol{z}$ zobrazující z $\mathbb{R}^{n-r}$ do $\mathbb{R}^m$. Pro pevné $\boldsymbol{z}$ je to konstanta (v $\mathbb{R}^m$). Podmíněná střední hodnota $\mathsf{E}(\cdot \mid \boldsymbol{Z})$ je náhodný vektor o m složkách; jeho realizovaná hodnota závisí na realizované hodnotě náhodného vektoru $\boldsymbol{Z}$.

Nyní přibereme do úvahy ještě další měřitelné funkce $h_1, h_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $\psi : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}$. Označme $\boldsymbol{U}_1 = h_1(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ a $\boldsymbol{U}_2 = h_2(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$. Nechť všechny složky $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{U}_2$ mají konečné první momenty.

Věta 4.2 (Vlastnosti podmíněné střední hodnoty)

(i) $\mathsf{E}(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{a}$ pro jakékoli $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$.

(ii) $\mathsf{E}[\mathsf{E}(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})] = \mathsf{E}\,\boldsymbol{U}$.

(iii) $\mathsf{E}(a_1 \boldsymbol{U}_1 + a_2 \boldsymbol{U}_2 \mid \boldsymbol{Z}) = a_1 \mathsf{E}(\boldsymbol{U}_1 \mid \boldsymbol{Z}) + a_2 \mathsf{E}(\boldsymbol{U}_2 \mid \boldsymbol{Z})$ pro jakékoli $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

(iv) $\mathsf{E}(\psi(\boldsymbol{Z}) \boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z}) = \psi(\boldsymbol{Z}) \mathsf{E}(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})$

[Anděl 2002, V. 3.22–3.25]

Věta 4.3 Nechť všechny složky $\boldsymbol{U} = h(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ mají konečný rozptyl a nechť τ je jakákoli měřitelná funkce z $\mathbb{R}^{n-r}$ do $\mathbb{R}^m$ taková, že všechny složky $\tau(\boldsymbol{Z})$ mají konečný rozptyl. Pak platí

$$\mathsf{var}\,[\boldsymbol{U} - \tau(\boldsymbol{Z})] \geq \mathsf{var}\,[\boldsymbol{U} - \mathsf{E}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})].$$

[Anděl 2002, V. 3.27]

Poznámka. Pracujeme-li s rozptylovými maticemi ($m > 1$), rozumíme výše uvedené nerovnosti tak, že rozdíl levé a pravé strany je positivně semidefinitní matice.

Poznámka. Věta 4.3 říká, že chceme-li aproximovat náhodný vektor $\boldsymbol{U}$ pomocí funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{Z}$, poskytuje podmíněná střední hodnota $\mathsf{E}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})$ nejlepší aproximaci (co do rozptylu) mezi všemi možnými funkcemi $\boldsymbol{Z}$.

Podmíněná střední hodnota se dá (obrazně leč poněkud nepřesně) vysvětlit tímto způsobem: Podmíněná střední hodnota odstraňuje z $\boldsymbol{U}$ náhodnost související s náhodným vektorem $\boldsymbol{Y}$, ale ponechává náhodnost způsobenou náhodným vektorem $\boldsymbol{Z}$.

Poznámka. V teorii pravděpodobnosti se zavádí obecná abstraktní definice podmíněné střední hodnoty, která nespoléhá na existenci podmíněné hustoty. O podmíněné střední hodnotě pak lze mluvit i tam, kde neexistuje podmíněná hustota. Například $\mathsf{E}\,(Z \mid Z)$ nelze podle definice 4.1 a 4.2 spočítat.

4.3 Podmíněný rozptyl

Nechť $\mathsf{E}\,\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{U} < \infty$, čili všech m složek náhodného vektoru $\boldsymbol{U} \equiv h(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ má konečné rozptyly.

Definice 4.3 *Podmíněný rozptyl* $\mathsf{var}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})$ náhodného vektoru $\boldsymbol{U}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z}$, jest definován výrazem

$$\mathsf{var}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z}) = \mathsf{E}\left([\boldsymbol{U} - \mathsf{E}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})]^{\otimes 2} \,\middle|\, \boldsymbol{Z}\right).$$

Poznámka. Podmíněný rozptyl z definice 4.3 je náhodná matice (náhodná veličina, pokud $m = 1$). Podobně lze definovat podmíněný rozptyl $\mathsf{var}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z})$ pro konkrétní realizovanou hodnotu $\boldsymbol{z}$ vektoru $\boldsymbol{Z}$.

Věta 4.4 (Rozklad nepodmíněného rozptylu)

$$\mathsf{var}\,\boldsymbol{U} = \mathsf{E}\,\mathsf{var}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z}) + \mathsf{var}\,\mathsf{E}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z}).$$

[Anděl 2002, V. 3.26]

5 Transformace náhodných veličin a vektorů

Na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ uvažujme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$, jehož rozdělení známe, a měřitelnou funkci $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Naším cílem je zjistit rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$.

Definice 5.1 (Nosič rozdělení) Nechť X je (obecná) náhodná veličina, která nabývá hodnot z výběrového prostoru $\mathcal{X}$. Nechť rozdělení X je absolutně spojité vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ. Množinu $S_X \subseteq \mathcal{X}$ nazveme *nosičem rozdělení* náhodné veličiny X právě když platí:

1. $\mathsf{P}\,[X \in S_X] = 1$;
2. $\forall A \subset S_X : \mu(S_X \setminus A) > 0 \Rightarrow \mathsf{P}\,[X \in A] < 1$.

5.1 Transformace náhodných veličin

Nejprve uvažujme případ $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, tj. transformujeme reálnou náhodnou veličinu.

Tvrzení 5.1 (Věta o monotonní transformaci) Nechť X má distribuční funkci F_X a nosič S_X. Nechť funkce g zobrazuje S_X na $S_0 \subseteq \mathbb{R}$. Označme $Y = g(X)$.

(i) Je-li g ryze rostoucí, pak distribuční funkce náhodné veličiny Y je $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$ pro $y \in S_0$.

(ii) Je-li g ryze klesající, pak distribuční funkce náhodné veličiny Y je $F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y)-)$ pro $y \in S_0$.

Značení. Je-li g reálná funkce s limitami zleva ve všech bodech, pak výraz $g(x-)$ značí zleva spojitou verzi funkce g, tj. $g(x-) \overset{\text{df}}{=} \lim\limits_{h \searrow 0} g(x-h)$.

Důsledky.

1. Nechť X je spojitá reálná veličina s hustotou $f_X(x)$ a nechť g je ryze monotonní a diferencovatelná skoro všude. Hustota náhodné veličiny $Y = g(X)$ je pak rovna

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & \text{pro } y \in g(S_X); \\ 0 & \text{pro } y \notin g(S_X). \end{cases}$$

2. Nechť X je diskrétní reálná veličina s rozdělením $\mathsf{P}\,[X = x] = q_x$, $x \in S_X$. Pak $\mathsf{P}\left[Y = y\right] = q_{g^{-1}(y)}$, $y \in g(S_X)$.

Nyní prozkoumáme nemonotonní transformace. Budeme předpokládat, že existují intervaly $G_k \subseteq \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, takové, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \supseteq S_X$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, a g je ostře monotonní na každém G_k.

Značení.

- Označme $\mathcal{K}^+$ množinu všech indexů k takových, že g roste na G_k a $\mathcal{K}^-$ množinu všech indexů k takových, že g klesá na G_k.
- Označme g_k funkci g restriktovanou na G_k, třeba $g_k(x) = g(x)\mathbb{1}_{G_k}(x)$. Pak existuje $g_k^{-1}(y)$ pro $y \in g_k(G_k)$.
- Označme $X_k = X\, \mathbb{1}_{G_k}(X)$, $Y_k = g_k(X_k)$. Máme $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ a $Y = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k$.

Tvrzení 5.2 Za daných předpokladů platí

$$F_Y(y) = \sum_{k \in \mathcal{K}^+} \mathsf{P}\left[X_k \leq g_k^{-1}(y), X \in G_k\right] + \sum_{k \in \mathcal{K}^-} \mathsf{P}\left[X_k \geq g_k^{-1}(y), X \in G_k\right].$$

Tvrzení 5.3 Nechť má navíc X hustotu vzhledem k Lebesgueově míře a nechť je každá g_k diferencovatelná (skoro všude) v G_k. Pak Y má hustotu

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_X(g_k^{-1}(y)) \left| \frac{dg_k^{-1}(y)}{dy} \right| \mathbb{1}_{g_k(G_k)}(y).$$

Poznámka. Chceme-li pouze spočítat střední hodnotu $\mathsf{E}\, Y \equiv \mathsf{E}\, g(X)$, je obvykle snazší použít přímý vzorec $\mathsf{E}\, g(X) = \int g(x) f_X(x)\, d\mu(x)$ než počítat nejprve hustotu Y a pak integrovat $\mathsf{E}\, g(X) = \int y f_Y(y)\, d\mu(y)$.

5.2 Transformace náhodných vektorů

Uvažujme náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ s nosičem rozdělení $S_{\boldsymbol{X}} \subseteq \mathbb{R}^n$ a spojitým rozdělením (má hustotu vzhledem k Lebesgueově míře). Nechť je dána transformace $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, vlastně vektor n funkcí $g_1, \ldots, g_n$, každá z nichž zobrazuje $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.

Zajímá nás rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$. Budeme předpokládat, že transformace g je diferencovatelná skoro všude v $S_{\boldsymbol{X}}$, tj. existuje matice

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice (*jakobián* transformace g) budeme značit $\det \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$.

Tvrzení 5.4 Nechť $\boldsymbol{X}$ má hustotu $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ vzhledem k Lebesgueově míře. Nechť g je prosté zobrazení a $\det \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \neq 0$ pro skoro všechna $\boldsymbol{x} \in S_{\boldsymbol{X}}$. Pak $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$ má hustotu

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(g^{-1}(\boldsymbol{y})) \cdot \left| \det \frac{\partial g^{-1}(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}} \right| \mathbb{1}_{g(S_{\boldsymbol{X}})}(\boldsymbol{y})$$

vzhledem k Lebesgueově míře.

Poznámka. Platí

$$\frac{\partial g^{-1}(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}} = \left(\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \Big|_{\boldsymbol{x}=g^{-1}(\boldsymbol{y})} \right)^{-1}$$

a

$$\det \frac{\partial g^{-1}(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{1}{\det \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \big|_{\boldsymbol{x}=g^{-1}(\boldsymbol{y})}}.$$

Tvrzení 5.5 Nechť $\boldsymbol{X}$ má hustotu $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ vzhledem k Lebesgueově míře. Nechť existují množiny $G_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$, takové, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \supseteq S_{\boldsymbol{X}}$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, $g_k(\boldsymbol{x}) \overset{\mathrm{df}}{=} g(\boldsymbol{x}) \mathbb{1}_{G_k}(\boldsymbol{x})$ je prostá na každém G_k, a $\det \dfrac{\partial g_k(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \neq 0$ pro skoro všechna $\boldsymbol{x} \in G_k$. Pak $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$ má hustotu

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(g_k^{-1}(\boldsymbol{y})) \cdot \left| \det \frac{\partial g_k^{-1}(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}} \right| \mathbb{1}_{g_k(G_k)}(\boldsymbol{y})$$

vzhledem k Lebesgueově míře.

Poznámka. Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, , \ldots, X_n)^{\mathsf{T}}$ je náhodný vektor a t nějaká hladká měřitelná funkce $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Jaké je rozdělení náhodné veličiny $T = t(\boldsymbol{X})$?

Zvolme vhodně transformaci $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tak, aby $g_1(\boldsymbol{x}) = t(\boldsymbol{x})$. Platí-li předpoklady tvrzení 5.5, můžeme podle něj spočítat sdruženou hustotu náhodného vektoru $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$. Marginální hustotu náhodné veličiny $T \equiv Y_1$ zjistíme vyintegrováním ostatních složek podle (3.1).

Věta 5.6 (o konvoluci) Nechť X a Y jsou *nezávislé* náhodné veličiny, nechť X má hustotu f_X vzhledem k míře μ_1 a Y má hustotu f_Y vzhledem k míře μ_2. Pak $Z = X + Y$ má distribuční funkci

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) F_X(z-y) \, d\mu_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x) \, d\mu_1(x).$$

Jsou-li X a Y spojité, pak Z má hustotu

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z-y) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \, dx$$

vzhledem k Lebesgueově míře. Jsou-li X a Y diskrétní, pak

$$\mathsf{P}[Z = z] = \sum_{y \in S_Y} \mathsf{P}[Y = y] \, \mathsf{P}[X = z - y] = \sum_{x \in S_X} \mathsf{P}[X = x] \, \mathsf{P}[Y = z - x].$$

[Dupač & Hušková 1999, V. 3.13 a 3.14]

Tvrzení 5.7 Nechť X a Y jsou *nezávislé* náhodné veličiny, nechť X má hustotu f_X vzhledem k míře μ_1 a Y má hustotu f_Y vzhledem k míře μ_2. Pak $Z = X/Y$ má distribuční funkci

$$F_Z(z) = \int_{0}^{\infty} f_Y(y) F_X(zy) \, d\mu_2(y) + \int_{-\infty}^{0} f_Y(y)[1 - F_X(zy)] \, d\mu_2(y).$$

Jsou-li X a Y spojité, pak Z má hustotu

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_Y(y) f_X(zy)\, dy.$$

[Dupač & Hušková 1999, V. 3.15(2)]

6 Normální rozdělení

Poznámka (Normální rozdělení)**.**

- Náhodná veličina Z s hustotou $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ má *normované normální rozdělení*; značíme $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$. Její distribuční funkci značíme

$$\Phi(z) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\, dt.$$

- Jestliže $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $X = \sigma Z + \mu$, kde $\sigma > 0$ a $\mu \in \mathbb{R}$, pak X má *normální rozdělení* s parametry μ a σ^2, značíme $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Její hustota je

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

  Její distribuční funkce je $F_X(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.
- Jestliže $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ pak $\mathsf{E}\, X = \mu$, $\operatorname{var} X = \sigma^2$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_4 = 3$.

6.1 Mnohorozměrné normální rozdělení

Definice 6.1 Nechť $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_r)^\mathsf{T}$, kde $Z_i \sim \mathsf{N}(0,1)$ jsou nezávislé. Nechť $\mathbb{A}_{n\times r}$ je matice a $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ je pevný vektor. Náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ definovaný jako $\boldsymbol{X} = \mathbb{A}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu}$ pak má *n-rozměrné normální rozdělení* s parametry $\boldsymbol{\mu}$ a $\Sigma \stackrel{\text{df}}{=} \mathbb{A}\mathbb{A}^\mathsf{T}$. Značíme $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

Poznámka.

- $\mathsf{E}\, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu}$, $\operatorname{var} \boldsymbol{X} = \Sigma$.
- $\boldsymbol{X}$ má n-rozměrné normální rozdělení $\Leftrightarrow$ pro libovolné $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ platí $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}(\cdot, \cdot)$.
- Libovolná symetrická positivně semidefinitní matice Σ se dá napsat jako $\mathbb{A}\mathbb{A}^\mathsf{T}$ pro nějaké $\mathbb{A}_{n\times r}$, $r \leq n$. Platí: $r < n$ právě když Σ je singulární.
- Pokud $\mathbb{B}$ je typu $k \times n$, potom $\mathbb{B}\boldsymbol{X} \sim N_k(\mathbb{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^\mathsf{T})$.

Věta 6.1 Nechť $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ a Σ je regulární. Pak existuje hustota $\boldsymbol{X}$ vzhledem k Lebesgueově míře na $\mathbb{R}^n$ a její tvar je

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\mathsf{T}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. [Anděl 2002, V. 4.10]

Poznámka. Je-li Σ singulární, pak hustota $\boldsymbol{X}$ vzhledem k Lebesgueově míře na $\mathbb{R}^n$ neexistuje, neboť nosič rozdělení $\boldsymbol{X}$ je množina míry 0.

Příklad (Dvourozměrné normální rozdělení)**.** Nechť $n = 2$, Σ je regulární, $\sigma_1 = \operatorname{var} X_1$, $\sigma_2 = \operatorname{var} X_2$ a $\varrho = \operatorname{cor}(X_1, X_2)$. Hustotu náhodného vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ pak lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

Věta 6.2 (Vlastnosti mnohorozměrného normálního rozdělení)
Nechť $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, kde $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1^\top, \boldsymbol{X}_2^\top)^\top$, $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1^\top, \boldsymbol{\mu}_2^\top)^\top$, $\Sigma = \left(\begin{smallmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{smallmatrix}\right)$ a dimenze jednotlivých složek jsou $k \times 1$ pro $\boldsymbol{X}_1$ a $\boldsymbol{\mu}_1$ a $k \times k$ pro Σ_{11}. Pak platí:

(i) $\boldsymbol{X}_1 \sim \mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11})$.

(ii) Jestliže $\Sigma_{12} = 0$, pak $\boldsymbol{X}_1$ a $\boldsymbol{X}_2$ jsou nezávislé.

(iii) Je-li Σ_{22} regulární, pak podmíněné rozdělení $\boldsymbol{X}_1$, je-li dáno $\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2$, je k-rozměrné normální se střední hodnotou

$$\boldsymbol{\mu}_{1.2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$$

a rozptylem

$$\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}.$$

[Anděl 2002, V. 4.5, 4.11, 4.12]

Poznámka. Z předchozí věty plyne:
- Mají-li X_1 a X_2 sdružené normální rozdělení, pak mají marginální normální rozdělení.
- Mají-li X_1 a X_2 sdružené normální rozdělení a jsou-li nekorelované, pak jsou nezávislé.

Poznámka. Mají-li X_1 a X_2 marginální normální rozdělení, pak $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ nemusí mít sdružené normální rozdělení (najděte si protipříklad).

6.2 Rozdělení χ^2, t a F

Poznámka. Náhodná veličina X má χ^2 rozdělení o r stupních volnosti, značíme $X \sim \chi^2_r$, právě když její hustota vzhledem k Lebesgueově míře je

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(\frac{r}{2})} x^{r/2-1} \mathrm{e}^{-x/2}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Rozdělení χ^2_r je speciální případ gama rozdělení: $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{r}{2})$.

Věta 6.3 (o χ^2-rozdělení)

(i) Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $\mathsf{N}(0, 1)$. Pak platí $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2_n$. [Dupač & Hušková 1999, V. 3.16(ii)]

(ii) Nechť $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, kde Σ je regulární. Pak

$$Y = (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_n.$$

(iii) Nechť $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma)$ a nechť $\mathbb{A}$ je taková matice typu $n \times n$, že $\mathbb{A}\Sigma$ je nenulová a idempotentní. Pak
$$Y = \boldsymbol{X}^\top \mathbb{A} \boldsymbol{X} \sim \chi^2_{\operatorname{tr} \mathbb{A}\Sigma}.$$
[Anděl 2002, V. 4.15 a 4.16]

Poznámka (něco o maticích)**.**

- Čtvercovou matici $\mathbb{D}$ nazveme *idempotentní* právě když $\mathbb{D}\mathbb{D} = \mathbb{D}$.
- $\operatorname{tr} \mathbb{D}$ značí *stopu matice* $\mathbb{D}$, tj. součet jejích diagonálních prvků.
- Je-li matice $\mathbb{D}$ idempotentní, pak $\operatorname{tr} \mathbb{D} = r(\mathbb{D})$ (hodnost je rovna stopě).

Věta 6.4 (o t-rozdělení) Nechť $X \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $Z \sim \chi^2_k$ jsou nezávislé. Pak náhodná veličina $T \overset{\mathsf{df}}{=} \frac{X}{\sqrt{Z/k}}$ má rozdělení s hustotou
$$f_{T,k}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$
vzhledem k Lebesgueově míře. Rozdělení náhodné veličiny T se nazývá [Studentovo] t *rozdělení* s k stupni volnosti, značíme $T \sim t_k$. [Dupač & Hušková 1999, V. 3.16(iii)]

Poznámka (Vlastnosti t rozdělení)**.**

- Hustota t rozdělení je symetrická kolem 0.
- Pro $k = 1$ jest $f_{T,1}$ hustotou Cauchyova rozdělení $\mathsf{C}(0,1)$. Rozdělení t_1 nemá střední hodnotu.
- Obecně má T konečné momenty do řádu $k-1$, $\mathsf{E}\, T = 0$ pro $k > 1$, $\operatorname{var} T = \frac{k}{k-2}$ pro $k > 2$.
- Pro velké k se hustota t rozdělení blíží hustotě normovaného normálního rozdělení: $\lim_{k\to\infty} |f_{T,k}(t) - \varphi(t)| = 0$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Tudíž α-kvantil rozdělení t_k konverguje k α-kvantilu rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$ pro $k \to \infty$.

Věta 6.5 (o F-rozdělení) Nechť $X \sim \chi^2_m$ a $Y \sim \chi^2_n$ jsou nezávislé. Pak náhodná veličina
$$Z = \frac{X/m}{Y/n}$$
má hustotu
$$f_{F;m,n}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n} z\right)^{-\frac{m+n}{2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(z)$$
vzhledem k Lebesgueově míře. Rozdělení náhodné veličiny Z se nazývá [Fisherovo-Snedecorovo] F *rozdělení* s m a n stupni volnosti. [Dupač & Hušková 1999, V. 3.16(iv)]

7 Limitní věty

Na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ máme danou posloupnost náhodných vektorů $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \ldots$, kde $\boldsymbol{X}_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_0^k)$ a $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ik})^\mathsf{T}$.

7.1 Konvergence náhodných veličin a vektorů

Definice 7.1 (konvergence v pravděpodobnosti) Říkáme, že posloupnost náhodných vektorů $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje v pravděpodobnosti* k náhodnému vektoru $\boldsymbol{X}$ pro $n \to \infty$ právě když

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left[\|\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{X}\| > \varepsilon\right] = 0.$$

Konvergenci v pravděpodobnosti značíme $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \boldsymbol{X}$.

Poznámka. $\|\boldsymbol{a}\|$ značí eukleidovskou normu vektoru $\boldsymbol{a}$, tj. $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{a}}$.

Definice 7.2 (konvergence skoro jistě) Říkáme, že posloupnost náhodných vektorů $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje skoro jistě* k náhodnému vektoru $\boldsymbol{X}$ pro $n \to \infty$ právě když

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{X}\| = 0) = 1.$$

Konvergenci skoro jistě značíme $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{sj}} \boldsymbol{X}$.

Definice 7.3 (konvergence v distribuci) Říkáme, že posloupnost $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje v distribuci* k náhodnému vektoru $\boldsymbol{X}$ pro $n \to \infty$ právě když

$$\lim_{n\to\infty} F_{\boldsymbol{X}_n}(\boldsymbol{x}) = F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$$

v každém bodě $\boldsymbol{x}$, v němž je $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ spojitá. Konvergenci v distribuci značíme $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{d}} \boldsymbol{X}$ nebo $F_{\boldsymbol{X}_n} \to F_{\boldsymbol{X}}$ nebo $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}_n) \to \mathcal{L}(\boldsymbol{X})$.

Poznámka. Symbolem $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}_n)$ se rozumí rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{X}_n$ (z angl. *Law*). Výraz $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}_n) \to \mathcal{L}(\boldsymbol{X})$ čteme *„rozdělení $\boldsymbol{X}_n$ konverguje k rozdělení $\boldsymbol{X}$"*. Můžeme také říkat, že $\boldsymbol{X}_n$ má asymptotické (limitní) rozdělení $F_{\boldsymbol{X}}$ a psát $\boldsymbol{X}_n \overset{\mathsf{as.}}{\sim} \mathcal{L}(\boldsymbol{X})$.

Tvrzení 7.1

(i) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{sj}} \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \boldsymbol{X}$

(ii) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{d}} \boldsymbol{X}$

Poznámka. Opačné implikace neplatí. Nicméně pokud náhodné vektory konvergují v distribuci ke konstantě, tj. $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{d}} \boldsymbol{c}$, pak platí $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \boldsymbol{c}$.

Tvrzení 7.2 (vlastnosti konvergence v distribuci)

(i) *(Cramér-Woldova věta)* $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{d}} \boldsymbol{X} \;\Leftrightarrow\; \forall \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k : \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{d}} \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}$.

(ii) *(Helly-Brayova věta)* $X_n \xrightarrow{\mathsf{d}} X \;\Leftrightarrow\; \mathsf{E}\, g(X_n) \to \mathsf{E}\, g(X)$ pro každou spojitou omezenou funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tvrzení 7.3 (Věta o spojité transformaci) Nechť $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ jsou náhodné vektory a funkce $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ je spojitá na množině $S_{\boldsymbol{X}}$.

(i) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; g(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow{\mathsf{P}} g(\boldsymbol{X})$.

(ii) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{sj}} \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; g(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow{\mathsf{sj}} g(\boldsymbol{X})$.

(iii) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{d}} \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; g(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow{\mathsf{d}} g(\boldsymbol{X})$.

Tvrzení 7.4

(i) Nechť pro posloupnost $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^\infty$ platí $X_{nj} \xrightarrow{\mathsf{P}} X_j$ pro $n \to \infty$ a $j = 1, \ldots, k$. Pak $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)^\mathsf{T}$.

(ii) Nechť pro posloupnost $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^\infty$ platí $X_{nj} \xrightarrow{\mathsf{sj}} X_j$ pro $n \to \infty$ a $j = 1, \ldots, k$. Pak $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{sj}} \boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)^\mathsf{T}$.

Poznámka. Pro konvergenci v distribuci tato vlastnost neplatí.

Tvrzení 7.5 Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost náhodných veličin takových, že $\mathsf{E}\, X_n \to \mu$ a $\mathsf{var}\, X_n \to 0$. Pak $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \mu$.

Tvrzení 7.6 (Cramérova-Sluckého věta) Nechť $X_n \xrightarrow{\mathsf{d}} X$, $A_n \xrightarrow{\mathsf{P}} a$ a $B_n \xrightarrow{\mathsf{P}} b$, kde X_n, X, A_n, B_n jsou náhodné veličiny a a, b jsou konstanty. Pak platí

$$A_n X_n + B_n \xrightarrow{\mathsf{d}} aX + b.$$

Poznámka. Cramérově-Sluckého větě se často říká Sluckého věta. Tato věta platí i pro vektory, tj. pokud $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{d}} \boldsymbol{X}$, $\mathbb{A}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathbb{A}$ a $\boldsymbol{B}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{X}_n$ a $\boldsymbol{X}$ jsou k-rozměrné náhodné vektory, $\mathbb{A}_n$ je náhodná matice o dimenzích $m \times k$, $\mathbb{A}$ je matice konstant o dimenzích $m \times k$, $\boldsymbol{B}_n$ jsou m-rozměrné náhodné vektory a $\boldsymbol{b}$ je m-rozměrný vektor konstant, pak

$$\mathbb{A}_n \boldsymbol{X}_n + \boldsymbol{B}_n \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathbb{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}.$$

Tvrzení 7.7 Nechť $a_n(\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{\mathsf{d}} \boldsymbol{X}$, kde $a_n > 0$ je posloupnost reálných čísel splňující $a_n \to \infty$ a $\boldsymbol{\mu}$ je vektor konstant. Pak $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \boldsymbol{\mu}$.

7.2 Zákony velkých čísel

Uvažujme náhodnou posloupnost $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme $\overline{\boldsymbol{X}}_n \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i$ (průměr z prvních n vektorů).

Věta 7.8 (Čebyševův slabý zákon velkých čísel) Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se střední hodnotou $\mathsf{E}\, X_i = \mu$ a rozptylem $\mathsf{var}\, X_i \leq C$ pro nějaké $C \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \mu.$$

Tvrzení 7.9 (Chinčinův slabý zákon velkých čísel) Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečnou střední hodnotou $\mathsf{E}\, X_i = \mu$. Pak platí

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \mu.$$

Tvrzení 7.10 (Kolmogorovovův silný zákon velkých čísel) Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečnou střední hodnotou $\mathsf{E}\, X_i = \mu$. Pak platí

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\mathsf{sj}} \mu.$$

Poznámka.

- Zákony velkých čísel platí i pro náhodné vektory, pokud všechny jejich složky splňují stanovené předpoklady (viz tvrzení 7.4).
- Čebyševův slabý zákon velkých čísel nevyžaduje, aby byly všechny veličiny stejně rozdělené, ale vyžaduje, aby měly omezený (tj. nutně konečný) rozptyl. Chinčinův slabý zákon velkých čísel a Kolmogorovovův silný zákon velkých čísel vyžadují, aby byly všechny veličiny stejně rozdělené, ale nevyžadují, aby měly konečný rozptyl.
- Zákony velkých čísel lze zobecnit i na závislé veličiny, pokud nejsou závislé „příliš“. Např. u Čebyševova zákona velkých čísel stačí nahradit nezávislost podmínkou

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{cov}\,(X_i, X_j) \to 0.$$

Příklady.

1. Jestliže $X_i \sim \mathsf{C}(0,1)$, pak $\overline{X}_n \sim \mathsf{C}(0,1)$ pro libovolné n. Průměr nekonverguje ke konstantě.
2. Empirická četnost vs. pravděpodobnost jevu.

7.3 Centrální limitní věta

Uvažujme posloupnost nezávislých stejně rozdělených k-rozměrných náhodných vektorů $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Tvrzení 7.11 (centrální limitní věta pro nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory) Nechť $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné vektory se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu} \equiv \mathsf{E}\, \boldsymbol{X}_i$ a konečnou rozptylovou maticí $\Sigma \equiv \mathsf{var}\, \boldsymbol{X}_i$. Pak platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\mu}) = \sqrt{n}\, (\overline{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}_k(\mathbf{0}, \Sigma).$$

Poznámka. Neformální zápis tvrzení centrální limitní věty: $\overline{\boldsymbol{X}}_n \overset{\mathsf{as.}}{\sim} \mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}, n^{-1}\Sigma)$.

Příklady.
1. Aproximace binomického rozdělení normálním
2. Aproximace χ^2 rozdělení normálním

Věta 7.12 (Δ-metoda) Nechť $\{\boldsymbol{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje

$$\sqrt{n}\, (\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}_k(\mathbf{0}, \Sigma)$$

pro nějaký vektor konstant $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ a matici Σ. Nechť $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ je funkce, která je spojitě diferencovatelná v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{\mu}$. Označme $\mathbb{D}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$. Pak platí

$$\sqrt{n}\, (g(\boldsymbol{T}_n) - g(\boldsymbol{\mu})) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}_p(\mathbf{0}, \mathbb{D}(\boldsymbol{\mu})\Sigma\mathbb{D}(\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}}).$$

Příklad. Asymptotické rozdělení $\log \overline{X}_n$.

8 Přehled pravděpodobnostních rozdělení

8.1 Diskrétní rozdělení

8.1.1 Alternativní rozdělení

Též se nazývá Bernoulliovo nebo nula-jedničkové rozdělení.

Značení:	$X \sim \mathsf{Alt}(p)$
Parametry:	$p \in (0,1)$
Nosič:	$X \in \{0,1\}$
Hustota:	$\mathsf{P}[X = j] = p^j(1-p)^{1-j}, \quad j \in \{0,1\}$
Střední hodnota:	$\mathsf{E}\, X = p$
Rozptyl:	$\operatorname{var} X = p(1-p)$
Poznámky:	Rozdělení indikátoru náhodného jevu, úspěch vs. neúspěch.

8.1.2 Binomické rozdělení

Značení:	$X \sim \mathsf{Bi}(n,p)$
Parametry:	$p \in (0,1), n \in \mathbb{N}$
Nosič:	$X \in \{0,1,\dots,n\}$
Hustota:	$\mathsf{P}[X = j] = \binom{n}{j} p^j(1-p)^{n-j}, \quad j \in \{0,1,\dots,n\}$
Střední hodnota:	$\mathsf{E}\, X = np$
Rozptyl:	$\operatorname{var} X = np(1-p)$
Poznámky:	• Rozdělení součtu nezávislých alternativních veličin (počtu úspěchů mezi n pokusy). Přesněji, jsou-li $X_i \sim \mathsf{Alt}(p)$ nezávislé, $i = 1,\dots,n$, pak $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathsf{Bi}(n,p)$. • $\mathsf{Bi}(1,p)$ jest $\mathsf{Alt}(p)$. • Jestliže $n \to \infty$ a $np_n \to \lambda < \infty$, pak rozdělení $\mathsf{Bi}(n,p_n)$ konverguje k $\mathsf{Po}(\lambda)$.

8.1.3 Geometrické rozdělení

Značení: $X \sim \mathsf{Geo}(p)$

Parametry: $p \in (0, 1)$

Nosič: $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Hustota: $\mathsf{P}[X = j] = p(1-p)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\, X = \dfrac{1-p}{p}$

Rozptyl: $\operatorname{var} X = \dfrac{1-p}{p^2}$

Poznámky: Počet neúspěchů před prvním úspěchem v posloupnosti nezávislých pokusů.

8.1.4 Poissonovo rozdělení

Značení: $X \sim \mathsf{Po}(\lambda)$

Parametry: $\lambda > 0$

Nosič: $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Hustota: $\mathsf{P}[X = j] = \dfrac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\, X = \lambda$

Rozptyl: $\operatorname{var} X = \lambda$

Poznámky: Rozdělení počtu úspěchů při velkém počtu nezávislých experimetů s malou pravděpodobností úspěchu $[n \to \infty,\ np_n \to \lambda < \infty \Rightarrow \mathsf{Bi}(n, p_n)$ konverguje k $\mathsf{Po}(\lambda)]$.

8.1.5 Negativně binomické rozdělení

Značení: $X \sim \mathsf{NB}(n, p)$

Parametry: $p \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$

Nosič: $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Hustota: $\mathsf{P}[X = j] = \dbinom{n+j-1}{n-1} p^n (1-p)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\, X = n\dfrac{1-p}{p}$

Rozptyl: $\operatorname{var} X = n\dfrac{1-p}{p^2}$

Poznámky: Rozdělení počtu neúspěchů předcházejících n-tému úspěchu v posloupnosti nezávislých pokusů. $\mathsf{NB}(1, p)$ jest $\mathsf{Geo}(p)$.

8.2 Spojitá rozdělení

8.2.1 Rovnoměrné rozdělení

Značení: $X \sim \mathsf{R}(a, b)$

Parametry: $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

Nosič: $X \in (a, b)$

Hustota: $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{(a,b)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$

Distribuční funkce: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b, \\ 1 & x > b \end{cases}$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\,X = \dfrac{a+b}{2}$

Rozptyl: $\operatorname{var} X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Poznámky: Rozdělení s konstantní hustotou.

8.2.2 Normální rozdělení

Značení: $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$

Parametry: $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$

Nosič: $X \in \mathbb{R}$

Hustota: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \; x \in \mathbb{R}$

Distribuční funkce: $F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$, kde $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2} du$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\,X = \mu$

Rozptyl: $\operatorname{var} X = \sigma^2$

Vyšší momenty: $\mu_k = \begin{cases} 0 & k \text{ liché} \\ \{(k-1)(k-3)\cdots 3 \cdot 1\}\sigma^k & k \text{ sudé} \end{cases}$

Špičatost: $\gamma_4 = 3$

8.2.3 Normované normální rozdělení

Distribuční funkce: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2} du$

Vlastnosti: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Hodnoty:

x	0	0.5	1	1.5	2	3
$\Phi(x)$	0.5	0.6915	0.8413	0.9332	0.9772	0.9987

Kvantily:

α	0.5	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
$\Phi^{-1}(\alpha)$	0	0.8416	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576

8.2.4 Cauchyovo rozdělení

Značení: $X \sim \mathsf{C}(a, b)$

Parametry: $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$

Nosič: $X \in \mathbb{R}$

Hustota: $f(x) = \dfrac{1}{b\pi}\left[1 + \left(\dfrac{x-a}{b}\right)^2\right]^{-1}$

Distribuční funkce: $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x-a}{b}$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\,X$ neexistuje

Rozptyl: $\operatorname{var} X$ neexistuje

Poznámky: Hustota je symetrická kolem a, momenty neexistují, $\mathsf{E}\,|X| = +\infty$.

8.2.5 Exponenciální rozdělení

Značení: $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$

Parametry: $\lambda > 0$

Nosič: $X \in (0, \infty)$

Hustota: $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$

Distribuční funkce: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\,X = \dfrac{1}{\lambda}$

Rozptyl: $\operatorname{var} X = \dfrac{1}{\lambda^2}$

8.2.6 Gama rozdělení

Značení: $X \sim \Gamma(a, p)$

Parametry: $a > 0$, $p > 0$

Nosič: $X \in (0, \infty)$

Hustota: $f(x) = \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \mathrm{e}^{-ax} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\, X = \dfrac{p}{a}$

Rozptyl: $\operatorname{var} X = \dfrac{p}{a^2}$

Poznámky:
- $\Gamma(a, 1)$ jest $\mathsf{Exp}(a)$
- $\Gamma(a, k)$, $k \in \mathbb{N}$, jest součtem k nezávislých veličin s rozdělením $\mathsf{Exp}(a)$; toto rozdělení se též nazývá Erlangovo.
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{r}{2}\right)$ jest χ^2_r-rozdělení.

8.2.7 Beta rozdělení

Značení: $X \sim \mathsf{B}(\alpha, \beta)$

Parametry: $\alpha, \beta > 0$

Nosič: $X \in (0, 1)$

Hustota: $f(x) = \dfrac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\, X = \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}$

Rozptyl: $\operatorname{var} X = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

Poznámky: $\mathsf{B}(1, 1)$ jest $\mathsf{R}(0, 1)$.

8.2.8 χ^2 rozdělení

Značení: $X \sim \chi^2_r$

Parametry: $r \in \mathbb{N}$, stupně volnosti

Nosič: $X \in (0, \infty)$

Hustota: $f(x) = \dfrac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} x^{(r-2)/2} \mathrm{e}^{-x/2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\, X = r$

Rozptyl: $\operatorname{var} X = 2r$

Poznámky:
- Speciální případ Γ-rozdělení s parametry $\frac{1}{2}$, $\frac{r}{2}$.
- Rozdělení součtu kvadrátů r nezávislých normovaných normálních veličin.

Kvantily:

r	α 0.9	0.95	0.99	0.999
1	2.706	3.841	6.635	10.828
2	4.605	5.991	9.210	13.816
3	6.251	7.815	11.345	16.266
4	7.779	9.488	13.277	18.467
5	9.236	11.070	15.086	20.515
6	10.645	12.592	16.812	22.458
7	12.017	14.067	18.475	24.322
8	13.362	15.507	20.090	26.124
9	14.684	16.919	21.666	27.877
10	15.987	18.307	23.209	29.588
15	22.307	24.996	30.578	37.697
20	28.412	31.410	37.566	45.315
30	40.256	43.773	50.892	59.703
40	51.805	55.758	63.691	73.402
50	63.167	67.505	76.154	86.661

8.2.9 Studentovo t-rozdělení

Značení: $X \sim \mathrm{t}_k$

Parametry: $k \in \mathbb{N}$, počet stupňů volnosti

Nosič: $X \in \mathbb{R}$

Hustota: $f(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}}\left(1+\dfrac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\,X = 0$ pro $k \geq 2$, neexistuje pro $k = 1$.

Rozptyl: $\mathsf{var}\,X = \dfrac{k}{k-2}$ pro $k \geq 3$, $\mathsf{var}\,X = \infty$ pro $k = 1, 2$.

Poznámky:

- t_1 jest $\mathsf{C}(0,1)$
- Jsou-li $X \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $Z \sim \chi^2_k$ nezávislé, pak $\dfrac{X}{\sqrt{Z/k}} \sim \mathrm{t}_k$

8.2.10 (Fisherovo) F-rozdělení

Značení: $X \sim \mathrm{F}_{m,n}$

Parametry: $m, n \in \mathbb{N}$, stupně volnosti

Nosič: $X \in (0, \infty)$

Hustota: $f(x) = \dfrac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1}\left(1+\dfrac{m}{n}x\right)^{-(m+n)/2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\,X = \dfrac{n}{n-2}$ pro $n \geq 3$, neexistuje pro $n = 1, 2$.

Rozptyl: $\operatorname{var} X = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ pro $n \geq 5$, $\operatorname{var} X = \infty$ pro $n \leq 4$.

Poznámky:

- Jsou-li $Z_1 \sim \chi^2_m$ a $Z_2 \sim \chi^2_n$ nezávislé, pak $\dfrac{Z_1/m}{Z_2/n} \sim \mathrm{F}_{m,n}$
- Je-li $Y \sim \mathsf{B}(m/2, n/2)$, pak $\dfrac{n}{m}\,\dfrac{Y}{1-Y} \sim \mathrm{F}_{m,n}$

8.3 Mnohorozměrná diskrétní rozdělení

8.3.1 Multinomické rozdělení

Značení: $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{Mult}_k(n; \boldsymbol{p})$

Parametry: $k \geq 2$ počet přihrádek, $n \in \mathbb{N}$ počet pokusů, $\boldsymbol{p} \in \{(0,1)^k : \sum_{j=1}^k p_j = 1\}$ pravděpodobnosti přihrádek.

Nosič: $\boldsymbol{X} \in \{\{0, 1, \ldots, n\}^k : \sum_{j=1}^k X_i = n\}$

Hustota: $\mathsf{P}\left[X_1 = r_1, \ldots, X_k = r_k\right] = \dfrac{n!}{r_1! \cdots r_k!} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \mathbb{1}_A(\boldsymbol{r})$, kde $A = \{\boldsymbol{r} \in \{0, \ldots, n\}^k : \sum_{j=1}^k r_j = n\}$

Střední hodnota: $\mathsf{E}\,\boldsymbol{X} = n\boldsymbol{p}$

Rozptyl: $\mathsf{var}\,\boldsymbol{X} = n[\operatorname{diag}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\mathsf{T}]$

Poznámky:

- Rozdělení počtu koulí padlých do každé z k přihrádek při n nezávislých pokusech.
- Marginální rozdělení X_j jest $\mathsf{Bi}(n, p_j)$, $j = 1, \ldots, k$

8.4 Mnohorozměrná spojitá rozdělení

8.4.1 Mnohorozměrné normální rozdělení

Značení: $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

Parametry: $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ střední hodnota, $\Sigma \geq 0$ positivně semidefinitní rozptylová matice

Nosič: $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^k$

Hustota: $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\mathsf{T}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ Pokud je Σ singulární, hustota vzhledem k Lebesgueově míře neexistuje.

Střední hodnota: $\mathsf{E}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu}$

Rozptyl: $\mathsf{var}\,\boldsymbol{X} = \Sigma$

Poznámky: Je-li $k = 2$, můžeme vyjádřit $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \varrho\sigma_1\sigma_2 \\ \varrho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, kde $\varrho = \mathsf{cor}\,(X_1, X_2)$. Pak

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\Bigg\{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\Bigg[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\Bigg]\Bigg\}$$

Rejstřík

Literatura

Anděl, J. (2002), *Základy matematické statistiky*, Matfyzpress, Praha.

Dupač, V. & Hušková, M. (1999), *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Karolinum, Praha.