NMSA331 Matematická statistika 1

Poznámky k přednášce

Naposledy upraveno dne 13. prosince 2017.

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Matematicko-fysikální fakulta University Karlovy

Tento učební text představuje drobnou modifikací učebního textu, který připravil ***doc. Michal Kulich, Ph.D.****. Text obsahuje přehled všech vět, definic, tvrzení a poznámek probíraných v přednášce „NMSA331 Matematická statistika 1“ v rámci bakalářského studia oboru „Obecná matematika“ na MFF UK. Nejedná se o plnohodnotnou učebnici ani skripta, protože zde nejsou uvedeny důkazy všech vět a tvrzení, chybí některé příklady a není zde obsažena látka probíraná na cvičení. Na druhou stranu některé poznatky a poznámky uvedené v tomto textu nebyly probrány na přednášce. Při přípravě na zkoušku je nutné tento text doplnit poznámkami z přednášek a cvičení.*

Odkazy na potřebné definice, věty a tvrzení z teorie pravděpodobnosti (začínající písmenem P) se týkají příručky „Základy teorie pravděpodobnosti pro předmět Matematická statistika 1“, která je k dispozici na webových stránkách předmětu NMSA331. Např. tvrzení P.2.2 nebo definici P.6.1 lze najít ve 2., resp. 6. kapitole zmíněné příručky.

Velké poděkování patří také prof. RNDr. Jiřímu Andělovi, DrSc. a doc. RNDr. Karlu Zvárovi, CSc. za pečlivé pročtení poznámek a pomoc s odstraněním řady drobných chyb a nepřesností v prvních verzích tohoto textu.

Obsah

Značení

$\boldsymbol{a}^\mathsf{T}$	transpozice vektoru $\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{a}^{\otimes 2}$	$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\mathsf{T}$
$\|\boldsymbol{a}\|$	eukleidovská norma vektoru $\boldsymbol{a}$
$\xrightarrow{\mathsf{P}}$	konvergence v pravděpodobnosti
$\xrightarrow{\mathsf{sj}}$	konvergence skoro jistě
$\xrightarrow{\mathsf{d}}$	konvergence v distribuci
$X \sim \mathcal{L}$	X má přesné rozdělení $\mathcal{L}$
$X \overset{\mathsf{as.}}{\sim} \mathcal{L}$	X má přibližně (asymptoticky) rozdělení $\mathcal{L}$
α	hladina testu
$\beta(\theta)$	síla testu, silofunkce
γ_3	šikmost náhodné veličiny
$\widehat{\gamma}_3$	empirická šikmost
γ_4	špičatost náhodné veličiny
$\widehat{\gamma}_4$	empirická špičatost
Θ	parametrický prostor
Θ_0	nulová hypotéza
Θ_1	alternativa
λ	Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$
μ_S	čítací míra na nejvýše spočetné množině S
μ_k	k-tý centrální moment náhodné veličiny
$\widehat{\mu}_k$	empirický odhad k-tého centrálního momentu
μ'_k	k-tý moment náhodné veličiny
$\widehat{\mu}'_k$	empirický odhad k-tého momentu
$\varrho(X, Y)$	korelační koeficient náhodných veličin X a Y
$\widehat{\varrho}_{jm}$	výběrový korelační koeficient j-té a m-té složky náh. vektoru
σ_X	směrodatná odchylka náhodné veličiny X
σ_X^2	rozptyl náhodné veličiny X
$\widehat{\sigma}_n^2$	empirický odhad rozptylu
$\widehat{\Sigma}_n$	výběrová rozptylová matice
φ	hustota normovaného normálního rozdělení
Φ	distribuční funkce normovaného normálního rozdělení

$\chi^2_f(\alpha)$	α-kvantil rozdělení χ^2_f
Ω	prostor elementárních jevů
$\mathbb{1}_B$	indikátor množiny B
$\mathbf{1}_n$	sloupcový vektor jedniček délky n
$\mathcal{A}$	σ-algebra náhodných jevů na Ω
$\mathcal{B}_0$	borelovská σ-algebra na $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}_0^n$	borelovská σ-algebra na $\mathbb{R}^n$
$C,\ C(\alpha)$	kritický obor testu
$c_L(\alpha),\ c_U(\alpha)$	kritické hodnoty
$\mathsf{cor}\,(X, Y)$	korelační koeficient náhodných veličin X a Y
$\mathsf{cor}\,(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$	korelační matice náhodných vektorů $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$
$\mathsf{cov}\,(X_1, X_2)$	kovariance náhodných veličin X_1 a X_2
$\mathsf{cov}\,(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$	kovarianční matice náhodných vektorů $\boldsymbol{X}_1$ a $\boldsymbol{X}_2$
$\mathsf{diag}\,(\boldsymbol{a})$	diagonální matice obsahující složky vektoru $\boldsymbol{a}$ na diagonále
$\mathsf{E}\,X$	střední hodnota náhodné veličiny (vektoru) X
$\mathsf{E}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z})$	podmíněná střední hodnota náhodného vektoru $\boldsymbol{U}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}$
$\mathsf{E}\,(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})$	podmíněná střední hodnota náhodného vektoru $\boldsymbol{U}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z}$
$\mathcal{F}$	pravděpodobnostní model pro pozorovaná data
$\mathcal{F}_0$	rozdělení splňující nulovou hypotézu
$\mathcal{F}_1$	rozdělení splňující alternativu
f_X	hustota náhodné veličiny (vektoru) X
$f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{z})$	podmíněná hustota náhodného vektoru $\boldsymbol{Y}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}$
F_X	distribuční funkce náhodné veličiny (vektoru) X
F_X^{-1}	kvantilová funkce náhodné veličiny X
$\widehat{F}_n$	empirická distribuční funkce
$F_{m,n}(\alpha)$	α-kvantil rozdělení $F_{m,n}$
H_0	nulová hypotéza
H_1	alternativa
$\mathbb{I}_n$	jednotková matice $n \times n$
$\mathcal{L}^p$	množina náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ s konečným p-tým absolutním momentem
$\mathcal{L}^2_+$	množina náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ s konečným a nenulovým rozptylem
$\mathcal{L}(X)$	rozdělení náhodné veličiny (vektoru) X
m_X	medián náhodné veličiny X
$\widehat{m}_n$	výběrový medián
MSE	střední čtvercová odchylka odhadu
P	pravděpodobnost
P_X	rozdělení náhodné veličiny X, její indukovaná míra na výběrovém prostoru
P_θ	rozdělení dat při hodnotě parametru θ

$\mathsf{r}(\mathbb{A})$	hodnost matice $\mathbb{A}$
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
R_i	pořadí i-tého pozorování
SE	směrodatná chyba odhadu
S_n^2	výběrový rozptyl
S_{jm}	výběrová kovariance j-té a m-té složky náh. vektoru
S_X	nosič rozdělení náhodné veličiny X
$t_f(\alpha)$	α-kvantil rozdělení t_f
$\mathsf{tr}(\mathbb{A})$	stopa matice $\mathbb{A}$
$u_X(\alpha)$	α-kvantil náhodné veličiny X
u_α	α-kvantil rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$
$\widehat{u}_n(\alpha)$	výběrový α-kvantil
$\mathsf{var}\, X$	rozptyl náhodné veličiny X
$\mathsf{var}\, \boldsymbol{X}$	rozptylová matice náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$
$\mathsf{var}(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z})$	podmíněný rozptyl náhodného vektoru $\boldsymbol{U}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}$
$\mathsf{var}(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{Z})$	podmíněný rozptyl náhodného vektoru $\boldsymbol{U}$, je-li dáno $\boldsymbol{Z}$
$\mathcal{X}$	výběrový prostor
$X_{(k)}$	k-tá pořádková statistika
$\overline{X}_n$	výběrový průměr náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$

1 Vybrané asymptotické výsledky

Mějme posloupnost k-rozměrných náhodných vektorů $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \ldots$, kde vektor $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ik})^\mathsf{T}$ je definován na $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathsf{P}_i)$.

1.1 Konvergence náhodných vektorů

Nechť $\|\boldsymbol{a}\|$ značí eukleidovskou normu vektoru $\boldsymbol{a}$, tj. $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{a}}$.

Definice 1.1 (konvergence skoro jistě) Říkáme, že posloupnost náhodných vektorů $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje skoro jistě* k náhodnému vektoru $\boldsymbol{X}$ pro $n \to \infty$ právě když

$$\mathsf{P}(\omega : \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{X}_n(\omega) - \boldsymbol{X}(\omega)\| = 0) = 1.$$

Konvergenci skoro jistě značíme $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{sj}} \boldsymbol{X}$.

Definice 1.2 (konvergence v pravděpodobnosti) Říkáme, že posloupnost náhodných vektorů $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje v pravděpodobnosti* k náhodnému vektoru $\boldsymbol{X}$ pro $n \to \infty$ právě když

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\omega : \|\boldsymbol{X}_n(\omega) - \boldsymbol{X}(\omega)\| > \varepsilon) = 0.$$

Konvergenci v pravděpodobnosti značíme $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \boldsymbol{X}$.

Poznámka.

- Pro $k = 1$ odpovídají definice 1.1 a 1.2 příslušným definicím z předmětu *NMSA 202 (Pravděpodobnost a matematická statistika)*.
- S využitím nerovnosti

  $$\max_{j\in\{1,\ldots,k\}} |a_j| \le \|\boldsymbol{a}\| \le \sqrt{k} \max_{j\in\{1,\ldots,k\}} |a_j|$$

  lze alternativně definovat konvergenci skoro jistě a v pravděpodobnosti pro náhodné vektory po složkách, tj.

  $$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{sj}} \boldsymbol{X} \quad \Leftrightarrow \quad X_{nj} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{sj}} X_j, \forall j = 1, \ldots, k, \tag{1.1}$$

  $$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \boldsymbol{X} \quad \Leftrightarrow \quad X_{nj} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} X_j, \forall j = 1, \ldots, k. \tag{1.2}$$

- Aby definice 1.1 dávala smysl, musí být všechny náhodné vektory definované na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. U definice 1.2 to není nutné, pokud limitní náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ je rovný konstantě skoro jistě.

V následujícím budeme značit $F_{\boldsymbol{X}_n}$ distribuční funkci náhodného vektoru $\boldsymbol{X}_n$, tj.

$$F_{\boldsymbol{X}_n}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X}_n \leq \boldsymbol{x}).$$

Podobně $F_{\boldsymbol{X}}$ bude distribuční funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Definice 1.3 (konvergence v distribuci) Říkáme, že posloupnost $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje v distribuci* k náhodnému vektoru $\boldsymbol{X}$ pro $n \to \infty$ právě když

$$\lim_{n\to\infty} F_{\boldsymbol{X}_n}(\boldsymbol{x}) = F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$$

v každém bodě $\boldsymbol{x}$, v němž je $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ spojitá. Konvergenci v distribuci značíme $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \boldsymbol{X}$.

Příklad. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s $\mathsf{var}\, X_1 \in (0, \infty)$. Potom z předmětu *NMSA 202 (Pravděpodobnost a matematická statistika)* víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big(\tfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mathsf{E}\, X_1)}{\sqrt{\mathsf{var}\, X_1}} \leq x\Big) = \Phi(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tedy $\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mathsf{E}\, X_1)}{\sqrt{\mathsf{var}\, X_1}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} Z$, kde $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$.

Poznámka.

- Pro konvergence v distribuci je podstatné pouze to, co se děje s rozdělením náhodného vektoru. Označíme-li tedy $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}_n)$ rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{X}_n$ (z angl. *Law*), pak konvergenci v distribuci můžeme zapisovat také jako $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}_n) \to \mathcal{L}(\boldsymbol{X})$ pro $n \to \infty$. Tento zápis pak čteme, že *„rozdělení $\boldsymbol{X}_n$ konverguje k rozdělení $\boldsymbol{X}$"*. Můžeme také říkat, že $\boldsymbol{X}_n$ má asymptotické (limitní) rozdělení $F_{\boldsymbol{X}}$ a psát $\boldsymbol{X}_n \overset{\text{as.}}{\sim} \mathcal{L}(\boldsymbol{X})$.
- Pro konvergenci v distribuci nepotřebujeme, aby náhodné vektory byly definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru.
- Na rozdíl od konvergence skoro jistě a v pravděpodobnosti, tak konvergenci v distribuci nelze ekvivalentně definovat po složkách.

Tvrzení 1.1

(i) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{sj}} \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \boldsymbol{X}$

(ii) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \boldsymbol{X}$

Poznámka. Opačné implikace neplatí. Nicméně pokud náhodné vektory konvergují v distribuci ke konstantě, tj. $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{d}} \boldsymbol{c}$, pak platí $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \boldsymbol{c}$.

Následující věta říká, že spojitá transformace zachovává všechny výše uvedené druhy konvergencí.

Tvrzení 1.2 (Věta o spojité transformaci) Nechť $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ jsou náhodné vektory a funkce $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ je spojitá na množině C takové, že $\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in C) = 1$. Potom:

(i) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{sj}} \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{sj}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$;

(ii) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$;

(iii) $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \boldsymbol{X} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$.

Ve statistice budeme často používat následující větu, která je zobecněním Věty 4.14 z Dupač and Hušková (1999).

Tvrzení 1.3 (Cramérova-Sluckého věta) Nechť $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \boldsymbol{X}$, $\mathbb{A}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mathbb{A}$ a $\boldsymbol{B}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{X}_n$ a $\boldsymbol{X}$ jsou k-rozměrné náhodné vektory, $\mathbb{A}_n$ je náhodná matice o dimenzích $m \times k$, $\mathbb{A}$ je matice konstant o dimenzích $m \times k$, $\boldsymbol{B}_n$ jsou m-rozměrné náhodné vektory a $\boldsymbol{b}$ je m-rozměrný vektor konstant, pak

$$\mathbb{A}_n \boldsymbol{X}_n + \boldsymbol{B}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathbb{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}.$$

Poznámka. Cramérově-Sluckého větě se často říká pouze Sluckého věta.

Tvrzení 1.4 Nechť $a_n(\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \boldsymbol{X}$, kde $a_n > 0$ je posloupnost reálných čísel splňující $a_n \to \infty$ pro $n \to \infty$ a $\boldsymbol{\mu}$ je vektor konstant. Pak $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \boldsymbol{\mu}$.

1.2 Zákon velkých čísel

Tvrzení 1.5 Nechť $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných vektorů s konečnou střední hodnotou $\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{\mu}$. Pak platí

$$\overline{\boldsymbol{X}}_n \xrightarrow{\mathsf{sj}} \boldsymbol{\mu}.$$

Důkaz. Důkaz plyne použitím Kolmogorovova silného zákona velkých čísel na jednotlivé složky náhodného vektoru. □

1.3 Centrální limitní věta

Tvrzení 1.6 (centrální limitní věta pro nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory) Nechť $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné vektory se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu} \equiv \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i$ a konečnou rozptylovou maticí $\Sigma \equiv \mathsf{var}\,\boldsymbol{X}_i$. Pak platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\mu}) = \sqrt{n}\,(\overline{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_k(\boldsymbol{0}, \Sigma).$$

Poznámka. Neformální zápis tvrzení centrální limitní věty: $\overline{\boldsymbol{X}}_n \overset{\text{as.}}{\sim} \mathsf{N}_k(\boldsymbol{\mu}, n^{-1}\Sigma)$.

Tvrzení 1.7 (Δ-metoda) Nechť $\{\boldsymbol{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje

$$\sqrt{n}(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mathsf{N}_k(\mathbf{0}, \Sigma) \tag{1.3}$$

pro nějaký vektor konstant $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ a matici Σ. Nechť $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ je funkce, která je spojitě diferencovatelná v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{\mu}$. Označme $\mathbb{D}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$. Pak platí

$$\sqrt{n}\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{T}_n) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu})\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathsf{N}_p(\mathbf{0}, \mathbb{D}(\boldsymbol{\mu})\Sigma\mathbb{D}(\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}}).$$

Poznámka.

- Tvrzení 1.7 budeme nejčastěji používat v jednorozměrném případě. Tj. nechť

  $$\sqrt{n}\left(T_n - \mu\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mathsf{N}(0, \sigma^2)$$

  a funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na nějakém okolí bodu μ. Pak platí

  $$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\mu)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mathsf{N}(0, [g'(\mu)]^2\,\sigma^2).$$

- Jako $\boldsymbol{T}_n$ budeme nejčastěji brát $\overline{\boldsymbol{X}}_n$, kde $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ik})^{\mathsf{T}}$ jsou vhodně zvolené nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory. K ověření předpokladu (1.3) pak můžeme využít centrální limitní větu (tvrzení 1.6).

Zde končí předn. 1 (2.10.)

2 Náhodný výběr

2.1 Definice náhodného výběru

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definice 2.1 Posloupnost $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ nezávislých stejně rozdělených náhodných vektorů definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, z nichž každý má distribuční funkci F_0, nazýváme *náhodný výběr z rozdělení* F_0.[*] Konstantu n nazýváme *rozsah výběru*.[†]

Prvky náhodného výběru mohou být buď reálné náhodné veličiny nebo náhodné vektory (matice apod.). Můžeme je nazývat „pozorování“ nebo „data“. Pro označení náhodného výběru jako celku budeme občas používat značení $\boldsymbol{X}$.

Poznámka. Distribuční funkci F_0, z níž pozorování $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ pocházejí, neznáme. Chceme použít pozorování k tomu, abychom se o F_0 něco potřebného dozvěděli. O distribuční funkci F_0 předpokládáme, že patří do nějaké množiny rozdělení $\mathcal{F}$, které říkáme *model*.

Definice 2.2 *Modelem* pro pozorování $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ rozumíme předem stanovenou množinu rozdělení $\mathcal{F}$, do níž patří neznámé rozdělení F_0.

Poznámka. Rozdělení F_0 je neznámé. Rádi bychom použili pozorovaná data $\boldsymbol{X}$, abychom určili jeho jisté charakteristiky, které nazýváme *parametry*. Formálně jde o nějakou konstantu (nebo vektor konstant) $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{R}^k$, kterou bychom uměli zjistit, kdybychom F_0 znali. Hledaný parametr tedy můžeme obecně zapsat ve tvaru $\boldsymbol{\theta}_0 \equiv t(F_0)$, kde t je nějaký funkcionál.

Příklady (Typy modelů pro reálné náhodné veličiny)**.**

1. Za model $\mathcal{F}$ můžeme např. vzít množinu všech [diskrétních, spojitých] rozdělení na $\mathbb{R}$ s konečnou střední hodnotou [s konečným rozptylem]. Hledané parametry mohou být např. $\mathsf{E}\, X_i$, $\mathsf{var}\, X_i$, $\mathsf{P}[X \leq x] \equiv F_0(x)$ nebo kvantil $F_0^{-1}(\alpha)$. Takový model nazýváme *neparametrický*[‡], neboť není možné popsat všechna rozdělení v $\mathcal{F}$ pomocí konečně mnoha parametrů. Symbolem Θ označujeme množinu všech přípustných hodnot parametru $\boldsymbol{\theta} \equiv t(F)$ pro všechna $F \in \mathcal{F}$.
2. Za model $\mathcal{F}$ můžeme vzít množinu všech rozdělení s hustotami tvaru $f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$ pro $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$, kde $f(\cdot;\cdot)$ je známá funkce a $\boldsymbol{\theta}$ je neznámá konstanta (např. všechna exponenciální, normální, geometrická rozdělení). Tyto modely nazýváme *parametrické*[§]. V parametrickém modelu lze jakékoli jiné parametry vždy vyjádřit jako funkce $\boldsymbol{\theta}$.

Příklady (Parametrické modely)**.**

[*] Angl. *random sample from distribution* F_0 [†] Angl. *sample size* [‡] Angl. *non-parametric model* [§] Angl. *parametric model*

- $\mathcal{F} = \{\mathsf{N}(\mu, \sigma_0^2),\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma_0^2 \text{ pevně dáno}\}$; $\theta = \mu$, $\Theta = \mathbb{R}$.
- $\mathcal{F} = \{\mathsf{N}(\mu, \sigma^2),\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$; $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\mathsf{T}$, $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
- $\mathcal{F} = \{\mathsf{Exp}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}^+\}$; $\theta = \lambda$, $\Theta = \mathbb{R}^+$.
- $\mathcal{F} = \{\mathsf{Alt}(p),\ p \in (0,1)\}$; $\theta = p$, $\Theta = (0,1)$.

Poznámka. Model $\mathcal{F}$ a parametr $\boldsymbol{\theta}$, který nás zajímá, volíme sami. Model vyjadřuje naši apriorní (na datech nezávislou) představu o rozdělení pozorovaných veličin. Volba parametru závisí na otázce, kterou se snažíme zodpovědět pomocí statistické analýzy. Volba modelu a parametru ovlivňuje výběr metody pro analýzu dat (a její výsledky).

2.2 Statistiky

Statistická analýza postupuje tak, že se z náhodného výběru počítají veličiny, které obsahují informaci o požadovaných parametrech, a s nimi se dále pracuje. Těmto veličinám se říká statistiky. Uvažujme náhodný výběr $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$.

Definice 2.3 Pojmem *statistika*[*] nazýváme libovolnou měřitelnou funkci $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})$ pozorování z náhodného výběru $\boldsymbol{X}$. Statistika je náhodná veličina (náhodný vektor, je-li vícerozměrná).

Statistika nesmí záviset na hodnotách, které neznáme a nepozorujeme. Smí to být pouze funkce dat a známých konstant. Mezi nejčastěji používané statistiky patří výběrový průměr a výběrový rozptyl. Uvažujme nyní výběr reálných náhodných veličin $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ a zaveďme dvě nejčastěji používané statistiky.

Definice 2.4

(i) Veličina $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ se nazývá *výběrový průměr*[†] náhodného výběru $\boldsymbol{X}$.

(ii) Veličina $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ se nazývá *výběrový rozptyl*[‡] náhodného výběru $\boldsymbol{X}$.

Výběrový rozptyl nemá smysl počítat z jediného pozorování ($n = 1$); uvažujeme-li výběrový rozptyl, automaticky předpokládáme, že $n \geq 2$.

2.2.1 Vlastnosti výběrového průměru

Uvažujme obecný model $\mathcal{F} = \mathcal{L}^2$. Pracujeme tedy s náhodným výběrem $\boldsymbol{X}$, jehož složky X_i jsou nezávislé náhodné veličiny s libovolným rozdělením, které má konečné druhé momenty. Označme $\mu \equiv \mathsf{E}\, X_i$ a $\sigma^2 = \mathsf{var}\, X_i$.

Lemma 2.1

$$\overline{X}_n = \arg\min_{c \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (X_i - c)^2.$$

Důkaz. Označme si funkci $f(c) = \sum_{i=1}^n (X_i - c)^2$. Tvrzení lemmatu plyne z toho, že $f'(\overline{X}_n) = 0$ a $f''(c) > 0$ pro všechna $c \in \mathbb{R}$. □

[*] Angl. *statistic* [†] Angl. *sample mean* [‡] Angl. *sample variance*

Výběrový průměr tedy minimalizuje součet čtverců odchylek jednotlivých pozorování od libovolného reálného čísla.

Snadno spočítáme první dva momenty výběrového průměru a prozkoumáme jeho limitní chování při $n \to \infty$.

Věta 2.2 (Vlastnosti průměru)
(i) $\mathsf{E}\,\overline{X}_n = \mu$, $\mathsf{var}\,\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$;
(ii) $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \mu$ pro $n \to \infty$;
(iii) $\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ pro $n \to \infty$.

Důkaz. (i) plyne z přímého výpočtu. (ii) ze silného zákona velkých čísel (tvrzení 1.5 pro $k = 1$) a (iii) z centrální limitní věty (tvrzení 1.6 pro $k = 1$). □

Poznámka. Platí-li předpoklad normálního rozdělení, tj. $\mathcal{F} = \{\mathsf{N}(\mu, \sigma^2),\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$, lze body (i) a (iii) předchozí věty zesílit na

$$\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu) \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2) \quad \text{neboli} \quad \overline{X}_n \sim \mathsf{N}(\mu, \tfrac{\sigma^2}{n}). \tag{2.1}$$

2.2.2 Relativní četnost

Zvolme nějaký náhodný jev $B \in \mathcal{A}$, označme $p \equiv P(B)$. Nechť $p \in (0, 1)$. Nechť existuje posloupnost n nezávislých pozorování jevu B — označme $X_i = 1$, pokud jev B při i-tém pozorování nastal, a $X_i = 0$, pokud jev B při i-tém pozorování nenastal ($i = 1, \ldots, n$). Pak náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ představují náhodný výběr z *alternativního rozdělení*[*] $\mathsf{Alt}(p)$.

Výběrový průměr $\overline{X}_n$ je podílem počtu pozorování, při nichž jev B nastal, a celkového počtu pozorování n. Nazýváme jej *(empirická) relativní četnost*[†] jevu B. Pro relativní četnost $\overline{X}_n$ pochopitelně platí Věta 2.2. Uveďme si ji znovu v podobě specializované na tento případ a přidejme ještě jedno nové tvrzení.

Věta 2.3 (Vlastnosti relativní četnosti)
(i) $\mathsf{E}\,\overline{X}_n = p$, $\mathsf{var}\,\overline{X}_n = \frac{p(1-p)}{n}$;
(ii) $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} p$ pro $n \to \infty$;
(iii) $\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - p) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, p(1-p))$ pro $n \to \infty$;
(iv) $n\overline{X}_n \sim \mathsf{Bi}(n, p)$.

Důkaz. (i) až (iii) plyne přímo z Věty 2.2 s využitím toho, že pro alternativní náhodnou veličinu platí $\mathsf{E}\,X_i = p$ a $\mathsf{var}\,X_i = p(1-p)$. (iv) plyne z rovnosti $n\overline{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i$ a z reprezentace binomického rozdělení jako součtu nezávislých stejně rozdělených alternativních rozdělení. □

Podle bodu (ii) můžeme pravděpodobnost jevu B zjistit s libovolnou přesností pomocí relativní četnosti, stačí jen mít dostatek pozorování výskytu tohoto jevu.

[*] Angl. *Bernoulli distribution.* [†] Angl. *empirical frequency*

2.2.3 Vlastnosti výběrového rozptylu

Nejprve uvažujme obecný model $\mathcal{F} = \mathcal{L}^2$. Označme opět $\mu \equiv \mathsf{E}\, X_i$ a $\sigma^2 = \mathsf{var}\, X_i$. Výběrový rozptyl lze přepsat do různých podob, které se k určitým účelům hodí lépe než původní definice.

Věta 2.4

(i)
$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2\right). \tag{2.2}$$

(ii) Nechť $\mathbf{1}_n$ je sloupcový vektor n jedniček. Označme $\mathbb{A} = \mathbb{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\mathsf{T}$ (matice $n \times n$). Pak
$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \frac{1}{n-1}\boldsymbol{Y}^\mathsf{T}\mathbb{A}\boldsymbol{Y}, \tag{2.3}$$
kde $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} - c\mathbf{1}_n$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Část (i):

$$\tfrac{n-1}{n} S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i^2 - 2X_i\overline{X}_n + \overline{X}_n^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i\overline{X}_n + \overline{X}_n^2$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\overline{X}_n^2 + \overline{X}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2$$

Část (ii):

$$\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^\mathsf{T}\left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\mathsf{T}\right)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^\mathsf{T}\boldsymbol{X} - \frac{1}{n}\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\mathsf{T}\boldsymbol{X}$$
$$= \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2 = (n-1)S_n^2$$

Poslední část tvrzení pak plyne z toho, že

$$\mathbf{1}_n^\mathsf{T}\mathbb{A} = \mathbf{0} = \mathbb{A}\mathbf{1}_n.$$

□

Zde končí předn. 2 (5.10.)

Poznámka. Vzorec (2.2) se používá mj. pro numerický výpočet S_n^2. Vzorec (2.3) přepisuje S_n^2 v podobě kvadratické formy a ukazuje, že S_n^2 je invariantní vůči posunutí pozorování X_i o libovolnou konstantu c.

Povšimněte si, že $\mathbf{1}_n^\mathsf{T}\mathbb{A} = \mathbf{0}^\mathsf{T}$ a matice $\mathbb{A}$ je idempotentní, neboli $\mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{A}$. Dále máme $\mathsf{r}(\mathbb{A}) = \mathsf{tr}(\mathbb{A}) = n - 1$. U kvadratických forem máme k dispozici šikovný vzorec pro výpočet střední hodnoty.

Lemma 2.5 Nechť $\boldsymbol{Z}$ je náhodný vektor délky n se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a konečnou rozptylovou maticí Σ. Nechť $\mathbb{B}$ je libovolná matice $n \times n$. Pak platí

$$\mathsf{E}\, \boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}} \mathbb{B} \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\mu}^{\mathsf{T}} \mathbb{B} \boldsymbol{\mu} + \mathsf{tr}\left(\mathbb{B}\Sigma\right).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\, \boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}} \mathbb{B} \boldsymbol{Z} &= \mathsf{E}\, \mathsf{tr}\left(\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}} \mathbb{B} \boldsymbol{Z}\right) = \mathsf{E}\, \mathsf{tr}\left(\mathbb{B} \boldsymbol{Z} \boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\right) = \mathsf{tr}\left(\mathbb{B}\, \mathsf{E}\, \boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\right) = \mathsf{tr}\left(\mathbb{B}(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{\mathsf{T}} + \Sigma)\right) \\ &= \mathsf{tr}\left(\mathbb{B}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{\mathsf{T}}\right) + \mathsf{tr}\left(\mathbb{B}\Sigma\right) = \boldsymbol{\mu}^{\mathsf{T}} \mathbb{B} \boldsymbol{\mu} + \mathsf{tr}\left(\mathbb{B}\Sigma\right),\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že

$$\Sigma = \mathsf{E}\, (\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}} = \mathsf{E}\, \boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{\mathsf{T}}.$$

□

Věta 2.6 (Vlastnosti výběrového rozptylu)

(i) $S_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \sigma^2$.

(ii) $\mathsf{E}\, S_n^2 = \sigma^2$.

(iii) Jestliže $\mathcal{F} = \mathcal{L}^4$ (existuje konečný čtvrtý moment X_i), pak

$$\sqrt{n}\,(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma^4(\gamma_4 - 1)),$$

kde $\gamma_4 = \frac{\mathsf{E}\,(X_i-\mu)^4}{\sigma^4}$ je tzv. špičatost* rozdělení X_i.

(iv)† Jestliže $\mathcal{F} = \mathcal{L}^4$, pak

$$\sqrt{n}\left[\begin{pmatrix}\overline{X}_n \\ S_n^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mu \\ \sigma^2\end{pmatrix}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_2(\mathbf{0}, \Sigma),$$

kde $\Sigma = \begin{pmatrix}\sigma^2 & \sigma^3\gamma_3 \\ \sigma^3\gamma_3 & \sigma^4(\gamma_4 - 1)\end{pmatrix}$ a $\gamma_3 = \frac{\mathsf{E}\,(X_i-\mu)^3}{\sigma^3}$ je tzv. šikmost‡ rozdělení X_i.

Důkaz. Část (i): Dle Věty 2.4(i) můžeme psát

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2\right).$$

Jelikož $\frac{n}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, tak stačí dokázat, že

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \sigma^2.$$

Ze zákona velkých čísel (tvrzení 1.5) platí

$$\left(\overline{X}_n, \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{\mathsf{T}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \left(\mathsf{E}\, X_i, \mathsf{E}\, X_i^2\right)^{\mathsf{T}}.$$

* Angl. *kurtosis* † Neprobráno na přednášce. Bude na cvičení. ‡ Angl. *skewness*

Nyní funkce $g(y_1, y_2) = y_2 - y_1^2$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$, tedy je spojitá i v daném (neznámém bodě) $\left(\mathsf{E}\, X_i, \mathsf{E}\, X_i^2\right)$, který je nosičem limitního rozdělení. Tedy můžeme použít větu o spojité transformaci (tvrzení 1.2(ii)) a dostáváme

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mathsf{E}\, X_i^2 - (\mathsf{E}\, X_i)^2 = \mathsf{var}\, X_i = \sigma^2,$$

což jsme měli ověřit.

Část (ii): Položme $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} - \mu \mathbf{1}_n$ a všimněme si, že $\mathsf{E}\, \boldsymbol{Y} = \mathbf{0}$. Dle Věty 2.4(ii) a Lematu 2.5 můžeme počítat

$$(n-1)\mathsf{E}\, S_n^2 = \mathsf{E}\, \boldsymbol{Y}^\mathsf{T} \mathbb{A} \boldsymbol{Y} = \mathsf{E}\, \boldsymbol{Y}^\mathsf{T} \mathbb{A}\, \mathsf{E}\, \boldsymbol{Y} + \mathsf{tr}\,(\mathbb{A}\sigma^2 \mathbb{I}_n) = 0 + (n-1)\sigma^2,$$

neboť

$$\mathsf{tr}\,(\mathbb{A}\sigma^2\mathbb{I}_n) = \sigma^2\left(\mathsf{tr}\,(\mathbb{I}_n) - \tfrac{1}{n}\mathsf{tr}\,(\mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\mathsf{T})\right) = \sigma^2(n-1).$$

Část (iii): Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mu = 0$, jinak přejdeme k $X_i' = X_i - \mu$ a S_n^2 se nezmění.

Dále definujme nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $\boldsymbol{Q}_1, \ldots, \boldsymbol{Q}_n$, kde

$$\boldsymbol{Q}_i = (X_i, X_i^2)^\mathsf{T}.$$

Podobně jako v části (i) uvažujme funkci $g(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ a všimněme si, že $S_n^2 = \frac{n}{n-1} g(\overline{\boldsymbol{Q}}_n)$ a $g(\mathsf{E}\, X_i, \mathsf{E}\, X_i^2) = \sigma^2$. Na zkoumání náhodné veličiny $g(\overline{\boldsymbol{Q}}_n)$ využijeme Δ-metoda (tvrzení 1.7). Dle centrální limitní věty (tvrzení 1.6)

$$\sqrt{n}\,(\overline{\boldsymbol{Q}}_n - \mathsf{E}\, \boldsymbol{Q}_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_2(\mathbf{0}, \Sigma_{\boldsymbol{Q}}),$$

kde

$$\mathsf{E}\, \boldsymbol{Q}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^2 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_{\boldsymbol{Q}} = \mathsf{var}\,(\boldsymbol{Q}_i) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \mathsf{cov}\,(X_i, X_i^2) \\ \mathsf{cov}\,(X_i, X_i^2) & \mathsf{var}\,(X_i^2) \end{pmatrix}.$$

Dále

$$\mathbb{D}(x_1, x_2) = \left(\tfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \tfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right) = (-2x_1, 1)$$

a tudíž

$$\mathbb{D}_g(\mathsf{E}\, \boldsymbol{Q}_i) = \mathbb{D}_g(\mathsf{E}\, X_i, \mathsf{E}\, X_i^2) = (0, 1).$$

S využitím Δ-metody (tvrzení 1.7) dostáváme

$$\sqrt{n}\,(g(\overline{\boldsymbol{Q}}_n) - \sigma^2) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma^4(\gamma_2 - 1)), \tag{2.4}$$

kde jsme využili toho, že

$$\mathbb{D}_g(\mathsf{E}\, \boldsymbol{Q}_i)\Sigma_{\boldsymbol{Q}}\mathbb{D}_g(\mathsf{E}\, \boldsymbol{Q}_i)^\mathsf{T} = \mathsf{var}\,(X_i^2) = \sigma^4(\gamma_2 - 1).$$

Na druhou stranu, ale

$$\sqrt{n}\,(g(\overline{\boldsymbol{Q}}_n) - \sigma^2) = \sqrt{n}\,(\tfrac{n-1}{n} S_n^2 - \sigma^2) = \sqrt{n}\,(S_n^2 - \sigma^2) - \tfrac{\sqrt{n}\, S_n^2}{n}. \tag{2.5}$$

Tvrzení pak plyne kombinací (2.4) a (2.5) a z toho, že $\frac{\sqrt{n}\, S_n^2}{n} = \frac{S_n^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} 0$. □

Poznámka.

- Věta 2.6(iii) říká, že variabilita výběrového rozptylu asymptoticky závisí na špičatosti pozorování.
- Věta 2.6(iv) říká, že výběrový průměr a výběrový rozptyl mají asymptoticky sdružené normální rozdělení. Jejich kovariance asymptoticky závisí na šikmosti pozorování. Je-li šikmost nulová, výběrový průměr a výběrový rozptyl jsou asymptoticky nezávislé.

Nyní přidáme předpoklad normálního rozdělení, tj. budeme pracovat v menším modelu $\mathcal{F} = \{\mathsf{N}(\mu, \sigma^2),\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$. Pracujeme tedy s náhodným výběrem $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$, kde X_i jsou nezávislé s rozdělením $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Díky jejich nezávislosti platí $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_n(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbb{I}_n)$.

Nejprve uvedeme dva výsledky, které platí pro libovolné normálně rozdělené náhodné vektory.

Lemma 2.7 Nechť $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ a $\mathbb{A}$ je positivně semidefinitní matice typu $n \times n$.

(i) Nechť $\mathbb{B}$ je libovolná matice typu $m \times n$ splňující rovnost $\mathbb{B}\Sigma\mathbb{A} = \mathbb{0}_{m\times n}$. Pak náhodná veličina $\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{A}\boldsymbol{X}$ a náhodný vektor $\mathbb{B}\boldsymbol{X}$ jsou nezávislé.

(ii) Nechť $\mathbb{B}$ je libovolná positivně semidefinitní matice typu $n \times n$ splňující rovnost $\mathbb{B}\Sigma\mathbb{A} = \mathbb{0}_{n\times n}$. Pak jsou náhodné veličiny $\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{A}\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{B}\boldsymbol{X}$ nezávislé.

Důkaz. Část (i). Předpokládejme, že $h(\mathbb{A}) = r \geq 1$ (pokud by $h(A) = 0$, pak je důkaz triviální). Potom s využitím tzv. skeletního rozkladu existuje matice $\mathbb{L}$ typu $n \times r$ taková, že $h(\mathbb{L}) = r$ a $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{L}^\mathsf{T}$. Dále z předpokladu věty máme

$$\mathbb{0}_{m\times n} = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{A} = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{L}\mathbb{L}^\mathsf{T}.$$

Vynásobením výše uvedené rovnosti zprava maticí $(\mathbb{L}^\mathsf{T})^-$ dostáváme

$$\mathbb{0}_{m\times r} = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{A} = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{L}.$$

Tedy náhodné vektory $\mathbb{B}\boldsymbol{X}$ a $\mathbb{L}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}$ jsou nekorelované, neboť

$$\mathsf{cov}\,(\mathbb{B}\boldsymbol{X}, \mathbb{L}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}) = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{L} = \mathbb{0}_{m\times r}.$$

Z definice mnohorozměrného normální rozdělení plyne, že tyto náhodné vektory mají sdruženě normální rozdělení, neboť můžeme psát

$$\begin{pmatrix} \mathbb{B}\boldsymbol{X} \\ \mathbb{L}^\mathsf{T}\boldsymbol{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{B} \\ \mathbb{L}^\mathsf{T} \end{pmatrix} \boldsymbol{X}.$$

Sdružená normalita a nekorelovanost pak implikuje nezávislost náhodných vektorů $\mathbb{B}\boldsymbol{X}$ a $\mathbb{L}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}$ (P.6.2(ii)). Tudíž také $\mathbb{B}\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{L}\mathbb{L}^\mathsf{T}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{A}\boldsymbol{X}$ jsou nezávislé.

Část (ii). Předpokládejme, že $h(\mathbb{A}) = r \geq 1$ a $h(\mathbb{B}) = q \geq 1$ (jinak je důkaz triviální). Tedy existují matice $\mathbb{L}$ typu $n \times r$ a $\mathbb{P}$ typu $n \times q$ takové, že

$$h(L) = r, \quad \mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{L}^\mathsf{T}, \quad h(P) = q, \quad \mathbb{B} = \mathbb{P}\mathbb{P}^\mathsf{T}.$$

Dále z předpokladu

$$\mathbb{0}_{n\times n} = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{A} = \mathbb{P}\mathbb{P}^\mathsf{T}\Sigma\mathbb{L}\mathbb{L}^\mathsf{T}.$$

Vynásobením výše uvedené rovnosti zprava maticí $(\mathbb{L}^\mathsf{T})^-$ a zleva maticí $\mathbb{P}^-$ dostáváme

$$\mathbb{0}_{q\times r} = \mathbb{P}^\mathsf{T}\Sigma\mathbb{L}.$$

Tedy podobně jako v části (i) dostáváme, že náhodné vektory $\mathbb{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}$ a $\mathbb{L}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}$ jsou nezávislé a tudíž také kvadratické formy $\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{P}\mathbb{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{B}\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{L}\mathbb{L}^\mathsf{T}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{A}\boldsymbol{X}$ jsou nezávislé. □

Zde končí předn. 3 (9.10.)

Věta 2.8 (Vlastnosti výběrového rozptylu za normality) Nechť $X_i \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$ jsou nezávislé. Pak platí

(i)
$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}. \tag{2.6}$$

(ii) $\overline{X}_n$ a S_n^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.

Důkaz. Část (i). Dle Věty 2.4 můžeme psát

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \boldsymbol{Y}^\mathsf{T}\mathbb{A}\boldsymbol{Y},$$

kde

$$\boldsymbol{Y} = \left(\tfrac{X_1-\mu}{\sigma}, \ldots, \tfrac{X_n-\mu}{\sigma}\right)^\mathsf{T} \sim \mathbb{N}_n(\boldsymbol{0}, \mathbb{I}_n)$$

a $\mathbb{A} = \mathbb{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\mathsf{T}$. Jelikož matice $\mathbb{A}$ je idempotentní s hodností $n-1$, tak tvrzení plyne z Věty P.6.3(iii) (kde $\Sigma = \mathbb{I}_n$).

Část (ii) Všimněme si, že můžeme psát

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\mathbb{B}\boldsymbol{X}, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\mathbb{A}\boldsymbol{X},$$

kde $\mathbb{B} = \mathbf{1}_n^\mathsf{T}$ a $\mathbb{A} = \mathbb{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n$. Dále $\boldsymbol{X} \sim \mathbb{N}_n(\boldsymbol{0}, \sigma^2\mathbb{I}_n)$ a tedy tvrzení plyne z Lemmatu 2.7(i), neboť

$$\mathbb{B}\Sigma\mathbb{A} = \mathbf{1}_n^\mathsf{T}\sigma^2\mathbb{I}_n\mathbb{A} = \sigma^2(\mathbf{1}_n^\mathsf{T} - \tfrac{1}{n}\,n\mathbf{1}_n) = \mathbf{0}_n^\mathsf{T}.$$

□

Poznámka. Z definice χ^2 rozdělení a z centrální limitní věty plyne, že pro velké n lze rozdělení χ^2_{n-1} aproximovat rozdělením $\mathsf{N}(n-1, 2(n-1))$. Odtud a z (2.6) dostaneme pro $n \to \infty$

$$\frac{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} - (n-1)}{\sqrt{n-1}} \overset{\text{as.}}{\sim} \mathsf{N}(0, 2)$$

a nakonec

$$\sqrt{\tfrac{n-1}{n}}\,\sqrt{n}\,(S_n^2 - \sigma^2) \overset{\text{as.}}{\sim} \mathsf{N}(0, 2\sigma^4).$$

Uvědomíme-li si, že špičatost normálního rozdělení je 3, vidíme, že tvrzení (i) z věty 2.8 je v souladu s asymptotickým výsledkem věty 2.6(iii). Věta 2.8(i) udává přesné rozdělení S_n^2 pro normální data, zatímco věta 2.6(iii) udává asymptotické rozdělení S_n^2 pro libovolná data s konečným čtvrtým momentem.

Poznámka. Věta 2.8(ii) říká, že jsou-li data normální, $\overline{X}_n$ a S_n^2 jsou nezávislé pro každé konečné $n > 1$.

Věta 2.9 (limitní věta o T statistice) Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z libovolného rozdělení se střední hodnotou μ a s konečným nenulovým rozptylem σ^2. Pak

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Důkaz. Statistiku T_n si můžeme přepsat do tvaru

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\,\frac{\sigma}{S_n}.$$

Z centrální limitní věty (tvrzení 1.6, pro $k = 1$) máme, že

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Dále z $S_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \sigma^2$ (věta 2.6(i)) a z věty o spojité transformaci (tvrzení 1.2(ii)) plyne, že

$$\frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} 1.$$

Tvrzení pak plyne z Cramérovy-Sluckého věty (tvrzení 1.3). □

Nyní opět přidáme předpoklad normálního rozdělení.

Věta 2.10 (věta o T statistice) Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Pak

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

Důkaz. Statistiku T_n si můžeme přepsat do tvaru

$$T_n = \frac{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}/(n-1)}}.$$

Dále $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ a $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ (věta 2.8(i)), přičemž tyto náhodné veličiny jsou nezávislé (věta 2.8(ii)). Tvrzení pak plyne z reprezentace t-rozdělení (věta P.6.4). □

Poznámka. Věta 2.10 udává přesné rozdělení statistiky T_n pro normální data, zatímco věta 2.9 udává asymptotické rozdělení téže statistiky pro libovolná data s konečným rozptylem. Uvědomte si, že pro $n \to \infty$ rozdělení t_{n-1} konverguje k rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$.

Nyní budeme uvažovat dva nezávislé výběry ze dvou různých normálních rozdělení.

Věta 2.11 (věta o F statistice) Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ a $Y_1, \dots, Y_m$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Nechť jsou vektory $(X_1, \dots, X_n)^\mathsf{T}$ a $(Y_1, \dots, Y_m)^\mathsf{T}$ nezávislé. Označme výběrové průměry obou výběrů $\overline{X}_n$ a $\overline{Y}_m$ a výběrové rozptyly

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \quad \text{a} \quad S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \overline{Y}_m)^2.$$

Pak platí

$$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n-1,m-1}.$$

Důkaz. Statistiku si můžeme přepsat jako

$$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} = \frac{\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2}/(n-1)}{\frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}/(m-1)}$$

Dále $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2_{n-1}$ a $\frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2_{m-1}$ (věta 2.8(ii)), přičemž tyto náhodné veličiny jsou nezávislé. Tvrzení pak plyne z reprezentace F-rozdělení (věta P.6.5). □

2.3 Uspořádaný náhodný výběr

Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z jednorozměrného spojitého rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou f vzhledem k Lebesgueově míře. Nechť $n \geq 2$. Jelikož $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé a mají spojité rozdělení, tak

$$\mathsf{P}(X_i = X_j \text{ pro nějaká } i, j \in \{1, \dots, n\}) = 0.$$

Definice 2.5 (Uspořádaný náhodný výběr a pořadí)

(i) Seřadíme-li všechny náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ od nejmenší do největší, získáme *uspořádaný náhodný výběr*[*]

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n-1)} < X_{(n)}.$$

Symbolem $X_{(k)}$ rozumíme k-tou nejmenší hodnotu mezi pozorováními $X_1, \dots, X_n$; nazýváme ji k-tá *pořádková statistika*[†].

(ii) *Pořadím*[‡] náhodné veličiny X_i ve výběru $X_1, \dots, X_n$ rozumíme přirozené číslo $R_i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $X_i = X_{(R_i)}$.

Celý uspořádaný výběr budeme značit $\boldsymbol{X}_{(\cdot)}$, tj.

$$\boldsymbol{X}_{(\cdot)} = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^\mathsf{T}.$$

Poznámka.

[*] Angl. *ordered random sample* [†] Angl. *order statistic* [‡] Angl. *rank*

1. Hodnoty $X_1, \dots, X_n$ lze jednoznačně určit z n-tice pořádkových statistik a n-tice pořadí.
2. První pořádková statistika je minimum, n-tá pořádková statistika je maximum všech veličin náhodného výběru.
3. Platí $R_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\langle 0,\infty)}(X_i - X_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{X_i \geq X_j\}$.
4. Pořádkové statistiky a pořadí jsou náhodné veličiny a též statistiky ve smyslu definice 2.3.

Označme symbolem $\mathcal{P}_n$ množinu všech permutací posloupnosti $(1, \dots, n)$. Tato množina má $n!$ prvků.

Věta 2.12 Sdružená hustota náhodného vektoru $\boldsymbol{X}_{(\cdot)} = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^\mathsf{T}$ vzhledem k Lebesgueově míře jest

$$p(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} n! f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_n) & \text{pokud } y_1 < \cdots < y_n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz. Víme, že náhodný vektor $\boldsymbol{X}_{(\cdot)}$ má hustotu p, právě když pro každou borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}_0^n$ platí

$$\mathsf{P}(\boldsymbol{X}_{(\cdot)} \in B) = \int \cdots \int \mathbb{1}_B(\boldsymbol{y}) p(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}.$$

Vezměme si tedy $B \in \mathcal{B}_0^n$ a označme si vektor pořadí $\boldsymbol{R} = (R_1, \dots, R_n)^\mathsf{T}$ a jednu z permutací množiny $\mathcal{P}_n$ jako $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n)^\mathsf{T}$. Je dobré si uvědomit, že $\boldsymbol{R}$ závisí na $\boldsymbol{X}$. Proto tam, kde to bude vhodné, tak budeme psát $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$.

Nyní můžeme počítat

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\boldsymbol{X}_{(\cdot)} \in B) &= \sum_{\boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_n} \mathsf{P}(\boldsymbol{X}_{(\cdot)} \in B, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{r}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_n} \int \cdots \int \mathbb{1}_B(\boldsymbol{x}_{(\cdot)})\, \mathbb{1}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}\} f(x_1) \cdots f(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= \sum_{\boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_n} \int \cdots \int \mathbb{1}_B(\boldsymbol{y})\ \mathbb{1}\{\boldsymbol{R}(y_{r_1}, \dots, y_{r_n}) = \boldsymbol{r}\} f(y_{r_1}) \cdots f(y_{r_n})\, dy_1 \cdots dy_n \\
&= \int \cdots \int \mathbb{1}_B(\boldsymbol{y}) \mathbb{1}\{y_1 < \ldots < y_n\} \sum_{\boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_n} f(y_{r_1}) \cdots f(y_{r_n})\, dy_1 \cdots dy_n \\
&= \int \cdots \int \mathbb{1}_B(\boldsymbol{y})\, \mathbb{1}\{y_1 < \ldots < y_n\} n! f(y_1) \cdots f(y_n)\, dy_1 \cdots dy_n,
\end{aligned}$$

kde jsme přeznačili $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_{(\cdot)}$ (tj. $x_i = y_{r_i},\ i = 1, \dots, n$), z čehož plyne, že $y_1 < \ldots < y_n$. Tudíž také hodnoty $y_{r_1}, \dots, y_{r_n}$ mají pořadí $\boldsymbol{r}$ a tedy indikátor $\mathbb{1}\{\boldsymbol{R}(y_{r_1}, \dots, y_{r_n}) = \boldsymbol{r}\}$ je splněn a mohli jsme ho nahradit indikátorem $\mathbb{1}\{y_1 < \ldots < y_n\}$. □

Zde končí předn. 4 (12.10.)

Poznámka. Náhodné veličiny $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ nejsou nezávislé. Podobně ani náhodné veličiny udávající pořadí $R_1, \dots, R_n$ nejsou nezávislé.

Věta 2.13 Distribuční funkce k-té pořádkové statistiky jest

$$F_{(k)}(x) = \mathsf{P}(X_{(k)} \le x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F^j(x)(1-F(x))^{n-j}$$
$$= \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt,$$

kde $B(\cdot,\cdot)$ značí Beta funkci.

Důkaz. První rovnost: Označme si $Z_i = \mathbb{1}\{X_i \le x\}$. Potom $Y_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ udává počet veličin, které mají menší než x. Navíc $Y_n \sim \mathsf{Bi}(n, F(x))$. Tudíž

$$\mathsf{P}(X_{(k)} \le x) = \mathsf{P}(Y_n \ge k) = \sum_{j=k}^{n} \mathsf{P}(Y_n = j) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F^j(x)(1-F(x))^{n-j}.$$

.

Druhá rovnost: Budeme postupovat zpětnou indukcí.

Nechť $k = n$, potom

$$\frac{1}{B(n,1)} \int_0^{F(x)} t^{n-1}\,dt = \frac{1}{B(n,1)} \frac{1}{n} F^n(x) = \binom{n}{n} F^n(x),$$

kde jsme využili toho, že

$$\frac{1}{n\,B(n,1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{n\Gamma(n)\Gamma(1)} = 1 = \binom{n}{n}.$$

Nyní provedeme *indukční krok* ($k \to k-1$). Předpokládejme, že pro dané k platí

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F^j(x)(1-F(x))^{n-j} = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt$$

a chceme ukázat, že

$$\sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} F^j(x)(1-F(x))^{n-j} = \frac{1}{B(k-1, n-k+2)} \int_0^{F(x)} t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}\,dt. \tag{2.7}$$

Počítejme nyní pomocí metody per partes integrál na pravé straně předcházející rovnosti, tj.

$$\int_0^{F(x)} t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}\,dt = \left[\tfrac{1}{k-1} t^{k-1}(1-t)^{n-k+1}\right]_0^{F(x)} + \tfrac{n-k+1}{k-1} \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt$$
$$= \tfrac{1}{k-1} F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k+1} + \tfrac{n-k+1}{k-1} \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt.$$

Pravá strana (2.7) se tedy rovná

$$\frac{1}{B(k-1, n-k+2)(k-1)} \left(F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k+1} + (n-k+1) \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt \right).$$

Nyní si všimněme, že

$$\frac{1}{B(k-1,n-k+2)(k-1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k-1)\Gamma(n-k+2)(k-1)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \binom{n}{k-1}$$

a dále

$$\frac{n-k+1}{B(k-1,n-k+2)(k-1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)} = \frac{1}{B(k,n-k+1)}.$$

Odtud již s využitím indukčního předpokladu dostáváme pro pravou stranu (2.7), že

$$\frac{1}{B(k-1,n-k+2)} \int_0^{F(x)} t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}dt$$

$$= \binom{n}{k-1} F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k+1} + \frac{1}{B(k,n-k+1)} \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt.$$

$$= \binom{n}{k-1} F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k+1} + \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F^j(x)(1-F(x))^{n-j}$$

$$= \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} F^j(x)(1-F(x))^{n-j}.$$

□

Důsledky.

1. Mají-li X_i rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$, pak $X_{(k)}$ má beta rozdělení $\mathsf{B}(k, n-k+1)$. Z toho plyne

$$\mathsf{E}\, X_{(k)} = \frac{k}{n+1}, \quad \mathsf{var}\,(X_{(k)}) = \frac{k(n-k+1)}{(n+2)(n+1)^2}.$$

2. Nechť mají X_i jakékoli spojité rozdělení s ryze rostoucí distribuční funkcí F. Potom $F(X_{(k)}) \sim \mathsf{B}(k, n-k+1)$.
   Na druhou stranu nechť $Z \sim \mathsf{B}(k, n-k+1)$. Pak

$$\mathsf{P}[X_{(k)} \le x] = \mathsf{P}[F(X_{(k)}) \le F(x)] = \mathsf{P}[Z \le F(x)] = \mathsf{P}[F^{-1}(Z) \le x],$$

   tj. $X_{(k)}$ má stejné rozdělení jako $F^{-1}(Z)$.

Věta 2.14 Hustota k-té pořádkové statistiky vzhledem k Lebesgueově míře jest

$$f_{(k)}(x) = n\binom{n-1}{k-1} f(x)F^{k-1}(x)[1-F(x)]^{n-k}.$$

Důkaz. S využitím Věty 2.13

$$f_{(k)}(x) = F'_{(k)}(x) = \frac{1}{B(k,n-k+1)} f(x)F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k}$$

a tvrzení věty plyne z toho, že

$$\frac{1}{B(k,n-k+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

□

Věta 2.15 Náhodný vektor $\boldsymbol{R} = (R_1, \ldots, R_n)^\mathsf{T}$ nabývá všech hodnot na množině $\mathcal{P}_n$, přičemž každá z nich má pravděpodobnost $1/n!$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{r}) &= \int\cdots\int \mathbb{1}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}\}\, f(x_1)\cdots f(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int\cdots\int \mathbb{1}\{\boldsymbol{R}(y_{r_1}, \ldots, y_{r_n}) = \boldsymbol{r}\}\, f(y_{r_1})\cdots f(y_{r_n})\, dy_1 \cdots dy_n \\
&= \int\cdots\int \mathbb{1}\{y_1 < \ldots < y_n\} f(y_{r_1})\cdots f(y_{r_n})\, dy_1 \cdots dy_n \\
&= \int\cdots\int \mathbb{1}\{y_1 < \ldots < y_n\} f(y_1)\cdots f(y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \\
&= \mathsf{P}\big(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}) = (1, 2, \ldots, n)^\mathsf{T}\big),
\end{aligned}$$

kde jsme podobně jako v důkazu Věty 2.12 přeznačili $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_{(\cdot)}$ (tj. $x_i = y_{r_i}$, $i = 1, \ldots, n$), z čehož plyne, že $y_1 < \ldots < y_n$.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathsf{P}(\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}) = const., \quad \text{pro } \forall \boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_n.$$

Tvrzení věty pak plyne z toho, že množina $\mathcal{P}_n$ má právě $n!$ prvků. □

Věta 2.16 Platí

(i) $\mathsf{P}(R_i = k) = \frac{1}{n}$ pro všechna $i, k \in \{1, \ldots, n\}$.
(ii) $\mathsf{P}(R_i = k, R_j = m) = \frac{1}{n(n-1)}$ pro všechna $i \neq j, k \neq m \in \{1, \ldots, n\}$.
(iii) $\mathsf{E}\, R_i = \frac{n+1}{2}$, $\mathsf{var}\, R_i = \frac{n^2-1}{12}$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$.
(iv) $\mathsf{cov}\,(R_i, R_j) = -\frac{n+1}{12}$ pro všechna $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$.

Důkaz. Část (i). Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat $i = n$. Dále nechť $\mathcal{P}_{n-1}^k$ obsahuje ty prvky $\mathcal{P}$, které mají na posledním místě číslo k. Nyní

$$\mathsf{P}(R_n = k) = \sum_{\boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_{n-1}^k} \mathsf{P}(R_n = \boldsymbol{r}) = (n-1)!\, \frac{1}{n!} = \frac{1}{n},$$

kde jsme využili větu 2.15 a toho, že množina $\mathcal{P}_{n-1}^k$ má $(n-1)!$ prvků.

Část (ii). Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat $i = n-1$ a $j = n$. Dále nechť $\mathcal{P}_{n-2}^{k,m}$ obsahuje ty prvky $\mathcal{P}$, které mají na předposledním místě číslo k a na posledním místě číslo m. Potom

$$\mathsf{P}(R_{n-1} = k, R_n = m) = \sum_{\boldsymbol{r} \in \mathcal{P}_{n-2}^{k,m}} \mathsf{P}(R_n = \boldsymbol{r}) = (n-2)!\, \frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$

kde jsme využili větu 2.15 a toho, že množina $\mathcal{P}_{n-2}^{k,m}$ má $(n-2)!$ prvků.

Část (iii). Dle části (i):

$$\mathsf{E}\, R_i = \sum_{k=1}^{n} k\, \mathsf{P}(R_i = k) = \sum_{k=1}^{n} k\, \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\, \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Podobně

$$\begin{aligned}\operatorname{var} R_i &= \mathsf{E}\, R_i^2 - (\mathsf{E}\, R_i)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n+1}{12}(4n+2-3n-3) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}.\end{aligned}$$

Část (iv).

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(R_i, R_j) &= \mathsf{E}\, R_i R_j - \mathsf{E}\, R_i \mathsf{E}\, R_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1, m\neq k}^{n} km \frac{1}{n(n-1)} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{k=1}^{n} k \sum_{m=1}^{n} m - \sum_{k=1}^{n} k^2\right] - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6(n-1)} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)}{12(n-1)}\Big[3n(n+1) - 2(2n+1) - 3(n+1)(n-1)\Big] \\ &= \frac{(n+1)}{12(n-1)}(1-n) = -\frac{(n+1)}{12}.\end{aligned}$$

□

Poznámka. Pokud data nepocházejí ze spojitého rozdělení nebo se v nich nacházejí shodná pozorování vzniklá vlivem zaokrouhlování, tak dává stále smysl definovat uspořádaný náhodný výběr jako

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n-1)} \leq X_{(n)}$$

přičemž pořádková statistika $X_{(k)}$ je stále dobře definována.

Pořadí však již nelze stanovit jednoznačně. V takovém případě je možné všem shodným pozorováním přiřadit jejich průměrné pořadí nebo jim jejich pořadí stanovit náhodně. Většina výsledků odvozených pro pořadí pocházející ze spojitého rozdělení však pro takto upravená pořadí neplatí.

Zde končí předn. 5 (17.10.)

2.4 Transformovaný náhodný výběr

2.4.1 Transformace pozorování

Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení s distribuční funkcí F_X, hustotou f_X a nosičem S_X. Uvažujme ryze monotonní* diferencovatelnou funkci $g : S_X \to \mathbb{R}$ a definujme $Y_i = g(X_i)$. Potom $Y_1, \ldots, Y_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou f_Y. Kdyby rozdělení F_X bylo spojité a kdybychom znali f_X, spočítali bychom hustotu f_Y z tvrzení P.5.3.

* Nemonotonním transformacím se obvykle vyhýbáme, protože by mohly ztotožnit pozorování, která byla původně výrazně odlišná.

Transformace pozorování se ve statistice používají dosti často. Běžný důvod pro provedení transformace bývá, že původní náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ příliš porušuje předpoklady metod, které bychom chtěli použít (například normalitu, symetrii hustoty, existenci momentů apod.). Najdeme tedy vhodnou funkci g takovou, že $Y_i = g(X_i)$ splňuje předpoklady lépe než původní pozorování a pracujeme s náhodným výběrem $Y_1, \dots, Y_n$ namísto původního náhodného výběru $X_1, \dots, X_n$. Mezi nejčastěji používané transformace kladných náhodných veličin patří např. $g(x) = \log x$ nebo $g(x) = \sqrt{x}$.

Příklad. Nechť X_i má tzv. *logaritmicko-normální rozdělení* $\mathsf{LN}(\mu, \sigma^2)$. Potom $\log(X_i)$ má normální rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$

2.4.2 Vliv transformace na parametry

Pokud používáme transformace, musíme si uvědomovat, že řada parametrů rozdělení F_X původního náhodného výběru se po transformaci změní takovým způsobem, že je už nedokážeme identifikovat.

Například střední hodnota $\mu_X = \mathsf{E}\, X_i$ se změní na $\mu_Y = \mathsf{E}\, g(X_i)$. Pokud neznáme rozdělení X_i, nemůžeme pak z μ_Y spočítat původní střední hodnotu μ_X, ledaže by g byla lineární funkce. Nechť je g rostoucí a ryze konkávní funkce, pak platí z Jensenovy nerovnosti (věta P.2.5) $\mu_Y < g(\mu_X)$ a zpětná transformace $g^{-1}(\mu_Y)$ dává hodnotu ostře menší než μ_X. U ryze konvexní funkce je tomu naopak.

Spočítáme-li tedy výběrový průměr $\overline{Y}_n$ z transformovaného náhodného výběru, bude konvergovat (v pravděpodobnosti) podle Věty 2.2(ii) k μ_Y. Zpětná transformace $g^{-1}(\overline{Y}_n)$ bude konvergovat (v pravděpodobnosti) k $g^{-1}(\mu_Y) \neq \mu_X$. Obecně nelze nalézt funkci h takovou, aby $h(\overline{Y}_n)$ konvergovalo k μ_X. Zajímá-li nás konkrétní hodnota μ_X, nemůžeme tedy data transformovat. Podobné je to s rozptylem a vyššími momenty: po transformaci už obvykle nezjistíme, jaký byl rozptyl původních pozorování.

Příklad. Nechť $X_i \sim \mathsf{LN}(\mu, \sigma^2)$. Potom pro $g(x) = \log x$ platí, že $Y_i = g(X_i) \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. Tedy

$$g^{-1}(\overline{Y}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mathrm{e}^{\mathsf{E}\, Y_i} = \mathrm{e}^{\mu} < \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2} = \mathsf{E}\, X_i.$$

Některé jiné parametry však tento problém nemají. Například medián nebo kterýkoli jiný kvantil lze snadno získat zpětnou transformací: Nechť m_X je medián X_i a m_Y je medián Y_i, nechť g je ryze rostoucí funkce. Pak platí $m_Y = g(m_X)$, tj. m_X lze identifikovat zpětnou transformací $g^{-1}(m_Y)$.

Pořadí jsou invariantní vůči ryze rostoucím transformacím, takže statistiky závisející pouze na pořadích nabývají stejné hodnoty, ať už jsou počítány z původního nebo transformovaného náhodného výběru.

2.4.3 Transformace stabilizující (asymptotický) rozptyl

Jinou motivací pro použití transformace může být snaha stabilizovat (asymptotický) rozptyl. Mějme posloupnost náhodných veličin T_n, které splňují, že

$$\sqrt{n}(T_n - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma^2(\mu)).$$

Rozptyl $\sigma^2(\mu)$ asymptotického normálního rozdělení se někdy nazývá také asymptotický rozptyl* posloupnosti $\sqrt{n}(T_n - \mu)$.

Jak uvidíme později, pro inferenci (testování, intervaly spolehlivosti) o parametru μ je zpravidla dobré, pokud asymptotický rozptyl již nezávisí na parametru μ.

Nechť tedy g je nějaká reálná funkce, která je definovaná a diferencovatelná na okolí bodu μ. Potom pomocí Δ-metody (Tvzení 1.7) dostáváme, že

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\mu)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, [g'(\mu)[^2\sigma^2(\mu)).$$

Pokud tedy budeme volit

$$g(x) = c \int \frac{1}{\sigma(x)}\, dx, \tag{2.8}$$

potom $g'(\mu) = \frac{c}{\sigma(\mu)}$ a tudíž

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\mu)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, c^2)$$

a vliv μ na asymptotický rozptyl bude eliminován.

Příklad. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení $\mathsf{Po}(\lambda)$. Potom statistika $T_n = \overline{X}_n$ dle centrální limitní věty (tvrzení 1.6) splňuje

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \lambda).$$

Tedy $\sigma(x) = \sqrt{x}$ a tudíž $g(x) = \int \frac{1}{\sigma(x)}\, dx = \int x^{-1/2}\, dx = 2\sqrt{x}$ a dostáváme, že

$$\sqrt{n}\left(2\sqrt{\overline{X}_n} - 2\sqrt{\lambda}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, 1).$$

Poznámka. Podobná myšlenka se někdy využívá i pro samostatná pozorování. Nechť platí $\mathsf{E}\, X_i = \lambda$ a $\mathsf{var}\, X_i = \sigma^2(\lambda)$. Potom doufáme, že po přechodu k transformaci $Y_i = g(X_i)$, kde g se spočte pomocí (2.8), budou mít pozorování Y_i rozdělení bližší normálnímu. Tedy např. pro $X_i \sim \mathsf{Po}(\lambda)$ se často pracuje s $Y_i = \sqrt{X_i}$.

2.4.4 Standardizace

Speciálním druhem transformace je tzv. *standardizace*. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ a spočítáme $\overline{X}_n$ a S_n^2. Potom definujeme náhodné veličiny $Z_1, \ldots, Z_n$ vztahem

$$Z_i = \frac{X_i - \overline{X}_n}{S_n}.$$

Tyto veličiny mají výběrový průměr 0 a výběrový rozptyl 1, ale nepředstavují náhodný výběr, neboť nejsou nezávislé. Jelikož však $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\, X_i$ a $S_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \sqrt{\mathsf{var}\, X_i}$ pro $n \to \infty$, tak při dostatečně velkém počtu pozorování se $Z_1, \ldots, Z_n$ chovají téměř jako nezávislé veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. V mnoha případě lze ukázat, že závislost vzniklou tím, že jsme neznámé $\mathsf{E}\, X_i$ a $\sqrt{\mathsf{var}\, X_i}$ nahradili jejich výběrovými protějšky (tj. $\overline{X}_n$ a S_n) lze zanedbat.

Standardizace se používá tehdy, pokud se chceme zbavit prvních dvou momentů a soustředit se na jiné aspekty rozdělení F_X (viz např. výběrový korelační koeficient v Kapitole 10.1).

* Angl. *asymptotic variance*

3 Odhadování parametrů

3.1 Bodový odhad

3.1.1 Definice bodového odhadu

Máme náhodný výběr $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$, model $\mathcal{F}$ a parametr $\theta = t(F) \in \mathbb{R}$ pro $F \in \mathcal{F}$, který chceme v daném modelu odhadnout. Nechť $F_X \in \mathcal{F}$ je skutečné rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{X}_i$ a $\theta_X \equiv t(F_X)$ je skutečná hodnota hledaného parametru.

Definice 3.1 *Odhadem parametru* $\theta_X \equiv t(F_X)$ rozumíme libovolnou měřitelnou funkci dat $\widehat{\theta}_n \equiv T_n(\boldsymbol{X}) \equiv T_n(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$.[*]

Poznámka. Odhad je statistika ve smyslu definice 2.3. Odhad nesmí záviset na neznámých parametrech.

3.1.2 Vlastnosti odhadů

Definice 3.2 (Nestrannost a konsistence) Mějme náhodný výběr $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ z rozdělení $F_X \in \mathcal{F}$ a odhad $\widehat{\theta}_n \equiv T_n(\boldsymbol{X})$ parametru $\theta_X \equiv t(F_X)$.

(i) Řekneme, že odhad $\widehat{\theta}_n$ je *nestranný odhad*[†] parametru θ_X v modelu $\mathcal{F}$, právě když $\mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n = \theta_X$ pro každé n (pro něž je odhad definován) a pro každé rozdělení $F_X \in \mathcal{F}$.

(ii) Řekneme, že odhad $\widehat{\theta}_n$ je *konsistentní odhad*[‡] parametru θ_X v modelu $\mathcal{F}$, právě když $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \theta_X$ při $n \to \infty$ pro každé rozdělení $F_X \in \mathcal{F}$.

Poznámka.

- Vlastnosti odhadů musíme zkoumat v kontextu daného modelu. Snadno se může stát, že odhad $\widehat{\theta}_n$ je nestranný a konsistentní v nějakém modelu $\mathcal{F}$, ale v jiném modelu $\mathcal{F}'$ tyto vlastnosti nemá.
- Nestrannost má platit pro každý počet pozorování n, pro nějž je odhad definován (např. u výběrového rozptylu pro $n \geq 2$). Nestrannost ale nezaručuje, že se odhad při zvětšujícím se rozsahu výběru přibližuje k hledanému parametru. Pro některé modely neexistují rozumné (nebo vůbec žádné) nestranné odhady.
- Konsistence je asymptotická vlastnost, která nic neříká o chování odhadu při konečném n. (Příklad: $\widehat{\theta}_n = 21{,}5$ pro $n \leq 10^{10}$, $\widehat{\theta}_n = \overline{X}_n$ pro $n > 10^{10}$ je konsistentní odhad $\theta_X = \mathsf{E}\,X_i$.)
- Námi definovaná konzistence se někdy také nazývá *slabá konzistence*[§]. Odhad se pak nazývá *silně konzistentní*[¶], pokud platí $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{sj}} \theta_X$.

[*] Angl. *estimator, estimate* [†] Angl. *unbiased estimator* [‡] Angl. *consistent estimator* [§] Angl. *weak consistency* [¶] Angl. *strong consistency*

- Odhady, které nejsou nestranné, ale jsou konsistentní, se ve statistice běžně používají. Odhady, které nejsou konsistentní, nepoužíváme, neboť odhadují „něco jiného“ nebo se s rostoucím rozsahem výběru „nezpřesňují“.

Příklady.

1. *Odhad parametru* $\theta_X = \mathsf{E}\, X_i$ *v modelu* $\mathcal{F} = \mathcal{L}^1$*:*
   - Průměr $\overline{X}_n$ je nestranný a konsistentní odhad θ_X [plyne z věty 2.2, (i) a (ii)].
   - Odhad $\widehat{\theta}_n = X_1$ je nestranný odhad θ_X, ale není konsistentní.
2. *Odhad parametru* $\theta_X = \mathsf{var}\, X_i$ *v modelu* $\mathcal{F} = \mathcal{L}^2$*:*
   - Výběrový rozptyl S_n^2 je nestranný a konsistentní odhad θ_X [plyne z věty 2.6, (i) a (ii)].
   - Odhad $\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ je konsistentní odhad θ_X, ale není nestranný.
3. *Odhad parametru* $\theta_X = \mathsf{P}[X_i = 0]$ *v modelu* $\mathcal{F} = \{\mathsf{Po}(\lambda), \lambda > 0\}$*:*
   - Odhad $\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{0\}}(X_i)$ je nestranný a konsistentní odhad θ_X (a to dokonce v modelu všech diskrétních rozdělení).
   - Odhad $\widetilde{\theta}_n = (\frac{n-1}{n})^{\sum_{i=1}^n X_i}$ je také nestranný a konsistentní odhad θ_X (v modelu $\mathcal{F}$ nikoliv však v modelu všech diskrétních rozdělení).
4. *Odhad parametru* $\theta_X = \mathrm{e}^{-2\lambda_X}$ *v modelu* $\mathcal{F} = \{\mathsf{Po}(\lambda), \lambda > 0\}$ *pro* $n = 1$*:*
   Jediný nestranný odhad jest $\widehat{\theta} = (-1)^{X_1}$, jeho možné hodnoty jsou -1 a 1. Hledaný parametr $\mathrm{e}^{-2\lambda_X}$ však nabývá pouze hodnot z intervalu $(0, 1)$.

Definice 3.3 (Vychýlení) Nechť odhad $\widehat{\theta}_n \equiv T_n(\boldsymbol{X})$ parametru θ_X má konečnou střední hodnotu. Rozdíl $\mathsf{E}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)$ nazýváme *vychýlením*[*] odhadu $\widehat{\theta}_n$.

Definice 3.4 Nechť odhad $\widehat{\theta}_n \equiv T_n(\boldsymbol{X})$ parametru θ_X má konečný rozptyl.

(i) Výraz
$$\mathrm{MSE}(\widehat{\theta}_n) = \mathsf{E}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)^2$$
nazýváme *střední čtvercovou chybou* odhadu $\widehat{\theta}_n$.[†]

(ii) Výraz
$$\mathrm{SE}(\widehat{\theta}_n) = \sqrt{\mathsf{var}\,(\widehat{\theta}_n)}$$
nazýváme *směrodatnou chybou*[‡] odhadu $\widehat{\theta}_n$.

Poznámka.

- Pozor na jemné rozdíly v terminologii. Pojem *směrodatná odchylka* (standard deviation, SD) obvykle znamená odmocninu z rozptylu jednoho pozorování náhodného výběru, tj. $\sqrt{\mathsf{var}\, X_i}$. Pojem *směrodatná chyba* (standard error, SE) obvykle znamená odmocninu z rozptylu nějakého odhadu spočítaného z celého náhodného výběru. Někteří autoři však pojmem *směrodatná chyba* rozumí, $\mathrm{SE}(\widehat{\theta}_n) = \sqrt{\widehat{\mathsf{var}}\,(\widehat{\theta}_n)}$, kde $\widehat{\mathsf{var}}\,(\widehat{\theta}_n)$ je odhad $\mathsf{var}\,(\widehat{\theta}_n)$

[*] Angl. *bias* [†] Angl. *mean square error, MSE* [‡] Angl. *standard error, SE*

- Střední čtvercová chyba i směrodatná chyba jsou míry *přesnosti* odhadu. Směrodatná chyba do přesnosti nezahrnuje vychýlení, zatímco střední čtvercová chyba ano.
- Platí, že střední čtvercová chyba lze rozložit na rozptyl a kvadrát vychýlení, tj. :

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\theta}_n) = \mathsf{var}\,(\widehat{\theta}_n) + [\mathsf{E}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)]^2 = \mathrm{SE}^2(\widehat{\theta}_n) + [\mathsf{E}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)]^2.$$

  Důkaz výše uvedeného rozkladu plyne z toho, že

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\widehat{\theta}_n) &= \mathsf{E}\,(\widehat{\theta}_n - \mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n + \mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n - \theta_X)^2 \\ &= \mathsf{E}\,(\widehat{\theta}_n - \mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n)^2 + 2\,\mathsf{E}\,(\widehat{\theta}_n - \mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n)\mathsf{E}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X) + [\mathsf{E}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)]^2 \\ &= \mathsf{var}\,(\widehat{\theta}_n) + 0 + [\mathsf{E}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)]^2.\end{aligned}$$

- Střední čtvercová chyba je jedno z nejvhodnějších kritérií pro porovnávání odhadů. Máme-li několik různých odhadů téhož parametru v tomtéž modelu, snažíme se mezi nimi najít ten, který má nejmenší MSE. Tj. v případě nestranných odhadů vybíráme odhad s nejmenším rozptylem.
- MSE často nelze spočítat. V mnoha případech se však lze rozhodovat na základě asymptotického rozptylu odhadů. Tj. předpokládejme, že máme dva odhady $\widehat{\theta}_n$ a $\widetilde{\theta}_n$, které splňují

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma_1^2), \qquad \sqrt{n}\,(\widetilde{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma_2^2).$$

  Potom (pro velké rozsahy výběrů) preferujeme odhad $\widehat{\theta}_n$ pokud $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ nebo naopak odhad $\widetilde{\theta}_n$ pokud $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Zde končí předn. 6 (19.10.)

Příklad. *Odhad parametru* $\sigma_X^2 = \mathsf{var}\,X_i$ *v modelu* $\mathcal{F} = \{\mathsf{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$. Platí: $\mathrm{MSE}(S_n^2) > \mathrm{MSE}(\widehat{\sigma}_n^2)$.

Věta 3.1 Nechť $\widehat{\theta}_n$ je odhad parametru θ_X, pro nějž platí $\mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta_X$ (vychýlení konverguje k nule) a $\mathsf{var}\,(\widehat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pro všechna $F_X \in \mathcal{F}$. Pak je $\widehat{\theta}_n$ konsistentní odhad θ_X.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom s využitím předpokladů věty a Čebyševovy nerovnosti (Důsledek Věty P.2.6):

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(|\widehat{\theta}_n - \theta_X| > \varepsilon) &= \mathsf{P}(|\widehat{\theta}_n - \mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n + \mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n - \theta_X| > \varepsilon) \\ &\le \mathsf{P}(|\widehat{\theta}_n - \mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n| > \tfrac{\varepsilon}{2}) + \mathsf{P}(|\mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n - \theta_X| > \tfrac{\varepsilon}{2}) \\ &\le \frac{\mathsf{var}\,(\widehat{\theta}_n)}{(\frac{\varepsilon}{2})^2} + \mathsf{P}(|\mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n - \theta_X| > \tfrac{\varepsilon}{2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

□

Poznámka.

- Opačná implikace neplatí. Existují běžně používané konsistentní odhady, pro něž platí $\mathsf{E}\,|\widehat{\theta}_n| = \infty$ pro každé konečné n.
- Věta 3.1 je šikovná v situacích, kdy máme k dispozici (či lze snadno spočítat) vychýlení a rozptyl odhadu $\widehat{\theta}_n$. Pokud však můžeme psát $\widehat{\theta}_n = g(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{X}_i)$ (tj. jako transformaci výběrového průměru), pak lze konzistence vyšetřovat jednodušeji kombinací zákona velkých čísel (tvrzení 1.5) a věty o spojité transformaci (tvrzení 1.2).

Příklad. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení $\mathsf{Alt}(p_X)$. Uvažujte $\widehat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$ jako odhad parametru $\theta_X = \frac{1}{p_X}$. Ukažte, že přestože $\mathsf{E}\,\widehat{\theta}_n = \infty$, tak $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \theta_X$.

3.2 Volba parametru

Parametr $\theta = t(F)$, který se snažíme odhadovat, může být v principu cokoli. Ne všechny parametry však dávají smysl v kontextu daného praktického problému, který řešíme. Musíme tedy rozlišovat, které parametry pro daný problém má smysl odhadovat a které ne. To záleží na významu hodnot měřených veličin, na tom, jak byly získány, zpracovány atd. Statistické metody, kterými se budeme zabývat, budeme rozlišovat podle toho, pro jaký typ měření jsou určeny. Přitom budeme uvažovat následující typy dat, neboli *škály měření*[*].

3.2.1 Kvantitativní data

Náhodnou veličinu X nazveme *kvantitativní*[†], pokud její hodnoty mají konkrétní numerický význam (např. počet, procento, délka, objem, hmotnost, úroková míra, koncentrace látky, energie, teplota, doba trvání, velikost úhlu, zeměpisná šířka, kalendářní rok). U kvantitativních veličin existuje smysluplné uspořádání jejich hodnot (teplota 10 °C je vyšší než −11,4 °C) a rozdíly jejich hodnot mají reálnou interpretaci. Kvantitativní veličiny mohou být jak diskrétní tak spojité.

Kvantitativní veličiny můžeme dále dělit na dvě podskupiny: *intervalové* a *poměrové*. **Poměrové veličiny** jsou typicky nezáporné s jasně definovanou nulovou hodnotou a interpretovatelnými podíly. Například hmotnost 0 kg je jednoznačně daná a hmotnost 20 kg je čtyřikrát více než 5 kg. Příklady poměrových veličin jsou počet, délka, objem, hmotnost, úroková míra, koncentrace látky, energie, doba trvání, teplota měřená v Kelvinech. **Intervalové veličiny** jsou kvantitativní veličiny, které nejsou poměrové, to jest nemají pevně definovanou nulu nebo nemají interpretovatelné podíly. Například směr daný azimutem je intervalová veličina, neboť azimut 360° není šestkrát větší než 60°. Podobně teplota měřená v °C je intervalová veličina neboť 16 °C není čtyřikrát vyšší teplota než 4 °C. Kalendářní rok je také intervalová veličina, protože nemá smysl počítat podíl letošního roku a roku vašeho narození.

3.2.2 Kategoriální data

Náhodnou veličinu X nazveme *kategoriální*[‡], pokud její hodnoty kódují příslušnost (neboli *klasifikaci*) subjektu do určité kategorie, neboli jedné z několika disjunktních množin. Kategoriální veličiny jsou vždy diskrétní a mají konečný počet K možných hodnot, obvykle $1, \ldots, K$ nebo $0, \ldots, K-1$. Hodnoty kategoriálních veličin nemají přímou numerickou interpretaci, slouží pouze k rozlišení konečného počtu možných stavů. Jednotlivým stavům říkáme *úrovně*[§] nebo *kategorie*.

Kategoriální veličiny dále dělíme na *nominální*[¶] a *ordinální*[‖]. U **nominálních veličin** neexistuje ani žádné uspořádání jejich kategorií – nelze říci, že kategorie j předchází kategorii $j+1$. Příkladem nominální veličiny je třeba bydliště kategorizované jako kraj (1 = Praha, 2 = Středočeský kraj, …, 14 = Zlínský kraj) nebo sociální postavení (1 = nezletilý; 2 = student; 3

[*] Angl. *measurement scales* [†] Angl. *quantitative* [‡] Angl. *categorical* [§] Angl. *levels* [¶] Angl. *nominal* [‖] Angl. *ordinal*

= zaměstnanec; 4 = živnostník; 5 = nezaměstnaný; 6 = důchodce). **Ordinální veličiny** mají v nějakém smyslu uspořádáné kategorie, takže lze tvrdit, že kategorie j předchází kategorii $j+1$, nebo že je menší, horší apod. Příkladem ordinální veličiny je třeba odpověď na otázku s možnostmi 1 = ostře nesouhlasím, 2 = spíše nesouhlasím, 3 = nevím, 4 = spíše souhlasím, 5 = naprosto souhlasím. Jiný příklad je veličina nejvyšší dosažené vzdělání kódovaná jako 1 = nižší než základní; 2 = základní; 3 = učební obor; 4 = středoškolské s maturitou; 5 = bakalářské; 6 = magisterské; 7 = doktorské.

3.2.3 Binární data

Binární[*] veličiny jsou speciálním případem kategoriálních veličin, kde $K = 2$. Klasifikují tedy pozorování do jednoho ze dvou možných stavů. Jejich hodnoty se obvykle volí jako 0 vs. 1, případně 1 vs. 2. Příkladem binární veličiny je pravdivostní hodnota výroku (0 = pravda, 1 = lež), realizace náhodného jevu (0 = nenastal/neúspěch, 1 = nastal/úspěch) nebo pohlaví (1 = samec, 2 = samice).

3.2.4 Volba parametru v závislosti na typu dat

Pro nominální veličiny obecně nemá smysl uvažovat parametry jako $\mathsf{E}\,X$, $\mathsf{var}\,X$, distribuční funkci, kvantily, kovariance a korelace, zkrátka žádné charakteristiky, které závisejí na kódování a uspořádaní jednotlivých kategorií. Tyto parametry jsou sice řádně definovány, ale nemají žádnou praktickou interpretaci. Jediné parametry, které u nominálních veličin interpretaci mají, jsou pravděpodobnosti jednotlivých kategorií, čili $p_j = \mathsf{P}[X = j]$ pro všechny možné hodnoty j.

Výjimkou jsou binární veličiny. Znamená-li např. hodnota 0 neúspěch a hodnota 1 úspěch, pak $\mathsf{E}\,X = \mathsf{P}[X = 1]$, tedy střední hodnota je zároveň pravděpodobnost úspěchu.

U ordinálních veličin má díky uspořádání jejich hodnot smysl distribuční funkce. Často je možné přikládat jim intervalovou interpretaci (doktorské vzdělání je o dva stupně vyšší než bakalářské), ale obvykle jim nelze dávat poměrovou interpretaci (nelze říci, že magisterské vzdělání je dvakrát vyšší než učební obor). Ordinálním veličinám se někdy přiřazují neceločíselné hodnoty, tzv. *skóry*. Např. ordinální veličinu můžeme vytvořit tak, že vezmeme kvantitativní veličinu Z a seskupíme ji podle zvolených dělicích bodů, např. $X = 1$ pokud $Z \in \langle 0, 5)$, $X = 2$ pokud $Z \in \langle 5, 20)$, $X = 3$ pokud $Z \in \langle 20, 100)$ a $X = 4$ pokud $Z \geq 100$. Takové veličiny běžně vznikají v dotaznících, kde respondent dostane na výběr jednu ze čtyř možností namísto toho, aby musel zapsat přesné číslo. Výsledná veličina X je zjevně ordinální. Namísto hodnot $1, \ldots, 4$ bychom ale mohli za hodnoty X vzít prostředky intervalů, z kterých hodnoty X vznikly, tedy 2,5; 12,5 a 60 pro první tři intervaly. S posledním je zjevně potíž, neboť nemá pravý okraj – jeho skóru bychom museli nějak doplnit, například vzít 150. Takto zakódovaná veličina X je nejen ordinální, ale má některé vlastnosti veličiny kvantitativní.

Ordinální veličiny můžeme vždy analyzovat jako by byly nominální, ale často je možné na ně používat metody určené pro kvantitativní veličiny, odhadovat jejich střední hodnotu nebo počítat jejich rozdíly. Existují také speciální metody určené právě pro ordinální veličiny, s těmi se ale zatím nesetkáme.

[*] Angl. *binary*

Náš výklad statistických metod počínaje kapitolou 4 bude rozlišovat metody pro kvantitativní data, kde budeme pracovat s charakteristikami jako je střední hodnota, rozptyl, medián, distribuční funkce, kovariance apod., a metody pro nominální data, kde budeme pracovat s pravděpodobnostmi jednotlivých kategorií.

3.3 Momentová metoda

Momentová metoda* patří spolu s metodou maximální věrohodnosti k základním metodám odhadu parametrů.

Uvažujme nyní parametrický model: máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení s hustotou $f(x;\boldsymbol{\theta}_X)$ vůči nějaké σ-konečné míře μ, kde tvar funkce $f(\cdot;\cdot)$ je známý a $\boldsymbol{\theta}_X$ je neznámý (vektorový) parametr, jenž leží v parametrickém prostoru $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Pracujeme tedy s modelem

$$\mathcal{F} = \{\text{rozdělení s hustotou } f(x;\boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d\}$$

Cílem je odhadnout parametr $\boldsymbol{\theta}_X$. Využijeme toho, že máme k dispozici konsistentní odhady momentů a že momenty rozdělení X_i obvykle umíme vyjádřit jako funkce neznámých parametrů. Budeme předpokládat, že $\mathsf{E}\,|X_i|^d < \infty$.

Uvažujme nejprve $d = 1$. Předpokládejme, že $\mathsf{E}\,X_i = \tau(\theta_X)$, kde $\tau : \Theta \to \mathbb{R}$. Jelikož $\overline{X}_n$ je konsistentní odhad, tak se nabízí hledat *momentový odhad*† $\widehat{\theta}_n$ jako řešení *odhadovací rovnice*‡:

$$\overline{X}_n = \tau(\widehat{\theta}_n). \tag{3.1}$$

Pokud je funkce τ ryze monotonní, můžeme odhad vyjádřit jako $\widehat{\theta}_n = \tau^{-1}(\overline{X}_n)$ a odhadovaný parametr jako $\theta_X = \tau^{-1}(\mathsf{E}\,X_i)$.

Vlastnosti odhadu $\widehat{\theta}_n$:

- Je-li τ^{-1} spojitá funkce v bodě $\mathsf{E}\,X_i$, pak $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \theta_X$ (viz tvrzení 1.2).
- Má-li τ^{-1} spojitou derivaci na okolí bodu $\mathsf{E}\,X_i$, pak pomocí Δ-metody (tvrzení 1.7)

  $$\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, V(\theta_X)),$$

  kde

  $$V(\theta_X) = \left\{[\tau^{-1}(\mathsf{E}\,X_i)]'\right\}^2 \mathsf{var}\,X_i = \frac{\mathsf{var}\,X_i}{[\tau'(\tau^{-1}(\mathsf{E}\,X_i))]^2} = \frac{\mathsf{var}\,X_i}{[\tau'(\theta_X)]^2}. \tag{3.2}$$

  Povšimněme si, že ve vyjádření asymptotického rozptylu pomocí poslední rovnosti nepotřebujeme znát explicitní předpis pro τ^{-1}. Toto vyjádření se tedy hodí, pokud τ^{-1} je dána pouze implicitně a odhad $\widehat{\theta}_n$ hledáme pomocí numerických metod jako řešení odhadovací rovnice (3.1).
  V aplikacích asymptotický rozptyl $V(\theta_X)$ odhadujeme pomocí

  $$\widehat{V}_n = \left\{[\tau^{-1}(\overline{X}_n)]'\right\}^2 S_n^2 = \frac{S_n^2}{[\tau'(\widehat{\theta}_n)]^2},$$

  přičemž druhé vyjádření se opět hodí zejména v případě, kdy nemáme explicitní vyjádření pro τ^{-1}.

* Angl. *method of moments* † Angl. *moment estimator* ‡ Angl. *estimating equation*

Příklady.

1. $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{Po}(\lambda_X)$, $\mathsf{E}\, X_i = \lambda_X$. Momentovým odhadem parametru λ_X je $\widehat{\theta}_n = \overline{X}_n$.

2. $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{Geo}(p_X)$, $\mathsf{E}\, X_i = \frac{1-p_X}{p_X}$ a $\mathsf{var}\, X_i = \frac{1-p_X}{p_X^2}$. Tedy $\tau(x) = \frac{1-x}{x}$ a $\tau^{-1}(x) = \frac{1}{1+x}$. Momentovým odhadem parametru p_X je $\widehat{p}_n = \frac{1}{1+\overline{X}_n}$. Dále

$$\sqrt{n}\,(\widehat{p}_n - p_X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, p_X^2(1-p_X)),$$

   kde asymptotický rozptyl $p_X^2(1-p_X)$ plyne buď z první rovnosti v (3.2)

$$V(p_X) = \left\{\frac{-1}{(1+\mathsf{E}\, X_i)^2}\right\}^2 \mathsf{var}\, X_i = p_X^4\,\frac{1-p_X}{p_X^2}$$

   nebo alternativně také z třetí rovnosti v (3.2)

$$V(p_X) = \frac{\mathsf{var}\, X_i}{\{-\frac{1}{p_X^2}\}^2} = \frac{\frac{1-p_X}{p_X^2}}{\frac{1}{p_X^4}}.$$

3. $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{R}(0, \theta_X)$, $\mathsf{E}\, X_i = \theta_X/2$. Momentovým odhadem parametru θ_X je $\widehat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$. Platí $\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \theta_X^2/3)$.

Nyní rozšíříme momentovou metodu na $d = 2$ parametry.

Předpokládejme, že $(\mathsf{E}\, X_i, \mathsf{var}\, X_i)^\mathsf{T} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}_X)$, kde $\boldsymbol{\tau} : \Theta \to \mathbb{R}^2$. Pak se nabízí hledat odhad parametru $\boldsymbol{\theta}_X$ jako řešení soustavy odhadovacích rovnic (přesněji dvou rovnic o dvou neznámých)

$$(\overline{X}_n, S_n^2)^\mathsf{T} = \boldsymbol{\tau}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_X).$$

Pokud je funkce $\boldsymbol{\tau}$ ryze prostá, tak můžeme odhad vyjádřit jako $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_X = \boldsymbol{\tau}^{-1}(\overline{X}_n, S_n^2)$ a odhadovaný parametr jako $\boldsymbol{\theta}_X = \tau^{-1}(\mathsf{E}\, X_i, \mathsf{var}\, X_i)$.

Vlastnosti odhadu $\widehat{\theta}_n$:

- Víme, že $\overline{X}_n$ a S_n^2 jsou konsistentní odhady $\mathsf{E}\, X_i$ a $\mathsf{var}\, X_i$. Je-li tedy funkce $\boldsymbol{\tau}^{-1}$ spojitá v bodě $(\mathsf{E}\, X_i, \mathsf{var}\, X_i)$, pak $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \boldsymbol{\theta}_X$.

- Z věty 2.6, část (iv) víme, že pokud $\mathsf{E}\, X_i^4 < \infty$, pak $\overline{X}_n$ a S_n^2 jsou sdruženě asymptoticky normální. Má-li $\boldsymbol{\tau}^{-1}$ spojitou derivaci, pak podle Δ-metody má i $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ asymptoticky sdružené normální rozdělení s rozptylovou maticí, kterou lze spočítat pomocí věty 2.6 a Δ-metody.

Příklady.

4. $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z gama rozdělení s parametry a a p, tj. $\mathsf{E}\, X_i = \frac{p}{a}$ a $\mathsf{var}\, X_i = \frac{p}{a^2}$. Momentovou metodou dostaneme konsistentní a asymptoticky normální odhady

$$\widehat{a}_n = \frac{\overline{X}_n}{S_n^2} \quad \text{a} \quad \widehat{p}_n = \frac{\overline{X}_n^2}{S_n^2}.$$

5. $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{R}(\theta_1, \theta_2)$. Víme, že

$$\mathsf{E}\, X_i = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \qquad \text{a} \qquad \mathsf{var}\, X_i = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}.$$

Odhadovací soustava rovnic v tomto případě je

$$\overline{X}_n = \frac{\widehat{\theta}_{1n} + \widehat{\theta}_{2n}}{2}, \qquad \mathsf{var}\, X_i = \frac{(\widehat{\theta}_{2n} - \widehat{\theta}_{1n})^2}{12}.$$

Vyřešením této soustavy dostáváme

$$\widehat{\theta}_{1n} = \overline{X}_n - \sqrt{3S_n^2} \quad \text{a} \quad \widehat{\theta}_{2n} = \overline{X}_n + \sqrt{3S_n^2}.$$

Jelikož z Věty 2.6 víme,

$$\sqrt{n}\left[\begin{pmatrix}\overline{X}_n \\ S_n^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mu \\ \sigma^2\end{pmatrix}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_2(\mathbf{0}, \Sigma),$$

kde $\Sigma = \begin{pmatrix}\sigma^2 & \sigma^3\gamma_3 \\ \sigma^3\gamma_3 & \sigma^4(\gamma_4 - 1)\end{pmatrix}$ a $\gamma_3 = \frac{\mathsf{E}\,(X_i-\mu)^3}{\sigma^3}$, tak pomocí Δ-metody lze ukázat, že

$$\sqrt{n}\left[\begin{pmatrix}\widehat{\theta}_{1n} \\ \widehat{\theta}_{2n}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix}\right] \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}_2(\mathbf{0}, \mathbb{D}\Sigma\mathbb{D}^{\mathsf{T}}),$$

kde $\mathbb{D}$ je Jakobiho matice zobrazení $\tau^{-1}(x_1, x_2) = (x_1 - \sqrt{3x_2}, x_1 + \sqrt{3x_2})$ v bodě $(\mathsf{E}\, X_i, \mathsf{var}\, X_i)$. Tudíž odhad $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{\theta}_{1n}, \widehat{\theta}_{2n})$ je asymptoticky normální (a tedy dle Tvrzení 1.4 také konsistentní).

6. $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{B}(\alpha, \beta)$, tj. $\mathsf{E}\, X_i = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ a $\mathsf{var}\, X_i = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$. Momentovou metodou dostaneme konsistentní a asymptoticky normální odhady

$$\widehat{\alpha}_n = \overline{X}_n\left(\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{S_n^2} - 1\right) \quad \text{a} \quad \widehat{\beta}_n = (1-\overline{X}_n)\left(\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{S_n^2} - 1\right)$$

(odhady jsou smysluplné pouze pokud $S_n^2 < \overline{X}_n(1-\overline{X}_n)$).

Poznámka.

- Odhady získané momentovou metodou mívají větší asymptotický rozptyl než odhady metodou maximální věrohodnosti, která bude probírána v Matematické statistice 2.
- Momentová metoda se dá snadno zobecnit nejen na případ, že $d > 2$, ale i pokud pozorujeme náhodné vektory.
- Pomocí věty o implicitní funkci se dá dokázat, že stačí, aby τ měla spojitou derivaci na nějakém okolí bodu $(\mathsf{E}\, X_i, \mathsf{var}\, X_i)$

3.4 Intervalový odhad

3.4.1 Definice

Definice 3.5 Interval $B_n = B_n(\boldsymbol{X}) \subset \mathbb{R}$ se nazývá *intervalový odhad* parametru $\theta_X \in \mathbb{R}$ *o spolehlivosti* $1-\alpha$, právě když $\mathsf{P}[B_n \ni \theta_X] = 1-\alpha$. Interval B se nazývá *asymptotický intervalový odhad* parametru $\theta_X \in \mathbb{R}$ *o (přibližné) spolehlivosti* $1-\alpha$, právě když $\mathsf{P}[B_n \ni \theta_X] \to 1-\alpha$ pro $n \to \infty$.

Zde končí předn. 7 (24.10.)

Poznámka.

- Interval B_n je náhodný (spočítaný z dat), zatímco parametr θ_X je pevný. Výraz $B \ni \theta_X$ čteme „interval B pokrývá (skutečnou hodnotu) θ_X“.
- Intervalovému odhadu se běžně říká i jinak, např. *interval spolehlivosti s pravděpodobností pokrytí (s koeficientem spolehlivosti)* $1-\alpha$ nebo $(1-\alpha)100$*-procentní konfidenční interval* pro parametr θ_X.[*] Číslo $\alpha \in (0,1)$ je předem zvolené; obvykle se bere $\alpha = 0{,}05$ a počítají se 95procentní intervaly. Můžeme se však setkat i s intervaly, jež mají pokrytí 90 % či 99 %.
- Ne vždy je možné či vhodné počítat přesné intervaly spolehlivosti. Často se spokojujeme s intervaly asymptotickými, jejichž pokrytí se pro velké rozsahy výběru blíží k požadované hodnotě.
- Intervalové odhady zde definujeme pouze pro reálné parametry. Podobný koncept však lze zavést i pro vektorové parametry; hledáme náhodnou množinu B_n, která pokrývá skutečnou hodnotu se zadanou pravděpodobností. Této množině pak říkáme *oblast spolehlivosti*[†]. Tvar množiny B_n lze ale potom volit mnoha různými způsoby.

Poznámka. Rozeznáváme intervalové odhady oboustranné a jednostranné (levo- a pravostranné).

- Interval tvaru $(C_L(\boldsymbol{X}), C_U(\boldsymbol{X}))$, kde $C_L(\boldsymbol{X})$ a $C_U(\boldsymbol{X})$ jsou dvě náhodné veličiny splňující $\mathsf{P}[C_L(\boldsymbol{X}) < C_U(\boldsymbol{X})] = 1$, $C_L(\boldsymbol{X}) > -\infty$ a $C_U(\boldsymbol{X}) < \infty$ s.j., nazýváme oboustranný interval spolehlivosti. Obvykle jej sestrojujeme tak, aby platilo (alespoň asymptoticky)
$$\mathsf{P}[\theta_X \le C_L(\boldsymbol{X})] = \frac{\alpha}{2}, \quad \mathsf{P}[\theta_X \ge C_U(\boldsymbol{X})] = \frac{\alpha}{2}.$$
- Interval tvaru $(C_L(\boldsymbol{X}), \infty)$ nazýváme levostranný (dolní) interval spolehlivosti. Máme $\mathsf{P}[C_L(\boldsymbol{X}) < \theta_X] = 1-\alpha$.
- Interval tvaru $(-\infty, C_U(\boldsymbol{X}))$ nazýváme pravostranný (horní) interval spolehlivosti. Máme $\mathsf{P}[\theta_X < C_U(\boldsymbol{X})] = 1-\alpha$.

Příklad (střední hodnota normálního rozdělení se známým rozptylem)**.** Vezměme si problém intervalového odhadu střední hodnoty pro normálně rozdělená data se známým rozptylem.
Data: $X_1, \dots, X_n \sim F_X$
Model: $F_X \in \mathcal{F} = \{\mathsf{N}(\mu, \sigma_X^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma_X^2 \text{ známo}\}$
Odhadovaný parametr: $\theta_X = \mathsf{E}\, X_i \equiv \mu_X$
Postup:

[*] Angl. *confidence interval with coverage probability/confidence level* $1-\alpha$ [†] Angl. *confidence set*

1. Máme bodový odhad $\overline{X}_n$, který je nestranný a konsistentní pro μ_X. Víme, že $\overline{X}_n \sim \mathsf{N}(\mu_X, \sigma_X^2/n)$. Tudíž
$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_X}{\sigma_X} \sim \mathsf{N}(0,1).$$
2. Vyjdeme z rovnosti
$$\mathsf{P}\left[u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu_X)/\sigma_X < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha,$$
kde $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ je α-kvantil normovaného normálního rozdělení, a postupnými úpravami (s využitím symetrie hustoty $\mathsf{N}(0,1)$ kolem 0) dojdeme k
$$\mathsf{P}\left[\overline{X}_n - \sigma_X u_{1-\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{n} < \mu_X < \overline{X}_n + \sigma_X u_{1-\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{n}\right] = 1-\alpha.$$
3. Získali jsme oboustranný interval spolehlivosti (C_L, C_U). Jeho krajní body jsou
$$C_L(\boldsymbol{X}) = \overline{X}_n - \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \qquad C_U(\boldsymbol{X}) = \overline{X}_n + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{3.3}$$
Kvantily normovaného normálního rozdělení,které potřebujeme pro konstrukci intervalů spolehlivosti, jsou uvedeny v Tabulce 3.1.
Pro $\alpha = 0{,}05$ vezmeme kvantil $u_{0{,}975} \doteq 1{,}96$ a dostaneme 95% oboustranný interval spolehlivosti. To znamená, že tento interval pokrývá skutečnou střední hodnotu μ_X s pravděpodobností 0,95.
4. Jednostranný interval bychom získali drobnou modifikací kroku 2. Levostranný interval vyjde $(C_L(\boldsymbol{X}), \infty)$, kde $C_L(\boldsymbol{X}) = \overline{X}_n - \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}$. Pravostranný interval vyjde $(-\infty, C_U(\boldsymbol{X}))$, kde $C_U(\boldsymbol{X}) = \overline{X}_n + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}$. Jednostranné intervaly se od oboustranného liší hodnotou kvantilu normálního rozdělení (používají $u_{1-\alpha}$ namísto $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$). Pro 95% jednostranný interval spolehlivosti bychom vzali kvantil $u_{0{,}95} \doteq 1{,}645$.

Poznámka. Délka intervalu spolehlivosti:
- se zkracuje s rostoucím počtem pozorování n,
- roste s rostoucím rozptylem dat σ_X^2,
- roste s rostoucí pravděpodobností pokrytí $1-\alpha$.

Příklad. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, rozptyl σ_X^2 známe. Kolik pozorování potřebujeme, aby délka oboustranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ_X nepřekročila stanovenou mez $d > 0$?

Máme $2u_{1-\alpha/2}\sigma_X/\sqrt{n} \le d$. Tudíž potřebujeme alespoň $4u_{1-\alpha/2}^2\sigma_X^2/d^2$ pozorování. Za povšimnutí stojí, že pokud chceme zkrátit interval spolehlivosti na polovinu, tak musíme zvětšit rozsah výběru čtyřikrát.

Tabulka 3.1: Vybrané hodnoty kvantilů normovaného normálního rozdělení.

κ	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
$u_\kappa = \Phi^{-1}(\kappa)$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Lemma 3.2 (interval spolehlivosti po transformaci parametrů) Je-li (C_L, C_U) (asymptotický) interval spolehlivosti pro parametr θ_X s pravděpodobností pokrytí $1-\alpha$ a je-li ψ ryze rostoucí spojitá reálná funkce, pak $(\psi(C_L), \psi(C_U))$ je (asymptotický) interval spolehlivosti pro parametr $\psi(\theta_X)$ s pravděpodobností pokrytí $1-\alpha$.

Důkaz. Z předpokladu lemmatu vyplývá, že pro přesný interval spolehlivosti platí

$$1-\alpha = \mathsf{P}[C_L(\boldsymbol{X}) < \theta_X < C_U(\boldsymbol{X})] = \mathsf{P}[\psi(C_L(\boldsymbol{X})) < \psi(\theta_X) < \psi(C_U(\boldsymbol{X}))].$$

Analogicky pro asymptotické intervaly spolehlivosti. □

3.4.2 Konstrukce intervalových odhadů

Nechť $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$, kde $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení $F_X \in \mathcal{F}$. Odhadujeme parametr $\theta_X = t(F_X) \in \mathbb{R}$. Popišme si stručně obecný postup při konstrukci oboustranných intervalových odhadů pro θ_X.

1. Nalezneme funkci $\varphi(\boldsymbol{x}, \theta_X)$ takovou, že φ je prostá a spojitá funkce v argumentu θ_X pro každé $\boldsymbol{x}$ a rozdělení náhodné veličiny $Z_n \equiv \varphi(\boldsymbol{X}, \theta_X)$ je známé alespoň asymptoticky (nezávisí ani na θ_X ani na jiných neznámých parametrech). Náhodná veličina Z_n se nazývá *pivotální*. Při konstrukci funkce φ můžeme vyjít např. z bodového odhadu parametru θ_X, jehož rozdělení většinou známe alespoň asymptoticky. Označíme F_Z (přesnou či asymptotickou) distribuční funkci Z_n a $c_\alpha = F_Z^{-1}(\alpha)$ budiž α-kvantil rozdělení F_Z.

2. Vyjdeme z rovnosti

   $$\mathsf{P}(c_{\alpha/2} < \varphi(\boldsymbol{X}, \theta_X) < c_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha \quad (\text{nebo } \to 1-\alpha)$$

   a „osamostatníme“ θ_X. Za tímto účelem potřebujeme zinvertovat $\varphi(\boldsymbol{x}, \theta)$ jakožto funkci argumentu θ při pevném $\boldsymbol{x}$. Tj. nechť existuje $\bar{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ taková, že

   $$\varphi(\boldsymbol{x}, \bar{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)) = t \quad \text{a} \quad \bar{\varphi}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}, \theta)) = \theta$$

   pro všechna $\boldsymbol{x}$, t a θ. Jelikož funkce $\bar{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ je zpravidla klesající funkcí druhého argumentu t, tak dostáváme

   $$\mathsf{P}(\bar{\varphi}(\boldsymbol{X}, c_{1-\alpha/2}) < \theta_X < \bar{\varphi}(\boldsymbol{X}, c_{\alpha/2})) = 1-\alpha.$$

3. Získali jsme (asymptotickou) interval spolehlivosti $(C_L(\boldsymbol{X}), C_U(\boldsymbol{X}))$ s pravděpodobností pokrytí $1-\alpha$, kde $C_L(\boldsymbol{X}) = \bar{\varphi}(\boldsymbol{X}, c_{1-\alpha/2})$ a $C_U(\boldsymbol{X}) = \bar{\varphi}(\boldsymbol{X}, c_{\alpha/2})$.

Příklad (rozptyl a směrodatná odchylka normálního rozdělení)**.** Vezměme si problém intervalového odhadu směrodatné odchylky v normálním rozdělení.

Data: $X_1, \ldots, X_n \sim F_X$
Model: $F_X \in \mathcal{F} = \{\mathsf{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$
Odhadovaný parametr: $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{var} X_i}$
Postup:

Zabývejme se nejprve rozptylem σ_X^2. Jeho nestranný a konsistentní odhad je S_n^2. Z věty 2.8, část (i), víme, že

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_X^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Vezmeme tedy $Z_n = (n-1)S_n^2/\sigma_X^2$, $F_Z = \chi_{n-1}^2$ a $c_\alpha = \chi_{n-1}^2(\alpha)$, tj. α-kvantil rozdělení χ_{n-1}^2 (viz Tabulka 3.2).

Vyjdeme z rovnosti

$$\mathsf{P}\left[\chi_{n-1}^2(\alpha/2) < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_X^2} < \chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)\right] = 1-\alpha$$

a postupnými úpravami dojdeme k

$$\mathsf{P}\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)} < \sigma_X^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}\right] = 1-\alpha.$$

Získali jsme interval spolehlivosti

$$\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}\right) \tag{3.4}$$

pro rozptyl σ_X^2 s pravděpodobností pokrytí $1-\alpha$.

Interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku σ_X získáme aplikováním odmocniny na krajní body intervalu pro rozptyl

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\,S_n}{\sqrt{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)}}, \frac{\sqrt{n-1}\,S_n}{\sqrt{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}}\right),$$

viz také Lemma 3.2 (odmocnina je rostoucí a spojitá funkce na $(0,\infty)$).

Příklad (střední hodnota normálního rozdělení s neznámým rozptylem)**.** Vezměme si problém intervalového odhadu střední hodnoty pro normálně rozdělená data s neznámým rozptylem.

Tabulka 3.2: Vybrané hodnoty kvantilů $\chi_f^2(\kappa)$ rozdělení χ^2 s f stupni volnosti.

				κ				
f	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
5	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086
10	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209
15	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578
25	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314
100	70,065	74,222	77,929	82,358	118,498	124,342	129,561	135,807

Tabulka 3.3: Vybrané hodnoty kvantilů $t_f(\kappa)$ rozdělení t s f stupni volnosti.

	κ				
f	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Data: $X_1, \ldots, X_n \sim F_X$
Model: $F_X \in \mathcal{F} = \{\mathsf{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$
Odhadovaný parametr: $\theta_X = \mathsf{E}\, X_i \equiv \mu_X$
Postup:

Odhad $\overline{X}_n$ je nestranný a konsistentní pro μ_X, odhad S_n^2 je nestranný a konsistentní pro $\sigma_X^2 \equiv \mathsf{var}\, X_i$. Z věty 2.10 víme, že

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_X}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

Vezmeme tedy T_n jako pivotální náhodnou veličinu, F_Z je distribuční funkce rozdělení t_{n-1} a $c_\alpha = t_{n-1}(\alpha)$ (α-kvantil rozdělení t_{n-1}). Vybrané kvantily t rozdělení jsou uvedeny v Tabulce 3.3. Jak je vidět, už pro $n - 1 = 25$ jsou jen o málo větší než kvantily normovaného normálního rozdělení, k nimž konvergují při počtu stupňů volnosti rostoucím nade všechny meze. Větší hodnoty t kvantilů proti kvantilům normovaného normálního rozdělení používaným v úvodním příkladě odrážejí zvýšenou variabilitu pivotální statistiky způsobenou neznalostí skutečného rozptylu.

Vyjdeme z rovnosti

$$\mathsf{P}\left[t_{n-1}(\tfrac{\alpha}{2}) < \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_X)/S_n < t_{n-1}(1-\tfrac{\alpha}{2})\right] = 1 - \alpha$$

a stejným postupem jako u normálního rozdělení se známým rozptylem dojdeme k intervalu

$$\left(\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\tfrac{\alpha}{2}),\ \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\tfrac{\alpha}{2})\right), \tag{3.5}$$

který má pravděpodobnost pokrytí přesně $1 - \alpha$.

Příklad (střední hodnota libovolného rozdělení s konečným rozptylem)**.** Vezměme si problém intervalového odhadu střední hodnoty bez předpokladu normality dat.
Data: $X_1, \ldots, X_n \sim F_X$
Model: $F_X \in \mathcal{F} = \mathcal{L}_+^2$ (všechna rozdělení s konečným a nenulovým rozptylem)
Odhadovaný parametr: $\theta_X = \mathsf{E}\, X_i \equiv \mu_X$

Postup:

Odhad $\overline{X}_n$ je nestranný a konsistentní pro μ_X, odhad S_n^2 je nestranný a konsistentní pro $\sigma_X^2 \equiv \mathsf{var}\, X_i$. Z věty 2.9 víme, že

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_X}{S_n} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Vezmeme tedy T_n jako pivotální statistiku.

Vyjdeme z limitního vztahu (zdůvodněného konvergencí v distribuci pivotální veličiny)

$$\mathsf{P}\left[u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_X)/S_n < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha.$$

Tedy asymptotický interval spolehlivosti by byl

$$\left(\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,u_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{3.6}$$

Jelikož pro $n \to \infty$ kvantil $t_{n-1}(\alpha)$ konverguje k u_α (pro libovolné $0 < \alpha < 1$), tak máme, že také interval (3.5), který byl přesným intervalem spolehlivosti pro μ_X u výběru z normálního rozdělení, je zároveň asymptotickým intervalem spolehlivosti pro μ_X pro data pocházející z jakéhokoli rozdělení s konečným nenulovým rozptylem.

Všimněme si, že $|t_n(\alpha)| > |u_\alpha|$, tudíž interval (3.5) je delší než interval (3.6). Z důvodu opatrnosti se tedy doporučuje používat spíše interval (3.5).

Příklad (alternativní rozdělení)**.** Ukažme si nyní jeden možný způsob odvození asymptotického intervalového odhadu pro pravděpodobnost úspěchu v alternativním rozdělení. (Několik dalších intervalových odhadů pro tento problém si ukážeme později.)

Data: $X_1, \ldots, X_n \sim F_X$
Model: $F_X \in \mathcal{F} = \{\mathsf{Alt}(p), p \in (0,1)\}$
Odhadovaný parametr: $p_X = \mathsf{E}\, X_i = \mathsf{P}[X_i = 1]$
Postup:

Jelikož odhadujeme pravděpodobnost, vyjdeme z empirické relativní četnosti $\widehat{p}_n = \overline{X}_n$, která je nestranným a konsistentním odhadem p (věta 2.3). Z centrální limitní věty (tvrzení P.7.11) víme, že $\sqrt{n}\,(\widehat{p}_n - p_X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, p_X(1-p_X))$. Tudíž

$$\sqrt{n}\,\frac{\widehat{p}_n - p_X}{\sqrt{p_X(1-p_X)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Levá strana je nelineární funkcí p_X, ale můžeme si ji zjednodušit. Z konsistence $\widehat{p}_n$ a věty o spojité transformaci (tvrzení P.7.3) víme, že

$$\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \sqrt{p_X(1-p_X)}.$$

Ze Sluckého věty (tvrzení P.7.6) dostaneme

$$\sqrt{n}\,\frac{\widehat{p}_n - p_X}{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}} = \frac{\sqrt{p_X(1-p_X)}}{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}}\,\sqrt{n}\,\frac{\widehat{p}_n - p_X}{\sqrt{p_X(1-p_X)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1). \tag{3.7}$$

Vezmeme tedy $Z_n = \sqrt{n}\,\frac{\widehat{p}_n - p_X}{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}}$, $F_Z = \Phi$ a $c_\alpha = u_\alpha$ (α-kvantil normovaného normálního rozdělení).

Vyjdeme z limitního vztahu

$$\mathsf{P}\left[-u_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n}\,\frac{\widehat{p}_n - p_X}{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha$$

a postupnými úpravami dojdeme k

$$\mathsf{P}\left[\widehat{p}_n - \frac{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}} < p_X < \widehat{p}_n + \frac{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha.$$

Získali jsme tedy interval

$$\left(\widehat{p}_n - \frac{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \widehat{p}_n + \frac{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right),$$

jehož pravděpodobnost pokrytí konverguje k $1-\alpha$ pro $n \to \infty$.

Zde končí předn. 8 (26.10.)

3.5 Empirické odhady a výběrové momenty

Mějme dán náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení F_X. Ukažme si, jak lze odhadnout některé charakteristiky rozdělení F_X.

3.5.1 Empirická distribuční funkce

Zabývejme se nejprve odhadováním celé distribuční funkce $F_X(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. Pracujeme s modelem, který zahrnuje veškerá rozdělení na $\mathbb{R}$, tj. na distribuční funkci F_X neklademe vůbec žádné podmínky.

Definice 3.6 Funkci $\widehat{F}_n(x) \overset{\mathsf{df}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i \le x\}$ nazýváme *empirická distribuční funkce*[*] náhodného výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Poznámka. Hodnota $\widehat{F}_n$ v bodě x je rovna počtu pozorování, která nepřekročí u, dělenému celkovým počtem pozorování. Funkce $\widehat{F}_n$ je neklesající, zprava spojitá, po částech konstantní, skáče v pozorovaných hodnotách veličin X_i, velikosti skoků jsou dány počtem pozorování rovných x děleným celkovým počtem pozorování. Empirická distribuční funkce má všechny vlastnosti distribuční funkce diskrétního rozdělení.

Pro pevné x je hodnota $\widehat{F}_n(x)$ vlastně relativní četnost jevu $[X_i \le x]$ spočítaná z n pozorování, přičemž pravděpodobnost tohoto jevu je $F_X(x)$. Z věty 2.3 rovnou dostaneme nejdůležitější vlastnosti empirické distribuční funkce.

Věta 3.3 (vlastnosti empirické distribuční funkce) Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí:
(i) $\mathsf{E}\,\widehat{F}_n(x) = F_X(x)$ (nestrannost), $\mathsf{var}\,(\widehat{F}_n(x)) = \frac{F_X(x)[1-F_X(x)]}{n}$;

[*] Angl. *empirical distribution function*

(ii) $\widehat{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} F_X(x)$ (bodová konsistence);

(iii) $\sqrt{n}\,[\widehat{F}_n(x) - F_X(x)] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, F_X(x)[1 - F_X(x)])$ (asymptotická normalita);

(iv) $n\widehat{F}_n(x) \sim \mathsf{Bi}(n, F_X(x))$;

(v) $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{F}_n(x) - F_X(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} 0$ (stejnoměrná konsistence).

Poznámka.

- Z bodu (iii) předchozí věty lze odvodit asymptotický interval spolehlivosti pro $F_X(x)$ stejně jako v případě parametru alternativního rozdělení (viz str. 44).
- Bod (v) se někdy nazývá Glivenkova-Cantelliho věta. Nelze jej odvodit z věty 2.3 ani jiných výsledků, které máme k dispozici. Bude dokázán na jedné z pokročilejších přednášek z teorie pravděpodobnosti.

3.5.2 Empirické odhady

Z empirické distribuční funkce lze odvodit odhady mnoha základních charakteristik rozdělení F_X. Nechť $\theta_X = t(F_X)$ je hledaný parametr. Umíme-li jej spočítat ze skutečné distribuční funkce F_X, můžeme jej stejným způsobem spočítat i z empirické distribuční funkce $\widehat{F}_n$. Dostaneme tak odhad $\widehat{\theta}_n \overset{\mathsf{df}}{=} t(\widehat{F}_n)$. Těmto odhadům říkáme *empirické odhady*. Uvidíme, že v řadě případů mají empirické odhady rozumné vlastnosti.

Ukažme si tento postup nejprve na příkladě empirického odhadu střední hodnoty. Máme

$$\mathsf{E}\, X_i = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_X(x).$$

Empirický odhad střední hodnoty získáme dosazením $\widehat{F}_n$ na místo neznámé funkce F_X. Dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, d\widehat{F}_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i \le x\}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\,\mathbb{1}\{X_i \le x\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

kde jsme využili toho, že $G(x) = \mathbb{1}\{X_i \le x\}$ je pro pevné X_i vlastně distribuční funkcí konstanty nabývající hodnoty X_i s pravděpodobností 1. Došli jsme tedy k tomu, že empirickým odhadem střední hodnoty je aritmetický průměr, o němž již víme, že je nestranný a konsistentní.

3.5.3 Empirické odhady momentů

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení F_X a h je měřitelná reálná funkce taková, že $\mathsf{E}\,|h(X_i)| < \infty$. Dá se snadno ověřit, že empirickým odhadem parametru $\mathsf{E}\, h(X_i)$ je průměr naměřených hodnot $h(X_i)$, tj. $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$. Tento odhad je nestranný a konsistentní.

Odvoďme si *empirický odhad rozptylu* $\sigma_X^2 = \mathsf{E}\, X_i^2 - (\mathsf{E}\, X_i)^2$. Víme, že empirickým odhadem $\mathsf{E}\, X_i$ je $\overline{X}_n$ a empirickým odhadem $\mathsf{E}\, X_i^2$ je $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Empirický odhad rozptylu tedy je

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Poznámka. Platí $S_n^2 = \frac{n}{n-1}\widehat{\sigma}_n^2$. Pro velká n je rozdíl mezi $\widehat{\sigma}_n^2$ a S_n^2 malý, neboť s pomocí věty 2.6(i)

$$\widehat{\sigma}_n^2 - S_n^2 = -\frac{S_n^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} 0.$$

Jak plyne z věty 2.6, výběrový rozptyl S_n^2 je nestranný a konsistentní odhad σ_X^2. Empirický odhad rozptylu $\widehat{\sigma}_n^2$ je konsistentní, ale není nestranný. Na druhou stranu z příkladu na straně 33 víme, že $\mathrm{MSE}(\widehat{\sigma}_n^2) < \mathrm{MSE}(S_n^2)$.

Podobně můžeme odvodit empirické odhady pro momenty vyšších řádů. *Empirické odhady necentrálních momentů* $\mu_k' = \mathsf{E}\, X_i^k$ jsou

$$\widehat{\mu}_k' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

Empirické odhady centrálních momentů $\mu_k = \mathsf{E}\,(X_i - \mathsf{E}\, X_i)^k$ jsou

$$\widehat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^k.$$

Empirické necentrální momenty jsou evidentně nestranné a konsistentní. Empirické centrální momenty jsou konsistentní, nikoli však obecně nestranné.

Empirický odhad šikmosti je

$$\widehat{\gamma}_3 = \frac{\widehat{\mu}_3}{(\widehat{\sigma}_n^2)^{3/2}},$$

empirický odhad špičatosti je

$$\widehat{\gamma}_4 = \frac{\widehat{\mu}_4}{\widehat{\sigma}_n^4}.$$

Oba jsou konsistentní (z věty o spojité transformaci, tvrz. P.7.3).

Cvičení. Dokažte, že pokud $\mathsf{E}\,|X_i|^k < \infty$, pak $\widehat{\mu}_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mu_k$.
Návod:

$$\widehat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{j}{k} X_i^k (-\overline{X}_n)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k}\binom{j}{k}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\Big)(-\overline{X}_n)^{k-j}.$$

3.5.4 Empirický odhad kvantilu

Nechť α je předem dané číslo z intervalu $(0, 1)$. Kvantilová funkce rozdělení F_X je definována jako $F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$; α-kvantilem rozdělení F_X rozumíme číslo $u_X(\alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$. Pro α-kvantil platí

$$\lim_{h\searrow 0} F_X(u_X(\alpha) - h) \leq \alpha \quad \text{a} \quad F_X(u_X(\alpha)) \geq \alpha.$$

Jako empirický odhad použijeme hodnotu α-kvantilu empirické distribuční funkce, tedy $\widehat{F}_n^{-1}(\alpha) = \inf\{x : \widehat{F}_n(x) \geq \alpha\}$.

Definice 3.7 (Výběrový kvantil) Pro $\alpha \in (0,1)$ definujeme *empirický (výběrový) α-kvantil*[*] jako $\widehat{u}_n(\alpha) = \widehat{F}_n^{-1}(\alpha)$.

Poznámka.

- Všimněme si, že $\widehat{u}_n(\alpha) = X_{(k_\alpha)}$, kde $k_\alpha = \alpha n$, pokud αn je celé číslo, a $k_\alpha = \lfloor \alpha n \rfloor + 1$ pokud αn není celé číslo. Jelikož nepředpokládáme spojitost rozdělení, tak pořádkové statistice $X_{(k_\alpha)}$ je třeba rozumět ve smyslu poznámky na straně 28.
- Pro $\alpha = 0.5$ dostaneme *výběrový medián*[†]: $\widehat{m}_n = X_{(\frac{n+1}{2})}$ pro n liché a $\widehat{m}_n = X_{(\frac{n}{2})}$ pro n sudé.
- Výběrový α-kvantil splňuje nerovnosti

$$\lim_{h \searrow 0} \widehat{F}_n(\widehat{u}_n(\alpha) - h) < \alpha \quad \text{a} \quad \widehat{F}_n(\widehat{u}_n(\alpha)) \geq \alpha,$$

  tj. alespoň $n\alpha$ pozorování je menší nebo rovno $\widehat{u}_n(\alpha)$ a zároveň pro všechna $h > 0$ je alespoň $n(1-\alpha)$ pozorování větší nebo rovno $\widehat{u}_n(\alpha) - h$.
- Existuje mnoho různých definic výběrového α-kvantilu (zpravidla jako nějaké lineární interpolace mezi body $X_{(k_\alpha - 1)}$, $X_{(k_\alpha)}$ a $X_{(k_\alpha + 1)}$). Např. pro sudá n se výběrový medián často definuje jako

$$\widehat{m}_n = \frac{X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}.$$

Zde končí předn. 9 (31.10.)

Následující lemma charakterizuje výběrový kvantil jako řešení minimalizačního problému (srovnej s Lemmatem 2.1).

Lemma 3.4 Nechť $\alpha \in (0,1)$. Pro výběrový α-kvantil $\widehat{u}_n(\alpha)$ platí

$$\widehat{u}_n(\alpha) = \arg\min_{c \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \varrho_\alpha(X_i - c),$$

kde $\varrho_\alpha(u) = \alpha\, u \mathbb{1}\{u \geq 0\} + (1-\alpha)(-u)\mathbb{1}\{u < 0\}$.

Všimněme si, že pro $\alpha = \frac{1}{2}$ dostáváme $\varrho_{1/2}(u) = \frac{1}{2}|u|$. Jelikož konstanta $\frac{1}{2}$ je pro optimalizační úlohu nepodstatná, tak pro výběrový medián platí

$$\widehat{m}_n = \arg\min_{c \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} |X_i - c|,$$

tj. $\widehat{m}_n$ minimalizuje součet absolutních odchylek.

Poznámka. Minimalizační problém z části (ii) lze psát jako úlohu lineárního programování ve tvaru

$$\arg\min_{c \in \mathbb{R}} \Big[-(1-\alpha) \sum_{i: X_i < c} (X_i - c) + \alpha \sum_{i: X_i \geq c} (X_i - c) \Big].$$

Zavedeme-li značení $U_i = (X_i - c)\mathbb{1}(X_i \geq c)$, $V_i = -(X_i - c)\mathbb{1}(X_i < c)$, $\boldsymbol{U} = (U_1, \ldots, U_n)^\top$, $\boldsymbol{V} = (V_1, \ldots, V_n)^\top$, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$, můžeme problém přepsat jako úlohu lineárního programování ve $(2n+1)$-dimenzionálním prostoru

$$\min_{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, c} \alpha \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{U} + (1-\alpha)\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{V}$$

[*] Angl. *empirical quantile, sample quantile* [†] Angl. *sample median*

při omezeních

$$c\mathbf{1}_n + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{V} = \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{U} \geq 0, \quad \boldsymbol{V} \geq 0.$$

Tento minimalizační problém samozřejmě nemusí mít právě jedno řešení. Minima může být dosaženo na celém intervalu hodnot.

Vlastnosti výběrového kvantilu budeme dokazovat pouze pro spojitá rozdělení s ostře rostoucí distribuční funkcí F_X a hustotou f_X.

Věta 3.5 Nechť $\alpha \in (0,1)$. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení, která má distribuční funkcí F_X spojitou a rostoucí na nějakém okolí bodu $u_X(\alpha)$.

(i) Potom $\widehat{u}_n(\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} u_X(\alpha)$.

(ii) Pokud navíc existuje hustota f_X, která je spojitá a nenulová v bodě $u_X(\alpha)$, pak

$$\sqrt{n}[\widehat{u}_n(\alpha) - u_X(\alpha)] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, V(\alpha)), \quad \text{kde} \quad V(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{f_X^2(u_X(\alpha))}.$$

Důkaz. Část (i): Nechť $\varepsilon > 0$. Potřebujeme ukázat, že

$$\mathsf{P}(|\widehat{u}_n(\alpha) - u_X(\alpha)| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

K tomu nám stačí ukázat, že

$$\mathsf{P}(\widehat{u}_n(\alpha) < u_X(\alpha) - \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{a zároveň} \quad \mathsf{P}(\widehat{u}_n(\alpha) > u_X(\alpha) + \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Počítejme tedy

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\widehat{u}_n(\alpha) < u_X(\alpha) - \varepsilon) &= \mathsf{P}(X_{(k_\alpha)} < u_X(\alpha) - \varepsilon) \\
&= \mathsf{P}\Big(\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i < u_X(\alpha) - \varepsilon\} \geq k_\alpha\Big) \\
&\leq \mathsf{P}\Big(\widehat{F}_n(u_X(\alpha) - \varepsilon) - F_X(u_X(\alpha) - \varepsilon) \geq \tfrac{k_\alpha}{n} - F_X(u_X(\alpha) - \varepsilon)\Big). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Z věty 3.3 nyní plyne, že

$$\widehat{F}_n(u_X(\alpha) - \varepsilon) - F_X(u_X(\alpha) - \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} 0, \qquad (3.9)$$

a zároveň z předpokladů dokazované věty

$$\tfrac{k_\alpha}{n} - F_X(u_X(\alpha) - \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha - F_X(u_X(\alpha) - \varepsilon) > 0. \qquad (3.10)$$

Kombinací (3.9) a (3.10) pak dostáváme, že pravá strana rovnosti (3.8) konverguje k nule, tudíž jsme dokázali, že $\mathsf{P}(\widehat{u}_n(\alpha) < u_X(\alpha) - \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Podobně se ukáže, že $\mathsf{P}(\widehat{u}_n(\alpha) > u_X(\alpha) + \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Část (ii):* Podobně jako v části (i) počítejme

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big(\sqrt{n}[\widehat{u}_n(\alpha) - u_X(\alpha)] \leq x\Big) &= \mathsf{P}\Big(\widehat{u}_n(\alpha) \leq u_X(\alpha) + \tfrac{x}{\sqrt{n}}\Big) \\
&= \mathsf{P}\Big(\widehat{F}_n(u_X(\alpha) + \tfrac{x}{\sqrt{n}}) - F_X(u_X(\alpha) + \tfrac{x}{\sqrt{n}}) \geq \tfrac{k_\alpha}{n} - F_X(u_X(\alpha) + \tfrac{x}{\sqrt{n}})\Big). \\
&= \mathsf{P}(Z_n \geq x_n),
\end{aligned}$$

* Tato část důkazu nedělána na přednášce.

kde

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}[\widehat{F}_n(u_X(\alpha) + \frac{x}{\sqrt{n}}) - F_X(u_X(\alpha) + \frac{x}{\sqrt{n}})]}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$$

a

$$x_n = \frac{\sqrt{n}[\frac{k_\alpha}{n} - F_X(u_X(\alpha) - \frac{x}{\sqrt{n}})]}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}.$$

Z centrální limitní věty pro trojúhelníková schéma (např. Věta 4.9 Dupač and Hušková, 1999) pak plyne, že $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} Z$, kde $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$. Dále z předpokladů věty dostáváme $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-x f_X(u_X(\alpha))}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$. Tedy celkem máme

$$\mathsf{P}\Big(\sqrt{n}[\widehat{u}_n(\alpha) - u_X(\alpha)] \le x\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathsf{P}\Big(Z \ge \tfrac{-x f_X(u_X(\alpha))}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\Big) = \mathsf{P}\Big(Z \le \tfrac{x f_X(u_X(\alpha))}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\Big),$$

což společně s definicí konvergence v distribuci implikuje tvrzení věty. □

Asymptotický rozptyl $V(\alpha)$ výběrového kvantilu se špatně odhaduje, protože nemáme k dispozici univerzálně použitelný a spolehlivý odhad hustoty. Za předpokladu, že F_X je spojitá v $u_X(\alpha)$ lze ke konstrukci intervalu spolehlivosti využít pořádkové statistiky.

Např. oboustranný interval spolehlivosti pro $u_X(\alpha)$ s pravděpodobností pokrytí $1-\beta$ hledáme ve tvaru $(X_{(k_L)}, X_{(k_U)})$. Pro určení čísel k_L a k_U si všimněme, že

$$\mathsf{P}\Big(X_{(k_L)} \ge u_X(\alpha)\Big) = \mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i < u_X(\alpha)\} \le k_L - 1\Big) = \mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n,\alpha) \le k_L - 1\Big),$$

$$\mathsf{P}\Big(X_{(k_U)} \le u_X(\alpha)\Big) = \mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i \le u_X(\alpha)\} \ge k_U\Big) = \mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n,\alpha) \ge k_U\Big).$$

Tedy čísla k_L a k_U můžeme určit pomocí binomického rozdělení jako nejvyšší a nejmenší možné přirozené číslo takové, aby

$$\mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n,\alpha) \le k_L - 1\Big) \le \tfrac{\beta}{2}, \qquad \mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n,\alpha) \ge k_U\Big) \le \tfrac{\beta}{2}.$$

V případě, že nemáme možnost pracovat přímo s binomickým rozdělením, tak můžeme využít normální aproximaci binomického rozdělení. V tomto případě je dobré si povšimnout, že

$$\mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n,\alpha) \le k_L - 1\Big) = \mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n,\alpha) < k_L\Big) \text{ a } \mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n,\alpha) \ge k_U\Big) = \mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n,\alpha) > k_U - 1\Big).$$

Proto jako „kompromis“ před normální aproximaci vycházíme z rovností

$$\mathsf{P}\Big(X_{(k_L)} \ge u_X(\alpha)\Big) = \mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n,\alpha) < k_L - \tfrac{1}{2}\Big), \qquad \mathsf{P}\Big(X_{(k_U)} \le u_X(\alpha)\Big) = \mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n,\alpha) > k_U - \tfrac{1}{2}\Big)$$

ze kterých odvodíme přibližné vzorce

$$k_L = \Big\lfloor \tfrac{1}{2} + n\alpha - u_{1-\frac{\beta}{2}}\sqrt{n\alpha(1-\alpha)} \Big\rfloor, \quad k_U = \Big\lceil \tfrac{1}{2} + n\alpha + u_{1-\frac{\beta}{2}}\sqrt{n\alpha(1-\alpha)} \Big\rceil.$$

„Kompromis“ popsaný výše se zpravidla nazývá *oprava na spojitost*[*]. Tato „oprava“ však nespočívá v tom, že bychom něco dělali spojitým, ale je to jistá opatrnost v případě, že diskrétní rozdělení (v tomto případě binomické) aproximuje spojitým rozdělením (v tomto případě normálním).

[*] Angl. *continuity correction*

Poznámka. Může se stát, že pro malé rozsahy výběrů n s α blízké nule nebo jedné je jedna s pravděpodobností $\mathsf{P}(\mathsf{Bi}(n,\alpha) = 0) > \frac{\beta}{2}$ resp. $\mathsf{P}(\mathsf{Bi}(n,\alpha) = n) > \frac{\beta}{2}$. V takovém případě volíme za dolní (resp. horní) mez intervalu spolehlivosti $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Cvičení. Ukažte, že pokud bychom vynechali předpoklad spojitosti distribuční funkce v odhadovaném kvantilu $u_X(\alpha)$, tak uzavřený interval $\langle X_{(k_L)}, X_{(k_U)}\rangle$ bude mít (pro dostatečně velké n) pravděpodobnost pokrytí alespoň $1-\beta$.

3.5.5 Empirické odhady pro náhodné vektory

Empirické odhady prvních dvou momentů můžeme snadno rozšířit na náhodné vektory. Nechť $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$ je náhodný výběr nezávislých k-rozměrných náhodných vektorů s rozdělením F_X. Jednotlivé složky vektoru $\boldsymbol{X}_i$ budeme značit X_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$. Dále označme

$$\boldsymbol{\mu} = \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i, \qquad \Sigma = \mathsf{var}\,\boldsymbol{X}_i.$$

Empirickým odhadem $\boldsymbol{\mu}$ je zřejmě vektor empirických odhadů jeho jednotlivých složek, čili k-rozměrný výběrový průměr

$$\overline{\boldsymbol{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i.$$

Empirický odhad rozptylové matice Σ bychom dostali z vyjádření

$$\Sigma = \mathsf{E}\,(\boldsymbol{X}_i - \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i)(\boldsymbol{X}_i - \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i)^{\mathsf{T}} = \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^{\mathsf{T}} - (\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i)(\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i)^{\mathsf{T}} = \mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i^{\otimes 2} - (\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i)^{\otimes 2}$$

a nahrazením středních hodnot jejich empirickými odhady (tj. průměry) bychom dostali

$$\widehat{\Sigma}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i^{\otimes 2} - \overline{\boldsymbol{X}}_n^{\otimes 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_n)(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_n)^{\mathsf{T}}.$$

Většinou se však pracuje s tzv. *výběrovou rozptylovou maticí*[*], která se definuje jako vícerozměrnou obdoba výběrového rozptylu S_n^2:

$$\boldsymbol{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_n)(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}}_n)^{\mathsf{T}}.$$

Poznámka.

- $\boldsymbol{S}_n^2$ má na diagonále výběrové rozptyly jednotlivých složek, tj.

$$S_j^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_j)^2,$$

  pro $j = 1, \dots, k$, kde $\overline{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$.

[*] Angl. *sample covariation matrix*

- Prvek (j, m) matice $\boldsymbol{S}_n^2$ je dán výrazem

$$S_{jm} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X}_j)(X_{im} - \overline{X}_m)$$

  pro $j = 1, \ldots, k$ a $m = 1, \ldots, k$, $j \neq m$. Tato náhodná veličina odhaduje kovarianci $\mathsf{cov}\,(X_{ij}, X_{im})$ mezi j-tou a m-tou složkou $\boldsymbol{X}_i$. Říkáme jí *výběrová kovariance*.

- $\boldsymbol{S}_n^2$ je positivně semidefinitní a platí

$$\boldsymbol{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}\widehat{\Sigma}_n = \frac{n}{n-1}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i^{\otimes 2} - \overline{\boldsymbol{X}}_n^{\otimes 2}\Big).$$

Následující tvrzení ukazuje, že jak $\overline{\boldsymbol{X}}_n$ tak $\boldsymbol{S}_n^2$ jsou nestranné a konsistentní odhady.

Tvrzení 3.6

(i) Je-li $\mathsf{E}\,|X_{ij}| < \infty$ pro všechna $j = 1, \ldots, m$, pak $\mathsf{E}\,\overline{\boldsymbol{X}}_n = \boldsymbol{\mu}$ a $\overline{\boldsymbol{X}}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \boldsymbol{\mu}$.

(ii) Je-li $\mathsf{var}\,X_{ij} < \infty$ pro všechna $j = 1, \ldots, m$, pak $\mathsf{E}\,\boldsymbol{S}_n^2 = \Sigma$ a $\boldsymbol{S}_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \Sigma$.

Důkaz. Část (i): Plyne přímo z věty 2.2 aplikované po složkách.

Část (ii): Konsistence $\boldsymbol{S}_n^2$ se ukáže analogicky jako u S_n^2 (viz věta 2.6(i)).
Nestrannost lze dokázat např. následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,\boldsymbol{S}_n^2 &= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i^{\otimes 2} - \mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i\right)^{\otimes 2}\right] \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i^{\otimes 2} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{\mathsf{T}}\right) \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i^{\otimes 2} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i^{\otimes 2} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j^{\mathsf{T}}\right) \\
&= \frac{n}{n-1}\left[\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i^{\otimes 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{n-1}{n}(\mathsf{E}\,\boldsymbol{X}_i)^{\otimes 2}\right] = \Sigma.
\end{aligned}$$

□

Vzpomeňme si na definici korelačního koeficientu mezi veličinami X_{ij} a X_{im}:

$$\varrho(X_{ij}, X_{im}) = \frac{\mathsf{cov}\,(X_{ij}, X_{im})}{\sqrt{\mathsf{var}\,X_{ij}\,\mathsf{var}\,X_{im}}}.$$

Je logické zavést výběrový korelační koeficient jakožto empirický odhad tohoto parametru vzniklý z empirických odhadů jeho jednotlivých komponent.

Definice 3.8 *Výběrový korelační koeficient*[*] $\widehat{\varrho}_{jm}$ veličin X_{ij} a X_{im}, $j = 1, \dots, k$ a $m = 1, \dots, k$, $j \neq m$, definujeme jako

$$\widehat{\varrho}_{jm} = \frac{S_{jm}}{S_j S_m} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X}_j)(X_{im} - \overline{X}_m)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X}_j)^2 \sum_{i=1}^{n}(X_{im} - \overline{X}_m)^2}}.$$

Poznámka.

- $-1 \leq \widehat{\varrho}_{jm} \leq 1$ (viz Cauchyho-Schwarzova nerovnost).
- $\widehat{\varrho}_{jm} = 1$ (resp. -1) právě když existují konstanty $a \in \mathbb{R}$ a $b > 0$ (resp. $b < 0$) takové, že $X_{ij} = a + bX_{im}$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.
- $\widehat{\varrho}_{jm}$ je konsistentní odhad korelačního koeficientu $\varrho(X_{ij}, X_{im})$ [věta o spojité transformaci], ale není nestranný.

Cvičení. Dokažte, že $\widehat{\varrho}_{jm} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \varrho(X_{ij}, X_{im})$.

Zde končí předn. 10 (2.11.)

[*] Angl. *sample correlation coefficient*

4 Principy testování hypotéz

4.1 Základní pojmy a definice

Nechť $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ je náhodný výběr nezávislých k-rozměrných náhodných vektorů s rozdělením $F_X \in \mathcal{F}$, kde $\mathcal{F}$ je model. Nechť $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{t}(F) \in \mathbb{R}^d$ je charakteristika rozdělení, která nás zajímá (parametr), nechť $\Theta = \{\boldsymbol{t}(F), F \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathbb{R}^d$ označuje všechny možné hodnoty parametru v modelu $\mathcal{F}$ (nazývá se *parametrický prostor*[*]). Označme skutečný parametr jako $\boldsymbol{\theta}_X = \boldsymbol{t}(F_X)$. Označme celá napozorovaná data symbolem $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$.

Příklady. Nově zaváděné pojmy a tvrzení budeme v celé této kapitole objasňovat na následujících příkladech.

A. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{N}(\theta_X, \sigma_0^2)$, kde $\sigma_0^2 > 0$ je známo. Máme tedy model
$$\mathcal{F}^A = \{\mathsf{N}(\theta, \sigma_0^2),\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

B. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{N}(\theta_X, \sigma_X^2)$, kde σ_X^2 není známo. Pracujeme s modelem
$$\mathcal{F}^B = \{\mathsf{N}(\theta, \sigma^2),\ \theta \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0\} \supset \mathcal{F}^A.$$

C. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení F_X s konečným a nenulovým rozptylem. Pracujeme s neparametrickým modelem
$$\mathcal{F}^C = \mathcal{L}_+^2 \supset \mathcal{F}^B \supset \mathcal{F}^A.$$

Testovaným parametrem bude střední hodnota $\theta = \int x\, dF(x)$, jeho skutečná hodnota je $\theta_X = \mathsf{E}\, X_i$, dimenze d parametru θ je 1. Parametrický prostor je $\Theta = \mathbb{R}$.

Zvolme si nyní dvě neprázdné disjunktní podmnožiny Θ, které označíme Θ_0 a Θ_1. Řekněme, že nás nyní nezajímá konkrétní hodnota parametru $\boldsymbol{\theta}_X$, ale chceme pouze odpovědět na otázku, zdali $\boldsymbol{\theta}_X \in \Theta_0$ nebo $\boldsymbol{\theta}_X \in \Theta_1$.

Definice 4.1 (Hypotéza a alternativa)
- Množinu Θ_0 nazýváme [nulová] *hypotéza*[†], množinu Θ_1 nazýváme *alternativa*[‡] (nebo také alternativní hypotéza).
- Označme $\mathcal{F}_0 \overset{\mathsf{df}}{=} \{F \in \mathcal{F} : t(F) \in \Theta_0\}$, tj. všechna rozdělení v modelu $\mathcal{F}$, jejichž parametry splňují hypotézu. Jestliže $\mathcal{F}_0 = \{F_0\}$ (tj. v modelu existuje právě jedno rozdělení, které hypotézu splňuje), hypotézu nazýváme *jednoduchou*[§], jinak *složenou*[¶].

[*] Angl. *parameter space* [†] Angl. *null hypothesis* [‡] Angl. *alternative hypothesis* [§] Angl. *simple null hypothesis* [¶] Angl. *composite null hypothesis*

- Označme $\mathcal{F}_1 \overset{\text{df}}{=} \{F \in \mathcal{F} : t(F) \in \Theta_1\}$, tj. všechna rozdělení v modelu $\mathcal{F}$, jejichž parametry splňují alternativu. Jestliže $\mathcal{F}_1 = \{F_1\}$ (tj. v modelu existuje právě jedno rozdělení, které alternativu splňuje), alternativu nazýváme *jednoduchou*[*], jinak *složenou*[†].

Poznámka.

- Hypotézu označujeme obvykle symbolem H_0, alternativu symbolem H_1. Mluvíme o *testování* hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\theta}_X \in \Theta_0$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\theta}_X \in \Theta_1$.
- Jednoduchou hypotézu tedy dostaneme, pokud $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta}_0\}$ je jednobodová množina a zároveň existuje právě jedno rozdělení $F_0 \in \mathcal{F}$ takové, že $t(F_0) = \boldsymbol{\theta}_0$.
- Jednoduchou alternativu tedy dostaneme, pokud $\Theta_1 = \{\boldsymbol{\theta}_1\}$ je jednobodová množina a zároveň existuje právě jedno rozdělení $F_1 \in \mathcal{F}$ takové, že $t(F_1) = \boldsymbol{\theta}_1$.

Většinou bereme $\Theta_1 = \Theta_0^{\mathsf{c}}$ a $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0^{\mathsf{c}}$. Pokud tomu tak není, tj. $\Theta_0 \cup \Theta_1 \subsetneq \Theta$, tak si můžeme model zúžit na $\mathcal{F}^0 = \{F \in \mathcal{F} : t(F) \in \Theta_0 \cup \Theta_1\}$. Předpokládat, že $\Theta_1 = \Theta_0^{\mathsf{c}}$ a $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0^{\mathsf{c}}$ tedy není na újmu obecnosti.

Volba hypotéz pro jednorozměrný parametr θ

- Nejobvyklejší volba hypotézy je $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ pro nějaké předem zvolené $\theta_0 \in \mathbb{R}$, tj. testujeme $H_0 : \theta_X = \theta_0$. Za alternativu volíme $\Theta_1 = \Theta_0^{\mathsf{c}}$, tj. $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$. Výslednou proceduru pak nazýváme *oboustranný test*[‡], respektive *test proti oboustranné alternativě*.
- Jiná možnost je volit $\Theta_0 = (-\infty, \theta_0\rangle$, tj. testovat $H_0 : \theta_X \leq \theta_0$ proti $H_1 : \theta_X > \theta_0$, případně $\Theta_0 = \langle\theta_0, \infty)$, tj. testovat $H_0 : \theta_X \geq \theta_0$ proti $H_1 : \theta_X < \theta_0$. Tyto testy nazýváme *jednostranné testy*[§], respektive *testy proti jednostranné alternativě*. Všimněte si, že krajní hodnota θ_0 je pokaždé zahrnuta v nulové hypotéze.

Volba hypotézy je dána podstatou praktického problému, který řešíme. V některých případech volíme hypotézu značně odlišně od tří zmíněných možností. V této přednášce se však budeme zabývat pouze výše zmíněnými oboustrannými a jednostrannými testy.

Příklady. Uvažujme oboustranný test parametru $\theta = t(F) = \int x\, dF(x) \in \mathbb{R}$. Testujeme hypotézu $H_0 : \theta_X = \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$.

A. Model $\mathcal{F}^A = \{\mathsf{N}(\theta, \sigma_0^2),\ \theta \in \mathbb{R}\}$. V tomto modelu je $\mathcal{F}_0 = \{\mathsf{N}(\theta_0, \sigma_0^2)\}$, jedná se tedy o test jednoduché hypotézy. Alternativa je složená, $\mathcal{F}_1 = \{\mathsf{N}(\theta, \sigma_0^2),\ \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\theta_0\}\}$.

B. Model $\mathcal{F}^B = \{\mathsf{N}(\theta, \sigma^2),\ \theta \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0\}$. V tomto modelu je hypotéza složená, $\mathcal{F}_0 = \{\mathsf{N}(\theta_0, \sigma^2),\ \sigma^2 > 0\}$, alternativa je také složená, $\mathcal{F}_1 = \{\mathsf{N}(\theta, \sigma^2),\ \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\theta_0\},\ \sigma^2 > 0\}$.

C. Model $\mathcal{F}^C = \mathcal{L}_+^2$. V tomto modelu je hypotéza složená, $\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{L}_+^2 : t(F) = \theta_0\}$, alternativa je také složená, $\mathcal{F}_1 = \{F \in \mathcal{L}_+^2 : t(F) \neq \theta_0\}$.

Na základě náhodného výběru $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ chceme rozhodnout, zda H_0 platí nebo nikoli. Použijeme k tomu nějakou vhodně zvolenou funkci dat $S(\boldsymbol{X})$, které říkáme *testová statistika*[¶], a množinu C, které říkáme *kritický obor*[‖]. Testová statistika je obvykle jednorozměrná; kritický obor je pak nějaká podmnožina $\mathbb{R}$. Rozhodujeme se podle toho, jestli testová statistika padne do kritického oboru, či nikoli.

[*] Angl. *simple alternative* [†] Angl. *composite alternative* [‡] Angl. *two-sided test* [§] Angl. *one-sided tests*
[¶] Angl. *test statistic* [‖] Angl. *critical region*

- Pokud $S(\boldsymbol{X}) \in C$, učiníme závěr, že *zamítáme* hypotézu H_0 ve prospěch alternativy H_1.
- Pokud $S(\boldsymbol{X}) \notin C$, učiníme závěr, že hypotézu H_0 *nemůžeme zamítnout* ve prospěch alternativy H_1.

Poznámka. Někteří autoři definují kritický obor jako podmnožinu výběrového prostoru, tj. v našem značení jako $S^{-1}(C)$. Zamítají pak hypotézu H_0, pokud $\boldsymbol{X} \in S^{-1}(C)$.

Definice 4.2 (Test) *Statistický test* je definován pomocí testové statistiky $S(\boldsymbol{X})$, kritického oboru C a výše uvedeného pravidla pro zamítání hypotézy. Dva testy $(S(\boldsymbol{X}), C)$ a $(S^*(\boldsymbol{X}), C^*)$ nazveme *ekvivalentní* právě když $S(\boldsymbol{X}) \in C \Leftrightarrow S^*(\boldsymbol{X}) \in C^*$ skoro jistě, tj. oba testy vydávají s pravděpodobností 1 totéž rozhodnutí.

4.2 Hladina a síla testu

Při testování hypotéz mohou nastat čtyři situace v závislosti na tom, zdali hypotéza ve skutečnosti platí a zdali ji test zamítne.

- **Hypotéza platí, test ji nezamítne**, tj. $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ a $S(\boldsymbol{X}) \notin C$. V tomto případě test rozhodl správně.
- **Hypotéza platí, test ji zamítne**, tj. $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ a $S(\boldsymbol{X}) \in C$. V tomto případě test rozhodl nesprávně.
- **Hypotéza neplatí, test ji nezamítne**, tj. $\boldsymbol{\theta} \notin \Theta_0$ a $S(\boldsymbol{X}) \notin C$. V tomto případě test rozhodl nesprávně.
- **Hypotéza neplatí, test ji zamítne**, tj. $\boldsymbol{\theta} \notin \Theta_0$ a $S(\boldsymbol{X}) \in C$. V tomto případě test rozhodl správně.

Definice 4.3 (Chyba I. a II. druhu)

(i) Jestliže test zamítl platnou hypotézu, říkáme, že nastala *chyba I. druhu*[*].

(ii) Jestliže test nezamítl neplatnou hypotézu, říkáme, že nastala *chyba II. druhu*[†].

Chybám I. a II. druhu se obecně nelze vyhnout. Klasický statistický přístup k testování hypotéz spočívá v tom, že kontrolujeme pravděpodobnost chyby I. druhu. Co se týká chyby II. druhu, tak ideální by bylo vybrat takový test, který minimalizuje pravděpodobnost chyby II. druhu. Jelikož však pravděpodobnost chyby II. druhu závisí na zvolené alternativě, tak takovéto ideální testy existují pouze v případech, kdy alternativa není příliš velká.

4.2.1 Hladina testu

Pro $F \in \mathcal{F}$ si označme

$$\mathsf{P}_F[S(\boldsymbol{X}) \in B] = \int \mathbb{1}\{S(\boldsymbol{x}) \in B\}\, dF(x_1) \cdots dF(x_n).$$

V případě, že v modelu $\mathcal{F}$ je jednoznačný vztah mezi parametrem $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ a rozdělením $F \in \mathcal{F}$ pak můžeme psát

$$\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}[S(\boldsymbol{X}) \in B] = \int \mathbb{1}\{S(\boldsymbol{x}) \in B\}\, dF(x_1) \cdots dF(x_n), \tag{4.1}$$

[*] Angl. *type I error* [†] Angl. *type II error*

kde F je rozdělení splňující $\boldsymbol{t}(F) = \boldsymbol{\theta}$.

Všimněme si, že (4.1) můžeme také psát v případě, když rozdělení náhodné veličiny $S(\boldsymbol{X})$ je stejné, ať již zvolíme jakékoliv F, které splňuje, že $\boldsymbol{t}(F) = \boldsymbol{\theta}$.

Definice 4.4 (Hladina testu) Nechť $\alpha \in (0,1)$ je předem stanovené číslo.

(i) Jestliže kritický obor C splňuje podmínku

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_0} \mathsf{P}_F\left[S(\boldsymbol{X}) \in C\right] = \alpha,$$

říkáme, že test $(S(\boldsymbol{X}), C)$ má *hladinu* významnosti* přesně α.

(ii) Jestliže kritický obor C splňuje podmínku

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_0} \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_F\left[S(\boldsymbol{X}) \in C\right] = \alpha,$$

pak říkáme, že test $(S(\boldsymbol{X}), C)$ má hladinu α asymptoticky.

Poznámka.

- Je-li množina $\mathcal{F} = \{F_0\}$ jednobodová, pak můžeme přesnou hladinu testu psát jednodušeji
$$\alpha = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) \in C\right], \quad \text{kde } \boldsymbol{\theta}_0 = t(F_0).$$
- Zhruba řečeno, hladina testu je pravděpodobnost chyby prvního druhu, to jest pravděpodobnost zamítnutí platné hypotézy. Pokud hypotéza zahrnuje více než jednu hodnotu parametru, pak jde o nejhorší možnou pravděpodobnost chyby prvního druhu.
- Test, který požadované hladiny α dosahuje přesně, budeme nazývat *přesný test*. Test, který požadované hladiny α dosahuje jen asymptoticky, budeme nazývat *asymptotický test*.
- Někteří autoři od asymptotického testu požadují splnění podmínky
$$\sup_{F \in \mathcal{F}_0} \mathsf{P}_F\left[S(\boldsymbol{X}) \in C\right] \to \alpha \quad \text{pro } n \to \infty.$$
Tato podmínka by však vyloučila, abychom např. t-test (viz strana 76) nazývali asymptotickým testem pro $\mathcal{F} = \mathcal{L}^2_+$.

Zde končí předn. 11 (6.11.)

Klasický přístup k testování hypotéz můžeme shrnout takto:

1. Předem stanovíme požadovanou hladinu testu α, kterou má test dosáhnout buď přesně nebo asymptoticky.
2. Najdeme vhodnou testovou statistiku $S(\boldsymbol{X})$.
3. Kritický obor $C = C(\alpha)$ zvolíme v závislosti na α tak, aby hladina testu (přesná nebo asymptotická) byla právě α a přitom pravděpodobnost chyby II. druhu byla co nejmenší.

Poznámka.

- Hladina testu se volí malá, v praxi se obvykle bere $\alpha = 0{,}05$.

* Angl. *significance level*

- Má-li testová statistika $S(\boldsymbol{X})$ diskrétní rozdělení, pak není možné dosáhnout zcela libovolné hladiny α. V případě, že předepsaná hladina α je nedosažitelná, tak se spokojujeme s hladinou $\alpha' < \alpha$, která je nejblíže k původně požadovanému α. To nám zaručí, že pravděpodobnost zamítnutí platné hypotézy nemůže být větší než zvolená tolerance α.

Terminologie.
- Testu, jehož skutečná hladina je menší než požadované α, se říká test *konservativní*. Testu, jehož skutečná hladina je větší než požadované α, se říká *antikonservativní*.

4.2.2 Síla testu

Definice 4.5 (Silofunkce a síla testu) Funkce

$$\beta(F) = \mathsf{P}_F[S(\boldsymbol{X}) \in C]$$

zobrazující $\mathcal{F}$ do $\langle 0, 1\rangle$ se nazývá *silofunkce* testu.

Pokud $F \in \mathcal{F}_1$, pak číslo $\beta(F)$ se nazývá *síla*[*] testu proti alternativě F.

Poznámka.
- Síla testu je *pravděpodobnost zamítnutí neplatné hypotézy* při dané konkrétní alternativě F. Síla závisí na alternativě, pro níž ji vyhodnocujeme. Síla je rovna doplňku pravděpodobnosti chyby II. druhu do jedničky. Síla testu nemá netriviální dolní hranici; o pravděpodobnosti chyby II. druhu nemůžeme předpokládat, že je malá.
- Má-li test přesnou, resp. asymptotickou hladinu α, pak musí platit $\sup_{F\in\mathcal{F}_0} \beta(F) = \alpha$, resp. $\sup_{F\in\mathcal{F}_0} \lim_{n\to\infty} \beta(F) = \alpha$.
- Pokud existuje jednoznačný vztah mezi $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ a $F \in \mathcal{F}$ pak se zpravidla silofunkce definuje jako zobrazení parametrického prostoru Θ do $\langle 0, 1\rangle$ dané předpisem

$$\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}[S(\boldsymbol{X}) \in C]\,.$$

Poznámka (Interpretace výsledku testu)**.**
- Skončí-li test *zamítnutím hypotézy* H_0, znamená to, že rozdělení dat neodpovídá rozdělení, jaké by data měla za platnosti hypotézy. Pravděpodobnost chybného zamítnutí v případě, že hypotéza platí, je omezena shora hladinou α, která je malá. Hypotézu H_0 vyvracíme, prokázali jsme platnost alternativy H_1.
- Skončí-li test tím, že *hypotézu H_0 nemůžeme zamítnout*, znamená to, že rozdělení dat není dostatečně odlišné od rozdělení, jaké by data měla za platnosti hypotézy. Proto nemůžeme usoudit, že hypotéza H_0 platí a alternativa neplatí. Pravděpodobnost chybného rozhodnutí v případě, že hypotéza neplatí, může být značně velká. Tento výsledek tedy neznamená potvrzení platnosti hypotézy.
- Hypotéza H_0 a alternativa H_1 při testování nevystupují symetricky. Hypotézu můžeme vyvrátit ve prospěch alternativy, ale nemůžeme ji potvrdit nebo prokázat.

Abychom mohli stanovit kritický obor $C(\alpha)$, který dodržuje požadovanou hladinu α, musíme být schopni spočítat přesné nebo asymptotické rozdělení testové statistiky za platnosti hypotézy, a to nesmí záviset na neznámých charakteristikách rozdělení F_X. *Testovou statistiku* $S(\boldsymbol{X})$ tedy volíme tak, aby

[*] Angl. *power*

(i) její rozdělení bylo citlivé na hodnotu testovaného parametru $\boldsymbol{\theta}$;
(ii) za platnosti H_0 její rozdělení (alespoň asymptoticky) nezáviselo na neznámých parametrech a bylo známo (alespoň asymptoticky).

Máme-li testovou statistiku, *kritický obor* $C(\alpha)$ volíme tak, aby
(i) byla dodržena požadovaná hladina testu α;
(ii) v kritickém oboru byly zahrnuty ty hodnoty testové statistiky, které jsou za platnosti hypotézy méně pravděpodobné než za platnosti alternativy.

Kritický obor $C(\alpha)$ má ve většině případů jeden z následujících tvarů:

- $(c_U(\alpha), \infty)$, tj. zamítáme pro příliš velké hodnoty testové statistiky $S(\boldsymbol{X})$;
- $(-\infty, c_L(\alpha))$, tj. zamítáme pro příliš malé hodnoty testové statistiky $S(\boldsymbol{X})$;
- $(-\infty, c_L(\alpha)) \cup (c_U(\alpha), \infty)$, tj. zamítáme jak pro příliš malé tak pro příliš velké hodnoty testové statistiky $S(\boldsymbol{X})$;
- $(-\infty, -c_U(\alpha)) \cup (c_U(\alpha), \infty)$, tj. zamítáme pro příliš velké hodnoty $|S(\boldsymbol{X})|$.

Konstanty $c_L(\alpha)$ a $c_U(\alpha)$, které určují hranice kritického oboru, nazýváme *kritické hodnoty*[*].

Příklad (A1)**.** Oboustranný test střední hodnoty normálního rozdělení se známým rozptylem.

Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení $F_X = \mathsf{N}(\theta_X, \sigma_0^2) \in \mathcal{F}^A = \{\mathsf{N}(\theta, \sigma_0^2),\ \theta \in \mathbb{R}\}$. Testujeme $H_0 : \theta_X = \theta_0$ proti $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$.

Testovou statistiku založíme na bodovém odhadu parametru θ_X, tj. průměru. Víme, že

$$U_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta_0}{\sigma_0}$$

má za platnosti hypotézy H_0 rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$. Jestliže hypotéza neplatí, tj. $\theta_X - \theta_0 = \delta \neq 0$, pak

$$U_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta_X + \theta_X - \theta_0}{\sigma_0} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta_X}{\sigma_0} + \sqrt{n}\,\frac{\delta}{\sigma_0}$$

má rozdělení $\mathsf{N}(\nu_n, 1)$, kde $\nu_n = \sqrt{n}\delta/\sigma_0$. Je-li porušena hypotéza, pak se rozdělení testové statistiky posouvá pryč od nuly, a to tím dále, čím větší je n a $|\theta_X - \theta_0|$. Hodnoty testové statistiky, které jsou daleko od nuly, tedy povedou k zamítnutí hypotézy.

Kritický obor bude mít tvar $(-\infty, c_L(\alpha)) \cup (c_U(\alpha), \infty)$. Kritické hodnoty $c_L(\alpha)$ a $c_U(\alpha)$ určíme tak, aby $\mathsf{P}_{\theta_0}[U_n \in (-\infty, c_L(\alpha))] = \mathsf{P}_{\theta_0}[U_n \in (c_U(\alpha), \infty)] = \alpha/2$. To zaručí, že hladina testu je přesně rovna α. Odtud máme díky symetrii hustoty $c_U(\alpha) = -c_L(\alpha) = u_{1-\alpha/2}$. Test tedy funguje takto

$$\text{zamítni } H_0 : \theta_X = \theta_0 \quad \Longleftrightarrow \quad |U_n| = \sqrt{n}\,\frac{\left|\overline{X}_n - \theta_0\right|}{\sigma_0} > u_{1-\alpha/2},$$

tj. zamítáme hypotézu, pokud se $\overline{X}_n$ liší od hypotetické hodnoty θ_0 o více než $u_{1-\alpha/2}\sigma_0/\sqrt{n}$. Za kvantil $u_{1-\alpha/2}$ dosazujeme 1,96 pro $\alpha = 0{,}05$ a 1,645 pro $\alpha = 0{,}1$. Kritický obor a hustoty testové statistiky za hypotézy a za alternativy jsou zobrazeny na obrázku 4.1.

[*] Angl. *critical values*

Spočítejme nyní silofunkci tohoto testu. Vezměme nějaké θ takové, že $\theta - \theta_0 = \delta \neq 0$. Pokud θ je skutečný parametr, pak rozdělení U_n je $\mathsf{N}(\nu_n, 1)$ a rozdělení $U_n - \nu_n$ je $\mathsf{N}(0,1)$. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned}\beta(\theta) &= \mathsf{P}_\theta[U_n \in C(\alpha)] = \mathsf{P}_\theta\left[U_n < -u_{1-\alpha/2}\right] + \mathsf{P}_\theta\left[U_n > u_{1-\alpha/2}\right] = \\ &= \mathsf{P}_\theta\left[U_n - \nu_n < -u_{1-\alpha/2} - \nu_n\right] + \mathsf{P}_\theta\left[U_n - \nu_n > u_{1-\alpha/2} - \nu_n\right] = \\ &= \Phi(-u_{1-\alpha/2} - \nu_n) + 1 - \Phi(u_{1-\alpha/2} - \nu_n).\end{aligned}$$

Protože $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, tento výsledek můžeme přepsat do tvaru

$$\beta(\theta) = \Phi(-u_{1-\alpha/2} - |\nu_n|) + 1 - \Phi(u_{1-\alpha/2} - |\nu_n|). \tag{4.2}$$

Pro $\theta = \theta_0$ dostaneme $\nu_n = 0$, a tedy $\beta(\theta_0) = \alpha$. Průběh silofunkce tohoto testu je zakreslen na obrázku 4.2.

Nechť δ je nenulové. Pak $|\nu_n|$ roste do nekonečna s rostoucím n a od určitého n počínaje bude $\Phi(-u_{1-\alpha/2} - |\nu_n|)$ zanedbatelné proti zbytku $\beta(\theta)$. Silofunkci tedy můžeme aproximovat výrazem

$$\beta(\theta) \approx 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha/2} - \sqrt{n}\,\frac{|\delta|}{\sigma_0}\right) \tag{4.3}$$

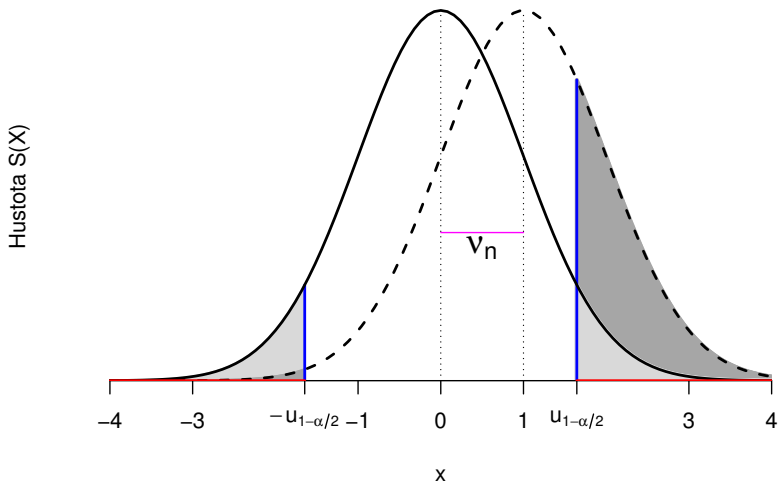
Odtud můžeme snadno spočítat, kolik pozorování je potřeba, aby test dosáhl síly alespoň β (například 0,95). Požadovaný rozsah výběru je

$$n \geq (u_{1-\alpha/2} + u_\beta)^2 \frac{\sigma_0^2}{\delta^2}. \tag{4.4}$$

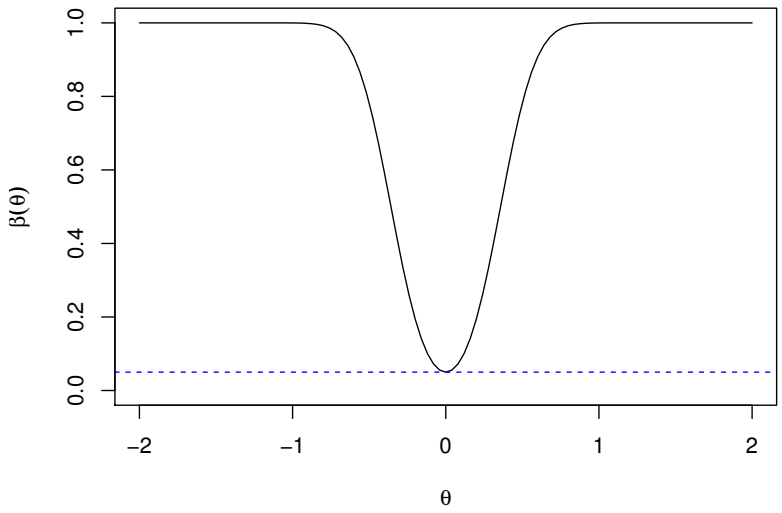
Poznámka. Jak jsme viděli v předchozím příkladě, síla testu závisí na

- hladině testu α

Obrázek 4.1: Hustota testové statistiky U_n za hypotézy a za alternativy pro $\nu_n = 1$ a $\alpha = 0{,}1$. Kritické hodnoty jsou vyznačeny modře, kritický obor červeně.



Obrázek 4.2: Silofunkce oboustranného testu střední hodnoty normálního rozdělení se známým rozptylem pro $\theta_0 = 0$, $\sigma_0^2 = 1$, $n = 30$ a $\alpha = 0{,}05$.



- alternativě θ, respektive její vzdálenosti δ od hypotézy θ_0
- rozptylu pozorování σ_0^2
- počtu pozorování n

Z těchto faktorů je možné ovlivnit pouze počet pozorování. Chceme-li dosáhnout dostatečné síly, musíme získat alespoň takový počet pozorování, jaký je uveden v (4.4).

Poznámka. Všimněme si, že síla předchozího testu proti libovolné alternativě konverguje k 1 při $n \to \infty$ (viz (4.3)). Tuto vlastnost nazýváme *konsistence testu*. Konsistence je velmi žádoucí vlastnost, jinak totiž nemusíme být schopni dosáhnout požadované síly ani při velmi velkém počtu pozorování.

Zde končí předn. 12 (9.11.)

Definice 4.6 Test $(S(\boldsymbol{X}), C)$ na hladině α nazveme *konsistentním testem*[*], jestliže $\forall F \in \mathcal{F}_1$ platí $\lim_{n\to\infty} \beta(F) = 1$.

Zaveďme ještě jednu užitečnou vlastnost testů: *nestrannost*.

Definice 4.7 Test $(S(\boldsymbol{X}), C)$ na hladině α nazveme *nestranným testem*[†], jestliže $\forall F \in \mathcal{F}_1$ platí $\beta(F) \geq \alpha$.

Poznámka.

- Nenechte se zmást: pojmy nestrannost a konsistence testu mají jen velmi volný (pokud vůbec nějaký) vztah k pojmům nestrannost a konsistence odhadu.
- Nestrannost testu vyžaduje, aby síla proti každé alternativě byla alespoň α. Kdyby tomu tak nebylo, t.j. $\exists F \in \mathcal{F}_1$ taková, že $\beta(F) < \alpha$, test by tuto F vlastně považoval za součást hypotézy.

[*] Angl. *consistent test* [†] Angl. *unbiased test*

- Test, který vždy zamítá H_0 s pravděpodobností α (bez ohledu na data) je nestranný. Nestranný test tedy existuje.
- Někdy se pojmy konsistence a nestrannost vztahují vůči specifickým alternativám. Tedy například říkáme, že daný test je konsistentní vůči konkrétní $F \in \mathcal{F}_1$, jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \beta(F) = 1$.

Příklad (A2)**.** Jednostranný test střední hodnoty normálního rozdělení se známým rozptylem.

Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení $F_X = \mathsf{N}(\theta_X, \sigma_0^2) \in \mathcal{F}^A = \{\mathsf{N}(\theta, \sigma_0^2),\ \theta \in \mathbb{R}\}$. Testujeme $H_0 : \theta_X \leq \theta_0$ proti $H_1 : \theta_X > \theta_0$.

Testová statistika je stejná jako v příkladě A1

$$U_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta_0}{\sigma_0}.$$

Její rozdělení pro $\theta_X = \theta_0$ je $\mathsf{N}(0,1)$. Pro hodnoty $\theta_X = \theta_0 + \delta$ máme $U_n \sim \mathsf{N}(\nu_n, 1)$, kde $\nu_n = \sqrt{n}\delta/\sigma_0$. Je-li porušena hypotéza, pak se rozdělení testové statistiky posouvá do kladných hodnot, a to tím dále, čím větší je n a δ. Příliš velké kladné hodnoty testové statistiky, tedy povedou k zamítnutí hypotézy.

Kritický obor bude mít tvar $C(\alpha) = (c_U(\alpha), \infty)$. Kritickou hodnotu $c_U(\alpha)$ určíme tak, aby $\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} \mathsf{P}_\theta[U_n \in C] = \alpha$. Jelikož $\mathsf{P}_\theta[U_n \in (c_U(\alpha), \infty)]$ je rostoucí funkce parametru θ, pro $\theta < \theta_0$, tak

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} \mathsf{P}_\theta[U_n \in C(\alpha)] = \mathsf{P}_{\theta_0}[U_n \in (c_U(\alpha), \infty)]$$

Tedy pro $c_U(\alpha) = u_{1-\alpha}$ splňuje tento test podmínku $\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} \mathsf{P}_\theta[U_n \in C(\alpha)] = \alpha$ a tudíž má hladinu α.

Dohromady dostáváme pravidlo

$$\text{zamítni } H_0 : \theta_X \leq \theta_0 \quad \Longleftrightarrow \quad U_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta_0}{\sigma_0} > u_{1-\alpha},$$

tj. zamítáme hypotézu, pokud $\overline{X}_n$ je o více než $u_{1-\alpha}\sigma_0/\sqrt{n}$ větší než θ_0. Za kvantil $u_{1-\alpha/2}$ dosazujeme 1,645 pro $\alpha = 0{,}05$ a 1,282 pro $\alpha = 0{,}1$. Kritická hodnota pro jednostranný test na hladině α je stejná jako kritická hodnota pro oboustranný test na hladině $\alpha/2$. To je dáno tím, že nyní zamítáme hypotézu pouze v jednom chvostu rozdělení U_n.

Výpočet silofunkce je jednodušší než předtím. Vezměme nějaké θ takové, že $\theta - \theta_0 = \delta$ a dostaneme

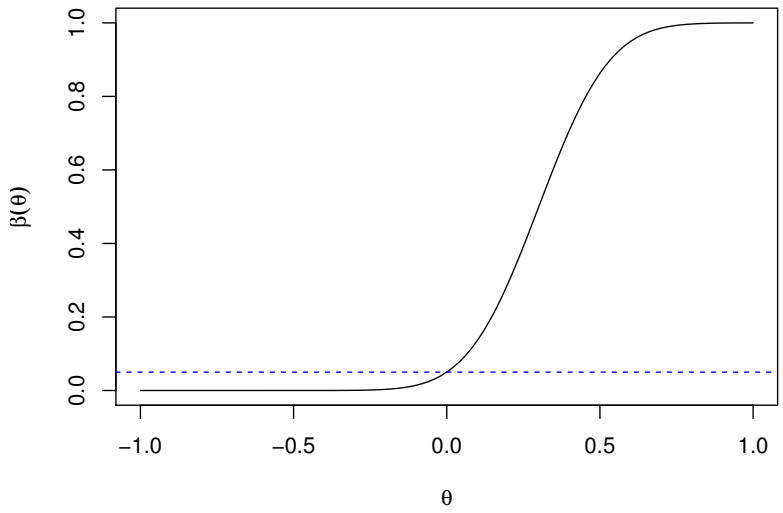
$$\beta(\theta) = \mathsf{P}_\theta[U_n > u_{1-\alpha}] = \mathsf{P}_\theta[U_n - \nu_n > u_{1-\alpha} - \nu_n] = 1 - \Phi(u_{1-\alpha} - \nu_n).$$

Průběh silofunkce tohoto testu je zakreslen na obrázku 4.3. Počet pozorování, který je potřeba, aby test dosáhl síly alespoň β proti alternativě $\theta_0 + \delta$, $\delta > 0$, je

$$n \geq (u_{1-\alpha} + u_\beta)^2 \frac{\sigma_0^2}{\delta^2}.$$

Příklad (B)**.** Oboustranný test střední hodnoty normálního rozdělení s neznámým rozptylem.

Obrázek 4.3: Silofunkce testu střední hodnoty normálního rozdělení se známým rozptylem proti pravostranné alternativě pro $\theta_0 = 0$, $\sigma_0^2 = 1$, $n = 30$ a $\alpha = 0{,}05$.



Nemůžeme použít testovou statistiku z příkladů (A1) a (A2), protože neznáme skutečný rozptyl σ_X^2. Pokud jej však nahradíme výběrovým rozptylem S_n^2 dostaneme statistiku

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta_0}{S_n},$$

která má v tomto modelu za platnosti hypotézy H_0 rozdělení t_{n-1} (viz věta 2.10 o T-statistice). Jestliže hypotéza neplatí, tj. $\theta_X - \theta_0 = \delta \neq 0$, pak lze hodnotu této statistiky vyjádřit jako

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{U/(n-1)}},$$

kde $Z \sim \mathsf{N}(\nu_n, 1)$, $\nu_n = \sqrt{n}\delta/\sigma_X$, $U \sim \chi^2_{n-1}$ a U, Z jsou nezávislé. Rozdělení této náhodné veličiny se nazývá *necentrální t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti a parametrem necentrality ν_n*[*]. Jeho charakteristiky (hustota, distribuční funkce, momenty) mají komplikovaný tvar, ale stačí vědět, že pro velké n jej lze aproximovat rozdělením $\mathsf{N}(\nu_n, 1)$.

I zde tedy platí, že je-li porušena hypotéza, pak se rozdělení testové statistiky posouvá pryč od nuly, a to tím dále, čím větší je n a $|\theta_X - \theta_0|$. Hodnoty testové statistiky, které jsou daleko od nuly, tedy povedou k zamítnutí hypotézy.

Kritický obor bude mít tvar $(-\infty, c_L(\alpha)) \cup (c_U(\alpha), \infty)$. Zvolíme-li kritické hodnoty jako $c_U(\alpha) = -c_L(\alpha) = t_{n-1}(1-\alpha/2)$, pak

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_0} \mathsf{P}_F(T_n \in C(\alpha)) = \sup_{\sigma^2 > 0} \mathsf{P}_{\theta_0,\sigma^2}(T_n \in C(\alpha)) = \mathsf{P}(Z_n \in C(\alpha)) = \alpha,$$

kde Z_n má t_{n-1} rozdělení. Test bude mít přesně hladinu α a dostáváme pravidlo

$$\text{zamítni } H_0 : \theta_X = \theta_0 \quad \Longleftrightarrow \quad |T_n| = \sqrt{n}\,\frac{\left|\overline{X}_n - \theta_0\right|}{S_n} > t_{n-1}(1-\alpha/2).$$

[*] Angl. *non-central t distribution with $n-1$ degrees of freedom and noncentrality parameter ν_n*

To znamená, že hypotéza bude zamítnuta, pokud se bude průměr $\overline{X}_n$ lišit od hypotetické hodnoty θ_0 o více než $t_{n-1}(1-\alpha/2)S_n/\sqrt{n}$. Tento test se nazývá *jednovýběrový t-test*[*].

Silofunkci získáme podobným postupem jako v příkladě (1A). Vezměme nějaké θ takové, že $\theta - \theta_0 = \delta \neq 0$. Pokud θ je skutečný parametr, pak rozdělení T_n je necentrální t s $n-1$ stupni volnosti a parametrem necentrality $\nu_n = \sqrt{n}\delta/\sigma_X$. Označme distribuční funkci tohoto rozdělení G_n a počítejme

$$\begin{aligned}\beta(\theta, \sigma_X^2) &= \mathsf{P}_{\theta,\sigma_X^2}[T_n \in C(\alpha)] \\ &= \mathsf{P}_{\theta,\sigma_X^2}[T_n < -t_{n-1}(1-\alpha/2)] + \mathsf{P}_{\theta,\sigma_X^2}[T_n > t_{n-1}(1-\alpha/2)] \\ &= G_n(-t_{n-1}(1-\alpha/2)) + 1 - G_n(t_{n-1}(1-\alpha/2)).\end{aligned}$$

Necentrální t-rozdělení nemá symetrickou hustotu, takže výsledek již nejde dále upravovat. Pokud je počet pozorování n dostatečně velký, můžeme aproximovat sílu pomocí vzorce (4.2) nebo (4.3).

Ze vzorce (4.3) lze získat aproximaci pro počet pozorování n potřebný k tomu, aby test dosáhl síly alespoň β. Požadovaný rozsah výběru je

$$n \geq (u_{1-\alpha/2} + u_\beta)^2 \frac{\sigma_X^2}{\delta^2} + 1,$$

Jednička se k výsledku přidává proto, aby trochu zkompenzovala nahrazení t rozdělení normálním. K výpočtu síly a rozsahu výběru je třeba znát skutečný rozptyl σ_X^2 nebo jej nahradit nějakým předběžným odhadem (tyto výpočty obvykle provádíme předtím, než získáme data).

Příklad (C)**.** Oboustranný test střední hodnoty libovolného rozdělení s konečným rozptylem.

Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení $F_X \in \mathcal{F}^C = \mathcal{L}_+^2$. Označme $\mathsf{E}\, X_i = \theta_X$, $\mathsf{var}\, X_i = \sigma_X^2$. Testujeme $H_0 : \theta_X = \theta_0$ proti $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$.

Podle věty 2.9 (limitní věta o T statistice) má v tomto modelu náhodná veličina

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta_0}{S_n},$$

za platnosti hypotézy H_0 asymptoticky rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$. Jestliže hypotéza neplatí, tj. $\theta_X - \theta_0 = \delta \neq 0$, pak

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta_X + \theta_X - \theta_0}{S_n} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta_X}{S_n} + \sqrt{n}\,\frac{\delta}{S_n}$$

konverguje do $+\infty$ nebo $-\infty$ podle toho, jaké znaménko má δ. Hodnoty testové statistiky, které jsou daleko od nuly, tedy povedou k zamítnutí hypotézy.

Kritický obor bude mít tvar $(-\infty, c_L(\alpha)) \cup (c_U(\alpha), \infty)$. Všimněme si, že

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_0} \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_F(|T_n| > u_{1-\alpha/2}) = \mathsf{P}(|Z| > u_{1-\alpha/2}) = \alpha,$$

kde $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$. Tedy kritické hodnoty $c_U(\alpha) = -c_L(\alpha) = u_{1-\alpha/2}$ zaručují, že hladina testu je asymptoticky rovna α. Místo kritické hodnoty $u_{1-\alpha/2}$ můžeme použít $t_{n-1}(1-\alpha/2)$, protože

[*] Angl. *one-sample t-test*

provádíme asymptotický test a $t_{n-1}(1-\alpha/2) \to u_{1-\alpha/2}$ pro $n \to \infty$. Jelikož $|t_{n-1}(\alpha)| \geq |u_\alpha|$, tak test bude s využitím kvantilů t rozdělení konzervativnější, než kdybychom použili kvantily normovaného normálního rozdělení.

Celkem tedy dostáváme pravidlo

$$\text{zamítni } H_0 : \theta_X = \theta_0 \quad \Longleftrightarrow \quad |T_n| = \sqrt{n}\,\frac{\left|\overline{X}_n - \theta_0\right|}{S_n} > t_{n-1}(1-\alpha/2).$$

Jedná se tedy opět o jednovýběrový t-test. Ukázali jsme, že jakožto asymptotický test jej můžeme použít pro libovolná data s konečným rozptylem.

Cvičení.

1. Dokažte o testu z příkladu A2 (str. 62), že je nestranný a konsistentní.
2. Dokažte o testu z příkladu B (str. 62), že je nestranný a konsistentní.
   Návod. Pro důkaz nestrannosti můžete využít toho, že pro náhodnou veličina Z_n s necentrálním t rozdělením se stupni volnosti n a nenulovým parametrem necentrality platí $\mathsf{P}(|Z_n| > t_n(1-\alpha/2)) > \alpha$.
3. Dokažte o testu z příkladu C (str. 64), že je konsistentní.

4.3 P-hodnota

Uvažujme hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta}_X = \boldsymbol{\theta}_0$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\theta}_X \neq \boldsymbol{\theta}_0$ a test $(S(\boldsymbol{X}), C)$ s kritickým oborem tvaru $C = \mathbb{R} \setminus \langle c_L, c_U \rangle$, kde $-\infty \leq c_L < c_U \leq \infty$. Označme $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ pozorovanou realizaci náhodného výběru $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ a $s_{\boldsymbol{x}} = S(\boldsymbol{x})$ realizovanou hodnotu testové statistiky $S(\boldsymbol{X})$, kterou jsme spočítali pro daný datový soubor. Označme dále symbolem (přesnou či asymptotickou) F_0 distribuční funkci testové statistiky $S(\boldsymbol{X})$ za platnosti hypotézy. Budeme předpokládat, že toto rozdělení již nezávisí na konkrétní volbě F, která splňuje $\boldsymbol{t}(F) = \boldsymbol{\theta}_0$.

Označme $F_0(s-) = \lim_{h \searrow 0} F_0(s-h)$, tj.

$$F_0(s-) = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) < s\right], \quad \text{resp.} \quad F_0(s-) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) < s\right].$$

Všimněme si, že pokud je F_0 je spojitá, tak platí $F_0(s-) = F_0(s)$.

Definice 4.8 (P-hodnota) Nechť F_0 je přesné rozdělení statistiky $S(\boldsymbol{X})$ za hypotézy. *P-hodnotou*[*] neboli *dosaženou hladinu testu* definujeme jako

(i) $p(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) \geq s_{\boldsymbol{x}}\right] = 1 - F_0(s_{\boldsymbol{x}}-)$, pokud $c_L = -\infty$;
(ii) $p(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) \leq s_{\boldsymbol{x}}\right] = F_0(s_{\boldsymbol{x}})$, pokud $c_U = \infty$;
(iii) $p(\boldsymbol{x}) = 2\min\left(\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) \geq s_{\boldsymbol{x}}\right], \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) \leq s_{\boldsymbol{x}}\right]\right) = 2\min\left(1 - F_0(s_{\boldsymbol{x}}-), F_0(s_{\boldsymbol{x}})\right)$, pokud c_L a c_U jsou konečné a $F_0(c_L-) = 1 - F_0(c_U) = \alpha/2$.

Zde končí předn. 13 (14.11.)

Poznámka.

[*] Angl. *p-value*

- P-hodnota je pravděpodobnost, že bychom za platnosti hypotézy napozorovali data, která by byla s hypotézou ve stejném nebo větším rozporu, než data, která analyzujeme.
- Je-li rozdělení $S(\boldsymbol{X})$ za platnosti hypotézy symetrická kolem 0 a $c_L = -c_U$ (častý případ v praxi), pak můžeme p-hodnotu počítat podle vzorce

$$p(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[|S(\boldsymbol{X})| \geq |s_{\boldsymbol{x}}|\right] = 2\left[1 - F_0(|s_{\boldsymbol{x}}| -)\right].$$

- Testujeme-li hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta}_X \in \Theta_0$, kde $\Theta_0 \neq \emptyset$ není jednobodová množina, nahradíme $\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}$ v definici 4.8 výrazem $\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$.
- Je-li distribuční funkce F_0 asymptotická, pak *asymptotickou p-hodnotu* definujeme jako v definici (4.8), pouze $\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ nahradíme za $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$. Pokud hypotéza Θ_0 není jednobodová, pak $\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ nahradíme za $\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$.

Tvrzení 4.1 Nechť (přesné nebo asymptotické) rozdělení testové statistiky $S(\boldsymbol{X})$ je spojité. Uvažujme test hypotézy H_0 proti alternativě H_1 daný pravidlem

$$\begin{aligned} H_0 \text{ zamítáme, jestliže } p(\boldsymbol{x}) \leq \alpha \\ H_0 \text{ nezamítáme, jestliže } p(\boldsymbol{x}) > \alpha, \end{aligned} \tag{4.5}$$

Pak tento test má hladinu α (přesně nebo asymptoticky, podle toho, používáme-li přesnou nebo asymptotickou p-hodnotu).

Důkaz. Budeme uvažovat, že p-hodnotu počítáme pomocí přesného rozdělení. Pro asymptotickou p-hodnotu by byl důkaz analogický.

(i) $C(\alpha) = (c_U(\alpha), \infty)$

V tomto případě

$$p(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) \geq s_{\boldsymbol{x}}\right].$$

Na druhou stranu, ze spojitosti rozdělení $S(\boldsymbol{X})$ a z definice kritické hodnota $c_U(\alpha)$

$$\alpha = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) > c_U(\alpha)\right] = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) \geq c_U(\alpha)\right].$$

Tudíž

$$p(\boldsymbol{x}) \leq \alpha \iff s_{\boldsymbol{x}} \geq c_U(\alpha)$$

a tedy

$$\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[p(\boldsymbol{X}) \leq \alpha\right] = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) \geq c_U(\alpha)\right] = \alpha.$$

(ii) $C(\alpha) = (-\infty, c_L(\alpha))$

Analogicky jako výše

$$p(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) \leq s_{\boldsymbol{x}}\right],$$

přičemž

$$\alpha = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) < c_L(\alpha)\right] = \mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[S(\boldsymbol{X}) \leq c_L(\alpha)\right].$$

Tudíž

$$p(\boldsymbol{x}) \leq \alpha \iff s_{\boldsymbol{x}} \leq c_L(\alpha)$$

a tedy

$$\mathsf{P}_{\theta_0}[p(\boldsymbol{X}) \leq \alpha] = \mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \leq c_L(\alpha)] = \alpha.$$

(iii) $C(\alpha) = (-\infty, c_L(\alpha)) \cup (c_U(\alpha), \infty)$

V tomto případě

$$p(\boldsymbol{x}) = 2\min\left(\mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \geq s_{\boldsymbol{x}}], \mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \leq s_{\boldsymbol{x}}]\right).$$

Postupně vyšetříme případy, kdy $\mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \leq s_{\boldsymbol{x}}] \geq \frac{1}{2}$ a $\mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \geq s_{\boldsymbol{x}}] \geq \frac{1}{2}$.

Nechť tedy $\mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \leq s_{\boldsymbol{x}}] \geq \frac{1}{2}$. Potom

$$p(\boldsymbol{x}) = 2\,\mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \geq s_{\boldsymbol{x}}].$$

a zároveň

$$\frac{\alpha}{2} = \mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) > c_U(\alpha)] = \mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \geq c_U(\alpha)].$$

Tudíž

$$p(\boldsymbol{x}) \leq \alpha \quad \& \quad \mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \leq s_{\boldsymbol{x}}] \geq \tfrac{1}{2} \iff s_{\boldsymbol{x}} \geq c_U(\alpha).$$

Podobně se ukáže, že pokud $\mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \geq s_{\boldsymbol{x}}] \geq \frac{1}{2}$, pak

$$p(\boldsymbol{x}) \leq \alpha \quad \& \quad \mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \geq s_{\boldsymbol{x}}] \geq \tfrac{1}{2} \iff s_{\boldsymbol{x}} \leq c_L(\alpha).$$

Odtud dostáváme, že

$$p(\boldsymbol{x}) \leq \alpha \iff s_{\boldsymbol{x}} \in (-\infty, c_L(\alpha)\rangle \cup \langle c_U(\alpha), \infty)$$

a tedy

$$\mathsf{P}_{\theta_0}[p(\boldsymbol{X}) \leq \alpha] = \mathsf{P}_{\theta_0}[S(\boldsymbol{X}) \in (-\infty, c_L(\alpha)\rangle \cup \langle c_U(\alpha), \infty)] = \alpha.$$

□

Poznámka.

- Pokud má $S(\boldsymbol{X})$ diskrétní rozdělení, pak pravidlo (4.5) dává test, který má nejbližší možnou dosažitelnou hladinu α' takovou, že $\alpha' \leq \alpha$.
- Spočítáme-li p-hodnotu $p(\boldsymbol{x})$, můžeme hypotézu zamítnout na všech hladinách $\alpha' \geq p(\boldsymbol{x})$, ale nemůžeme ji zamítnout na hladinách $\alpha' < p(\boldsymbol{x})$. Proto se p-hodnotě říká *dosažená hladina testu*.
- Zamítáme-li pomocí p-hodnoty, nemusíme uvádět kritický obor a nemusíme jej přepočítávat, pokud se rozhodneme změnit hladinu testu (měnit hladinu testu poté, co je znám výsledek, však není legitimní).
- P-hodnotu můžeme chápat jako míru souladu dat s hypotézou. Pokud $p(\boldsymbol{x}) \ll \alpha$, data zamítají hypotézu s velkou „rezervou“.
- P-hodnotu **není možné** vykládat jako *„pravděpodobnost, že nulová hypotéza platí“*. Platnost nulové hypotézy totiž není náhodný, ale deterministický jev.

Příklad (C)**.** Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$, $n = 26$, z rozdělení $F_X \in \mathcal{F}^C = \mathcal{L}^2_+$ se střední hodnotou $\mathsf{E}\, X_i = \theta_X$. Testujeme $H_0 : \theta_X = \theta_0$ proti $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$. Testová statistika T_n má za platnosti hypotézy přibližně rozdělení t_{25}, které je symetrické kolem 0. Spočítali jsme testovou statistiku a její výsledek je $t = -1{,}37$. P-hodnota pro tento test se spočítá podle vzorce

$$p(\boldsymbol{x}) = \mathsf{P}_{\theta_0}\left[|T_n| \geq |-1{,}37|\right] = 2[1 - F_{25}(1{,}37)] \doteq 0{,}183$$

kde F_{25} značí distribuční funkci rozdělení t_{25}. P-hodnota je 0,183. Testujeme-li na hladině $\alpha = 0{,}05$, nemůžeme zamítnout hypotézu, neboť $p(\boldsymbol{x}) > 0{,}05$. Kdybychom si však před provedením testu stanovili hladinu $\alpha' = 0{,}2$, hypotézu bychom zamítnout mohli.

Uvažujme nyní p-hodnotu $p(\boldsymbol{X})$ jakožto náhodnou veličinu, čili statistiku spočítanou z náhodného výběru $\boldsymbol{X}$. Lze ukázat, že za určitých předpokladů má p-hodnota spočítaná za platnosti hypotézy rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

Tvrzení 4.2 Uvažujme test $(S(\boldsymbol{X}), C)$ hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\theta}_X = \boldsymbol{\theta}_0$ proti $H_1 : \boldsymbol{\theta}_X \neq \boldsymbol{\theta}_0$ s p-hodnotou $p(\boldsymbol{x})$. Nechť testová statistika $S(\boldsymbol{X})$ má spojité rozdělení a platí hypotéza. Pak $p(\boldsymbol{X}) \sim \mathsf{R}(0, 1)$.

Důkaz. Označme $U = F_0(S(\boldsymbol{X}))$, kde F_0 je distribuční funkce náhodné veličiny $S(\boldsymbol{X})$ za nulové hypotézy. Všimněme si, že za platnosti nulové hypotézy má náhodná veličina U rovnoměrné rozdělení na $(0, 1)$.

(i) $C(\alpha) = (c_U(\alpha), \infty)$

V tomto případě $p(\boldsymbol{x}) = 1 - F_0(s_{\boldsymbol{x}})$ a tedy pro distribuční funkci náhodné veličiny $p(\boldsymbol{X})$ platí

$$\mathsf{P}_{\theta_0}[p(\boldsymbol{X}) \leq u] = \mathsf{P}_{\theta_0}[1 - F_0(S(\boldsymbol{X})) \leq u] = \mathsf{P}[1 - U \leq u] = \mathsf{P}[1 - u \leq U] = u,$$

pro $u \in (0, 1)$. Tedy distribuční funkce $p(\boldsymbol{X})$ se shoduje s distribuční funkcí rovnoměrného rozdělení na $(0, 1)$, což bylo dokázat.

(ii) $C(\alpha) = (-\infty, c_L(\alpha))$

V tomto případě pro $u \in (0, 1)$

$$\mathsf{P}_{\theta_0}[p(\boldsymbol{X}) \leq u] = \mathsf{P}_{\theta_0}[F_0(S(\boldsymbol{X})) \leq u] = \mathsf{P}[U \leq u] = u.$$

(iii) $C(\alpha) = (-\infty, c_L(\alpha)) \cup (c_U(\alpha), \infty)$

V tomto případě pro $u \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{\theta_0}[p(\boldsymbol{X}) \leq u] &= \mathsf{P}_{\theta_0}[2\min(1 - F_0(S(\boldsymbol{X})), F_0(S(\boldsymbol{X}))) \leq u] \\
&= \mathsf{P}[2\min(1 - U, U) \leq u] \\
&= \mathsf{P}[2\min(1 - U, U) \leq u,\ U \leq \tfrac{1}{2}] + \mathsf{P}[2\min(1 - U, U) \leq u,\ U > \tfrac{1}{2}] \\
&= \mathsf{P}[2U \leq u,\ U \leq \tfrac{1}{2}] + \mathsf{P}[2(1 - U) \leq u,\ U \geq \tfrac{1}{2}] \\
&= \mathsf{P}[U \leq \min\{\tfrac{u}{2}, \tfrac{1}{2}\}] + \mathsf{P}[U \geq \max\{1 - \tfrac{u}{2}, \tfrac{u}{2}\}] \\
&= \tfrac{u}{2} + 1 - (1 - \tfrac{u}{2}) = u.
\end{aligned}$$

□

Poznámka. Předchozí tvrzení neplatí, pokud je rozdělení testové statistiky diskrétní, ani tehdy, když hypotéza obsahuje více než jednu hodnotu parametru.

Zde končí předn. 14 (24.11.)

4.4 Dualita intervalových odhadů a testování hypotéz

Uvažujme náhodný výběr $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ z rozdělení $F_X \in \mathcal{F}$, kde $\mathcal{F}$ je model. Nechť $\theta = t(F) \in \mathbb{R}$ je parametr a $\theta_X = t(F_X)$ je jeho skutečná hodnota. V kapitole 3.4 jsme řešili problém intervalového odhadu parametru θ_X, tj. hledali jsme náhodné veličiny $C_L(\boldsymbol{X})$ a $C_U(\boldsymbol{X})$ takové, že $\mathsf{P}\big[(C_L(\boldsymbol{X}), C_U(\boldsymbol{X})) \ni \theta_X\big] = 1-\alpha$ (nebo $\xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha$).

V této kapitole se zabýváme testováním hypotéz, speciálně hypotézy $H_0 : \theta_X = \theta_0$ proti $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$. Oba problémy se řeší postupy, které se v určitých rysech shodují, ale liší se v detailech.

Následující věta ukazuje, že mezi problémem testování hypotézy o parametru a problémem hledání intervalového odhadu pro ten samý parametr existuje jakási dualita. Intervalový odhad můžeme použít k testování hypotéz a test hypotézy můžeme převést na intervalový odhad.

Tvrzení 4.3 (Dualita intervalových odhadů a testování)

(i) Nechť je dán oboustranný interval spolehlivosti pro parametr θ_X s pravděpodobností pokrytí $1-\alpha$ (přesnou nebo asymptotickou), který má tvar $(C_L(\boldsymbol{X}), C_U(\boldsymbol{X}))$. Uvažujme test hypotézy $H_0 : \theta_X = \theta_0$ proti $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$ založený na rozhodovacím pravidle

$$\begin{aligned} &H_0 \text{ zamítáme, jestliže } \theta_0 \notin (C_L(\boldsymbol{X}), C_U(\boldsymbol{X})) \\ &H_0 \text{ nezamítáme, jestliže } \theta_0 \in (C_L(\boldsymbol{X}), C_U(\boldsymbol{X})). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pak tento test má hladinu α (přesně nebo asymptoticky).

(ii) Nechť je dán test hypotézy $H_0 : \theta_X = \theta$ proti $H_1 : \theta_X \neq \theta$ na hladině α (přesné nebo asymptotické). Sestavme množinu $B(\boldsymbol{X})$ obsahující všechny parametry $\theta \in \Theta$, pro něž se při pozorovaných datech $\boldsymbol{X}$ nezamítá hypotéza $H_0 : \theta_X = \theta$. Pak $\mathsf{P}[B(\boldsymbol{X}) \ni \theta_X] = 1-\alpha$ (nebo $\xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha$) a (je-li $B(\boldsymbol{X})$ interval) jedná se o interval spolehlivosti pro parametr $\boldsymbol{\theta}_X$ s pravděpodobností pokrytí $1-\alpha$ (přesnou nebo asymptotickou).

Důkaz. Část (i) Nechť $(C_L(\boldsymbol{X}), C_U(\boldsymbol{X}))$ je přesný interval spolehlivosti. Pro asymptotický interval by byl důkaz analogický.

Interval spolehlivosti pro skutečnou hodnotu parametru θ_X splňuje

$$\mathsf{P}_{\theta_X}\big[\theta_X \in (C_L(\boldsymbol{X}), C_U(\boldsymbol{X}))\big] = 1-\alpha.$$

Tedy za platnosti nulové hypotézy, tj. pro $\theta_X = \theta_0$, platí

$$\mathsf{P}_{\theta_0}\big[\theta_0 \in (C_L(\boldsymbol{X}), C_U(\boldsymbol{X}))\big] = 1-\alpha.$$

Tedy hladina testu daného předpisem (4.6) je

$$\mathsf{P}_{\theta_0}\big[\theta_0 \notin (C_L(\boldsymbol{X}), C_U(\boldsymbol{X}))\big] = \alpha,$$

což bylo dokázat.

Část (ii) Nechť $(S_\theta(\boldsymbol{X}), C_\theta(\alpha))$ je přesný test hypotézy $H_0 : \theta_X = \theta$ proti alternativě $H_1 : \theta_X \neq \theta$ s hladinou α. Pro asymptotický test by byl důkaz obdobný.

Označme

$$B(\boldsymbol{X}) = \{\theta \in \Theta : S_\theta(\boldsymbol{X}) \notin C_\theta(\alpha)\}.$$

Potom

$$\mathsf{P}_{\theta_X}\left[B(\boldsymbol{X}) \ni \theta_X\right] = \mathsf{P}_{\theta_X}\left[S_{\theta_X}(\boldsymbol{X}) \notin C_{\theta_X}(\alpha)\}\right] = 1-\alpha,$$

což bylo dokázat. □

Tvrzení 4.3 říká, že umíme-li sestrojit interval spolehlivosti pro parametr, můžeme jej ihned využít k testování hypotéz o tomto parametru. Naopak máme-li test, můžeme s jeho pomocí sestrojit interval spolehlivosti. Tento krok je však pracnější, protože vyžaduje otestování všech možných hodnot parametru. Množina nezamítnutých hypotéz pak dává požadované pokrytí pro skutečný parametr, ale nemusí nutně tvořit interval.

Příklad. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení $F_X = \mathsf{N}(\theta_X, \sigma_X^2) \in \mathcal{F}^B = \{\mathsf{N}(\theta, \sigma^2),\ \theta \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$.

Předpokládejme, že máme spočtený interval spolehlivosti (3.5) pro střední hodnotu normálního rozdělení s neznámým rozptylem. Potom zamítáme nulovou hypotézu $H_0 : \theta_X = \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$, pokud

$$\theta_0 \notin \left(\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big),\ \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)\right).$$

Tj. interval spolehlivosti obsahuje ty hodnoty parametru, pro které bychom nezamítli nulovou hypotézu.

Na druhou stranu pokud pro test $H_0 : \theta_X = \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$ použijeme testovou statistiku

$$T_n(\theta_0) = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \theta_0}{S_n},$$

(viz příklad (B) na str. 62). Pak výše uvedený interval spolehlivosti (až na krajní body) můžeme odvodit jako

$$\{\theta_0 :\ \text{nezamítám } H_0 : \theta_X = \theta_0 \text{ proti } H_1 : \theta_X \neq \theta_0\} = \{\theta_0 : |T_n(\theta_0)| \leq t_{n-1}(1-\alpha/2)\}.$$

5 Jednovýběrové a párové problémy pro kvantitativní data

V této kapitole uvažujeme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ kvantitativních veličin s distribuční funkcí F_X patřící do modelu $\mathcal{F}$. Zajímá nás parametr $\theta_X = t(F_X)$. Chceme testovat hypotézy o tomto parametru, případně pro něj sestrojit intervalový odhad.

5.1 Jednovýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test

Jednovýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test* testuje shodu distribuční funkce dat s určitou pevně danou distribuční funkcí. Je to neparametrický test, protože nepředpokládá žádný parametrický model.

Model: $\mathcal{F}$ = {všechna spojitá rozdělení}

Testovaný parametr: Celá distribuční funkce F_X

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : F_X(x) = F_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_1 : \exists x \in \mathbb{R} : F_X(x) \neq F_0(x),$$

kde F_0 je nějaká pevně specifikovaná spojitá distribuční funkce (bez neznámých parametrů).

Testová statistika je založena na empirické distribuční funkci $\widehat{F}_n$, s níž jsme se seznámili v kapitole 3.5.1 (viz str. 45). Její vlastnosti shrnuje věta 3.3. Empirická distribuční funkce je nestranným a konsistentním odhadem skutečné distribuční funkce v každém bodě. Navíc podle věty 3.3, bod (v), splňuje stejnoměrnou konsistenci, tj. $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{F}_n(x) - F_X(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} 0$ při $n \to \infty$. Testová statistika přebírá tuto supremální normu a zachycuje s ní největší celkový rozdíl mezi $\widehat{F}_n(x)$ a $F_0(x)$.

Testová statistika:

$$K_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{F}_n(x) - F_0(x)\right|$$

Pokud hypotéza platí a F_0 je skutečná distribuční funkce dat, hodnota testové statistiky K_n bude blízko nuly. Hypotézu zamítneme, pokud se empirická distribuční funkce příliš liší od F_0, tj. pokud je testová statistika příliš velká.

Označme

$$K_n^+ = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\widehat{F}_n(x) - F_0(x)\right) \quad \text{a} \quad K_n^- = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(F_0(x) - \widehat{F}_n(x)\right).$$

Pak $K_n = \max\left(K_n^+, K_n^-\right)$.

Lemma 5.1 Platí

$$K_n^+ = \max_{1\le i\le n}\left(\frac{i}{n} - F_0(X_{(i)})\right), \qquad K_n^- = \max_{1\le i\le n}\left(F_0(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n}\right).$$

* Angl. *one-sample Kolmogorov-Smirnov test*

Důkaz. Definujme si $X_{(0)} = -\infty$ a $X_{(n+1)} = +\infty$. Potom

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{i}{n}, \quad \text{pro} \quad x \in \langle X_{(i)}, X_{(i+1)}), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tedy s využitím výše uvedeného

$$\begin{aligned} K_n^+ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} (\widehat{F}_n(x) - F_0(x)) = \max_{0\le i\le n} \sup_{X_{(i)}\le i<X_{(i+1)}} (\widehat{F}_n(x) - F_0(x)) \\ &= \max_{0\le i\le n} (\tfrac{i}{n} - \inf_{X_{(i)}\le x<X_{(i+1)}} F_0(x)) \\ &= \max_{0\le i\le n} (\tfrac{i}{n} - F_0(X_{(i)})) = \max_{1\le i\le n} (\tfrac{i}{n} - F_0(X_{(i)})), \end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti jsme využili toho, že $F_0(X_{(0)}) = 0$ a že $1 - F_0(X_{(n)}) \ge 0$.

Podobně se dá upravit výraz pro K_n^-:

$$\begin{aligned} K_n^- &= \sup_{x\in\mathbb{R}} (F_0(x) - \widehat{F}_n(x)) = \max_{0\le i\le n} \sup_{X_{(i)}\le x<X_{(i+1)}} (F_0(x) - \widehat{F}_n(x)) \\ &= \max_{0\le i\le n} (F_0(X_{(i+1)}) - \tfrac{i}{n}) = \max_{0\le i\le n-1} (F_0(X_{(i+1)}) - \tfrac{i}{n}) \\ &= \max_{1\le i\le n} (F_0(X_{(i)}) - \tfrac{i-1}{n}), \end{aligned}$$

kde jsme v předposlední rovnosti využili toho, že $F_0(X_{(n+1)}) = 1$ a že $F_0(X_{(1)}) \ge 0$. V poslední rovnosti jsme pak pouze posunuli indexy.

□

Poznámka. Předchozí lemma má několik důležitých důsledků.

- Testová statistika K_n se počítá pomocí Lemmatu 5.1, nikoli podle její definice. K jejímu výpočtu není třeba znát $\widehat{F}_n$.
- Platí-li hypotéza, $F_0(X_{(i)})$ má podle věty 2.13 beta rozdělení. Proto rozdělení K_n za platnosti hypotézy nezávisí na F_0.
- Z lemmatu 5.1 lze odvodit přesné rozdělení testové statistiky za platnosti hypotézy. Jedná se ovšem o netriviální výpočet, který je navíc i numericky obtížný. Proto se přesné rozdělení K_n zpravidla používá jen při velmi malém rozsahu výběru n.

Asymptotické rozdělení testové statistiky za platnosti hypotézy je určeno následujícím tvrzením, které rozšiřuje výsledek uvedený ve větě 3.3, bod (v).

Tvrzení 5.2 Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozdělení s distribuční funkcí F_X. Potom

$$\sqrt{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{F}_n(x) - F_X(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} Z,$$

kde náhodná veličina Z má distribuční funkci danou předpisem

$$G(y) = \begin{cases} 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \mathrm{e}^{-2k^2y^2}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Distribuční funkce $G(y)$ určuje limitní rozdělení normalizované testové statistiky $\sqrt{n}K_n$ za platnosti hypotézy, tj. pro $F_X = F_0$. Toto rozdělení není normální, jak jsme byli doposud u limitních rozdělení zvyklí. Důkaz tvrzení 5.2 náleží do pokročilé teorie pravděpodobnosti, my jej neuvádíme.

Nyní již můžeme určit kritickou hodnotu pro zamítání H_0, aby měl test asymptotickou hladinu α. Označme α-kvantil rozdělení s distribuční funkcí G symbolem $k_\alpha = G^{-1}(\alpha)$. Hypotézu budeme zamítat, pokud $\sqrt{n}K_n$ překročí $k_{1-\alpha}$.

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow \sqrt{n}K_n > k_{1-\alpha}.$$

Díky tvrzení 5.2 víme, že tento test má asymptoticky hladinu α.

P-hodnota: $p = 1 - G(\sqrt{n}\,k_n)$, kde k_n je napozorovaná hodnota statistiky K_n. Jedná se zde o asymptotickou p-hodnotu.

Zde končí předn. 15 (21.11.)

Poznámka.

- Všimněme si, že za alternativy

$$K_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_X(x) - F_0(x)| > 0$$

  a tudíž $\sqrt{n}K_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} +\infty$, z čehož plyne konzistence testu. Výhodou Kolmogorovova-Smirnovova testu je tedy jeho universalita (reaguje na jakýkoli rozdíl v rozdělení dat proti hypotéze) a absence předpokladů o rozdělení F_X.
- Tento test má relativně malou sílu proti konkrétnímu typu porušení H_0 (např. změna střední hodnoty). Pokud tušíme, jaké porušení H_0 je pro danou aplikaci nejočekávanější nebo nejvíce relevantní, je lepší použít test, který je zaměřen na tento typ porušení H_0.
- Tento test lze zformulovat i jako jednostranný proti alternativě $H_1' : F_X(x) \geq F_0(x)$, $\exists x \in \mathbb{R} : F_X(x) > F_0(x)$ nebo $H_1'' : F_X(x) \leq F_0(x)$, $\exists x \in \mathbb{R} : F_X(x) < F_0(x)$. Jako testovou statistiku pak použijeme buď K_n^+ anebo K_n^- a zamítáme pro jejich velké hodnoty.

Intervaly spolehlivosti pro F_X

Obraťme nyní pozornost k problému sestrojení intervalu spolehlivosti pro distribuční funkci. Jestliže máme dané pevné $x \in S_X = \{x : F_X(x) \in (0,1)\}$ a chceme intervalový odhad pouze pro hodnotu $F_X(x)$, můžeme vyjít z věty 3.3, bod (iii), a použít postup uvedený v příkladě na str. 44 v kapitole 3.4.2. Dostaneme interval

$$IS(x) = \left(\widehat{F}_n(x) - \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{F}_n(x)(1-\widehat{F}_n(x))}}{\sqrt{n}},\ \widehat{F}_n(x) + \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{F}_n(x)(1-\widehat{F}_n(x))}}{\sqrt{n}} \right).$$

Pro tento interval platí

$$\mathsf{P}[IS(x) \ni F_X(x)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha,\ \forall x \in S_X$$

a mluvíme o něm jako o „bodovém“ intervalu spolehlivosti* pro $F_X(x)$.

* Angl. *pointwise confidence interval*

Co když ale nemáme předem dané x, nýbrž chceme interval, který by pokryl hodnotu distribuční funkce kdekoli, třeba i v mnoha bodech zároveň? K tomu nemůžeme použít postup uvedený výše, ale znovu využijeme tvrzení 5.2. Máme totiž

$$\mathsf{P}\Big[\sqrt{n}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\widehat{F}_n(x)-F_X(x)\right|\le k_{1-\alpha}\Big]\xrightarrow[n\to\infty]{}1-\alpha$$

a také

$$\mathsf{P}\Big[\sqrt{n}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\widehat{F}_n(x)-F_X(x)\right|\le k_{1-\alpha}\Big]=\mathsf{P}\Big[\sqrt{n}\left|\widehat{F}_n(x)-F_X(x)\right|\le k_{1-\alpha},\ \forall x\in\mathbb{R}\Big].$$

Sestavíme-li tedy intervaly

$$B(x)=\left(\widehat{F}_n(x)-\frac{k_{1-\alpha}}{\sqrt{n}},\ \widehat{F}_n(x)+\frac{k_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right),$$

potom

$$\mathsf{P}\left[B(x)\ni F_X(x),\ \forall x\in S_X\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}1-\alpha.$$

Intervalům vytvářejícím oblast, v níž se se zadanou pravděpodobností nachází celý průběh nějaké neznámé funkce, se říká *pás spolehlivosti*[*]. Protože hranice pásu spolehlivosti pro distribuční funkci založené na Kolmogorovově-Smirnovově statistice mohou ležet mimo přirozený rozsah $\langle 0,1\rangle$, předefinujeme dolní mez na $\max(0,\widehat{F}_n(x)-k_{1-\alpha}/\sqrt{n})$ a horní mez na $\min(1,\widehat{F}_n(x)+k_{1-\alpha}/\sqrt{n})$.[†]

Porušení předpokladů testu

Rozdělení F_0 není spojité V tomto případě lze použít statistiku K_n, neplatí však pro ni tvrzení 5.2. Pokud bychom tento fakt ignorovali a použili pro vyhodnocení testu kvantil $k_{1-\alpha}$, tak výsledný test bude konzervativní a tím pádem bude mít i menší sílu.

Rozdělení F_0 je sice spojité, ale v datech jsou shody. Striktně vzato, pokud data pochází ze spojitého rozdělení, tak je nulová pravděpodobnost, že bychom měli nějaká pozorování se stejnými hodnotami (neboli shody[‡]). V aplikacích však typicky vznikají shody kvůli zaokrouhlování. Tedy formálně pozorujeme vlastně $\widetilde{X}_1,\dots,\widetilde{X}_n$, kde $\widetilde{X}_i$ je zaokrouhlená X_i. Čistě z teoretického hlediska tedy za nulové hypotézy empirická distribuční funkce

$$\widehat{F}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}\{\widetilde{X}_i\le x\}$$

odhaduje distribuční funkci $\widetilde{F}_0$ zaokrouhlené náhodné veličiny. Nicméně test se dá nadále používat jako přibližný test, pokud $\widetilde{F}_0$ není příliš odlišné od F_0. Přesněji pokud

$$\sqrt{n}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\widetilde{F}_0(x)-F_0(x)\right|,$$

není příliš velké, což je zpravidla v aplikacích splněno.

[*] Angl. *confidence bounds* [†] Existuje samozřejmě řada jiných způsobů, jak sestavit pás spolehlivosti pro distribuční funkci. [‡] Angl. *ties*

Hypotéza není jednoduchá. Všimněme si, že F_0 musí být známa přesně (tj. nesmí obsahovat neznámé parametry ani jejich odhady). Předpokládejme, že potřebujeme testovat hypotézy

$$H_0 : F_X \in \mathcal{F}_0, \qquad H_1 : F_X \notin \mathcal{F}_0,$$

kde $\mathcal{F}_0 = \{F(x;\theta), \theta \in \Theta\}$ je nějaká parametrická rodina rozdělení (např. $\{\mathsf{N}(\mu,\sigma^2),\ \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$). Potom je přirozené uvažovat jako testovou statistiku

$$\widetilde{K}_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{F}_n(x) - F(x;\widehat{\theta}_n)\right|,$$

kde $\widehat{\theta}_n$ je odhad skutečné hodnoty parametru θ_X. Je však nutné si uvědomit, že pro statistiku $\widetilde{K}_n$ již **neplatí** tvrzení 5.2. Navíc se ukazuje se, že i za nulové hypotézy je asymptotické rozdělení $\widetilde{K}_n$ velmi komplikované a závisí na neznámém parametru θ_X. Pokud bychom ignorovali tento fakt a použili pro vyhodnocení testu kvantil $k_{1-\alpha}$, tak výsledný test bude silně konzervativní a tím pádem bude mít malou sílu.

Všechna výše zmíněna porušení předpokladů se dají řešit pomocí tzv. parametrického bootstrapu (viz přednáška *Moderní statistické metody*).

5.2 Přesný jednovýběrový t-test

Jednovýběrový t-test* porovnává **střední hodnotu** dat s nějakou zvolenou konstantou. V této kapitole předpokládáme normální rozdělení, test pak zachovává požadovanou hladinu přesně pro jakékoli $n \geq 2$. Tímto testem jsme se podrobně zabývali v Příkladě B na str. 62 (Oboustranný test střední hodnoty normálního rozdělení s neznámým rozptylem).

Model: $\mathcal{F} = \{\mathsf{N}(\mu,\sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$

Testovaný parametr: Střední hodnota $\mu_X = \mathsf{E}\, X_i$

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \mu_X = \mu_0, \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_0,$$

kde μ_0 je předem daná konstanta.

Testová statistika:

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_n},$$

kde $\overline{X}_n$ je aritmetický průměr a S_n^2 je výběrový rozptyl.

Rozdělení testové statistiky za H_0:

$$T_n \sim t_{n-1}$$

(viz věta 2.10).

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow |T_n| > t_{n-1}(1-\alpha/2),$$

kde $t_{n-1}(1-\alpha/2)$ je $(1-\alpha/2)$-tý kvantil t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti.

P-hodnota: $p = 2(1 - F_n(|t|))$, kde t je pozorovaná hodnota testové statistiky T_n a F_n je distribuční funkce rozdělení t_{n-1}.

* Angl. *one-sample t-test*

Interval spolehlivosti pro μ_X: Přesný interval spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozdělení je dán krajními body

$$\left(\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\tfrac{\alpha}{2}),\ \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\tfrac{\alpha}{2})\right).$$

Viz vzorec (3.5) na str. 43 a předcházející příklad.

Poznámka. Tento test lze převést na jednostranný test: zamítneme $H_0' : \mu_X \leq \mu_0$ proti $H_1' : \mu_X > \mu_0$, pokud testová statistika překročí kritickou hodnotu $t_{n-1}(1-\alpha)$. Zamítneme $H_0'' : \mu_X \geq \mu_0$ proti $H_1' : \mu_X < \mu_0$, pokud testová statistika nepřekročí kritickou hodnotu $-t_{n-1}(1-\alpha)$.

Viz též příklad A2. na str. 62.

5.3 Asymptotický jednovýběrový t-test

Jedná se o stejný test jako v předchozí kapitole, ale liší se jeho předpoklady. Nyní předpokládáme pouze existenci konečného druhého momentu. Test pak zachovává požadovanou hladinu přibližně pro $n \to \infty$. Tímto testem jsme se zabývali v Příkladě C na str. 64 (Oboustranný test střední hodnoty libovolného rozdělení s konečným rozptylem).

Model: $\mathcal{F} = \mathcal{L}_+^2$

Testovaný parametr: Střední hodnota $\mu_X = \mathsf{E}\, X_i$

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \mu_X = \mu_0, \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_0,$$

kde μ_0 je předem daná konstanta.

Testová statistika:

$$T_n = \sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_n},$$

kde $\overline{X}_n$ je aritmetický průměr a S_n^2 je výběrový rozptyl.

Rozdělení testové statistiky za H_0:

$$T_n \overset{\text{as.}}{\sim} \mathsf{N}(0,1)$$

(viz věta 2.9). Asymptotické rozdělení však lze aproximovat i rozdělením t_{n-1}.

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow |T_n| > t_{n-1}(1-\alpha/2),$$

kde $t_{n-1}(1-\alpha/2)$ je $(1-\alpha/2)$-tý kvantil t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Hladina testu konverguje k α pro $n \to \infty$.

P-hodnota: $p = 2(1 - F_n(|t|))$, kde t je pozorovaná hodnota testové statistiky T_n a F_n je distribuční funkce rozdělení t_{n-1}.

Interval spolehlivosti pro μ_X: Interval (3.5) má pravděpodobnost pokrytí konvergující k $1-\alpha$, jak je ukázáno v příkladě na str. 43.

Poznámka. Tento test lze převést na jednostranný test způsobem zmíněným v předchozí kapitole.

Poznámka. T-test nepotřebuje předpoklad normálního rozdělení, funguje jako asymptotický test pro libovolné rozdělení s konečným rozptylem. Pouze je potřeba mít k dispozici dostatek pozorování.

Zde končí předn. 16 (22.11.)

5.4 Jednovýběrový znaménkový test

Jednovýběrový znaménkový test* porovnává **medián** dat s pevně danou hodnotou. Je to neparametrický test, funguje pro jakékoli spojité rozdělení.

Model: $\mathcal{F}$ = {všechna spojitá rozdělení}

Testovaný parametr: Medián $m_X = F_X^{-1}(0.5)$

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : m_X = m_0, \quad H_1 : m_X \neq m_0,$$

kde m_0 je předem daná konstanta.

Testová statistika:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i > m_0\}$$

(počet pozorování větších než m_0).

Věta 5.3 Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z libovolného spojitého rozdělení s mediánem m_X. Pak

(i)
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i > m_X\} \sim \mathrm{Bi}(n, 1/2),$$

(ii)
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{1}\{X_i > m_X\} - \frac{1}{2} \right] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0, 1/4).$$

Poznámka. Věta 5.3 plyne z věty 2.3, části (iii) a (iv).

Přesné rozdělení testové statistiky za H_0:

$$Y_n \sim \mathrm{Bi}(n, 1/2)$$

Kritický obor (přesný test): Hypotézu budeme zamítat pro příliš malé nebo příliš velké hodnoty Y_n.

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow Y_n \leq c_{1n}(\alpha) \text{ nebo } Y_n \geq c_{2n}(\alpha)$$

kde $c_{1n}(\alpha)$ je největší celé číslo k_1, které splňuje $2^{-n} \sum_{j=0}^{k_1} \binom{n}{j} \leq \frac{\alpha}{2}$ a $c_{2n}(\alpha)$ je nejmenší celé číslo k_2, které splňuje $2^{-n} \sum_{j=k_2}^{n} \binom{n}{j} \leq \frac{\alpha}{2}$. (Ze symetrie binomického rozdělení pro $p = \frac{1}{2}$ plyne, že $c_{1n}(\alpha) + c_{2n}(\alpha) = n$.) Tento test má hladinu nejvýše α (přesné hladiny α nemusí být možné dosáhnout).

* Angl. *one-sample sign test*

P-hodnota (přesná): $p = 2\min\{1 - F_0(y_n), F_0(y_n)\}$, kde F_0 je distribuční funkce $\mathrm{Bi}(n, \frac{1}{2})$ a y_n je napozorovaná hodnota Y_n.

Asymptotické rozdělení testové statistiky za H_0:

$$Z_n = \frac{2}{\sqrt{n}}\left(Y_n - \frac{n}{2}\right) \overset{\text{as.}}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

Kritický obor (asymptotický test): Hypotézu budeme zamítat pro příliš malé nebo příliš velké hodnoty Y_n.

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow |Z_n| > u_{1-\alpha/2}.$$

P-hodnota (asymptotická): $p = 2(1 - \Phi(|z_n|))$, kde z_n je napozorovaná hodnota testové statistiky Z_n.

Poznámka.

- K výpočtu testové statistiky vlastně nepotřebujeme znát konkrétní hodnoty X_i. Stačí nám jen vědět, kolik z nich překročilo hodnotu m_0.
- Tento test lze převést na jednostranný test $H_0' : m_X \geq m_0$ (nebo $\leq m_0$).
- Test lze snadno modifikovat na test o libovolném kvantilu, tj. na test hypotéz

  $$H_0 : u_X(\beta) = u_0, \quad H_1 : u_X(\beta) \neq u_0,$$

  kde $\beta \in (0,1)$. Testová statistika $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i > u_0\}$ potom bude mít za nulové hypotézy rozdělení $\mathrm{Bi}(n, 1-\beta)$. Testování o kvantilu tedy převedeme na testování hodnoty parametru binomického rozdělení, čímž se budeme podrobně zabývat v kapitole 7.1.

Cvičení. Ukažte, že znaménkový test je konsistentní.
Návod: Je jednodušší pracovat s asymptotickou verzí znaménkového testu.

Porušení předpokladů

I když se zpravidla vyžaduje spojitost rozdělení F_X, tak pro dodržení (přesné či asymptotické) hladiny stačí, že za nulové hypotézy $\mathsf{P}[X_i = m_0] = 0$. V aplikacích se však vlivem zaokrouhlování stává, že některá pozorování jsou přesně rovna m_0. Taková pozorování vyloučíme, protože nelze určit, zda před zaokrouhlením byla větší nebo menší než m_0. Test pak provádíme na zmenšeném výběru.

5.5 Jednovýběrový Wilcoxonův test

Jednovýběrový Wilcoxonův test* porovnává medián nebo střední hodnotu dat s pevně danou konstantou. Je to neparametrický test, funguje pro za předpokladu **symetrie** hustoty.

Model: $\mathcal{F} = \{$ spojitá rozdělení s hustotou f splňující $\exists \delta \in \mathbb{R} : f(\delta - x) = f(\delta + x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

Testovaný parametr: Střed symetrie δ_X

Poznámka. Model vyžaduje, aby hustota X_i byla symetrická kolem nějakého bodu δ_X. Pak musí platit $m_X = \delta_X$ a pokud $X_i \in \mathcal{L}^1$, pak i $\mathsf{E}\, X_i \equiv \mu_X = \delta_X$.

* Angl. *one-sample Wilcoxon test, Wilcoxon signed rank test*

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \delta_X = \delta_0, \quad H_1 : \delta_X \neq \delta_0,$$

kde δ_0 je předem daná konstanta.

Poznámka. Za platnosti modelu $\mathcal{F}$ je hypotéza H_0 ekvivalentní hypotéze $H_0^* : m_X = \delta_0$ (test na medián). Pokud navíc $X_i \in \mathcal{L}^1$, pak je hypotéza H_0 též ekvivalentní hypotéze $H_0^{**} : \mu_X = \delta_0$ (test na střední hodnotu).

Testová statistika: Nechť $Z_i \overset{\text{df}}{=} X_i - \delta_0$. Definujme

$$W_S = \sum_{i \in \mathcal{I}} R_i,$$

kde $\mathcal{I} = \{i \in \{1, \ldots, n\} : Z_i > 0\}$ je množina všech indexů takových, že Z_i má kladné znaménko a $R_1, R_2, \ldots, R_n$ jsou pořadí absolutních hodnot $|Z_i|$ mezi všemi absolutními hodnotami $|Z_1|, \ldots, |Z_n|$.

Poznámka. Testová statistika W_S jednovýběrového Wilcoxonova testu může nabývat hodnot $0, 1, \ldots, n(n+1)/2$. Spočítá se následujícím způsobem:

1. Spočítáme odchylky $Z_i = X_i - \delta_0$ a určíme množinu indexů $\mathcal{I}$.
2. Spočteme $|Z_1|, \ldots, |Z_n|$.
3. Seřadíme všechny $|Z_i|$ od nejmenší do největší a získáme uspořádaný výběr

$$0 < |Z|_{(1)} < |Z|_{(2)} < \cdots < |Z|_{(n)}.$$

4. Určíme pořadí R_i náhodné veličiny $|Z_i|$ mezi všemi $|Z|_{(1)}, \ldots, |Z|_{(n)}$. Platí $|Z_i| = |Z|_{(R_i)}$.
5. Sečteme pořadí R_i pro $i \in \mathcal{I}$.

Velikost množiny $\mathcal{I}$ je rovna počtu pozorování, pro něž platí $X_i > \delta_0$ (srv. s testovou statistikou znaménkového testu).

Tvrzení 5.4 Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z libovolného spojitého rozdělení splňujícího model $\mathcal{F}$ a nechť platí $H_0 : \delta_X = \delta_0$. Pak

(i)
$$\mathsf{E}\, W_S = \frac{n(n+1)}{4}, \quad \mathsf{var}\, W_S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}.$$

(ii)
$$\frac{W_S - \mathsf{E}\, W_S}{\sqrt{\mathsf{var}\, W_S}} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti uvažujme $\delta_0 = 0$. Zaveďme náhodné veličiny $\Delta_i = \operatorname{sign}(Z_i)$. Potom

$$\mathsf{E}\, \Delta_i = 0, \qquad \mathsf{E}\, \Delta_i^2 = 1.$$

Důkaz si rozdělíme do několika kroků.

A. *Ukážeme, že* $(R_1, \ldots, R_n)^\mathsf{T}$ *a* $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)^\mathsf{T}$ *jsou nezávislé..*

Uvažujme nejprve nezávislost $|Z_i|$ a Δ_i. Pro $z > 0$ platí

$$\begin{aligned}\mathsf{P}[|Z_i| \le z, \Delta_i = 1] &= \mathsf{P}[0 \le Z_i \le z] = \tfrac{1}{2}\,\mathsf{P}[-z \le Z_i \le z] \\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathsf{P}[0 \le |Z_i| \le z] = \mathsf{P}[\Delta_i = 1]\,\mathsf{P}[|Z_i| \le z],\end{aligned}$$

kde jsme v druhé rovnosti využili toho, že rozdělení Z_i je (za nulové hypotézy) symetrické kolem nuly. Tedy $|Z_i|$ a Δ_i jsou nezávislé. Tudíž také náhodné vektory $(|Z_1|, \dots, |Z_n|)^\mathsf{T}$ a $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)^\mathsf{T}$ jsou nezávislé. A tedy také náhodné vektory $(R_1, \dots, R_n)^\mathsf{T}$ a $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)^\mathsf{T}$ jsou nezávislé.

B. *Vyjádříme si W_S pomocí R_i a Δ_i.*

Máme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n R_i\,\mathbb{1}\{\Delta_i = 1\} + \sum_{i=1}^n R_i\,\mathbb{1}\{\Delta_i = -1\} &= \sum_{i=1}^n R_i = \frac{n(n+1)}{2}, \\ \sum_{i=1}^n R_i\,\mathbb{1}\{\Delta_i = 1\} - \sum_{i=1}^n R_i\mathbb{1}\{\Delta_i = -1\} &= \sum_{i=1}^n R_i\,\Delta_i.\end{aligned}$$

Všimněme si, že $W_S = \sum_{i=1}^n R_i\,\mathbb{1}\{\Delta_i = 1\}$. „Zprůměrováním“ výše uvedeným rovnic tedy dostaneme

$$W_S = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n R_i\,\Delta_i.$$

C. *Výpočet $\mathsf{E}\,W_S$ a $\mathsf{var}\,(W_S)$.*

S využitím nezávislosti R_i a Δ_i a toho, že $\mathsf{E}\,\Delta_i = 0$

$$\mathsf{E}\,W_S = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mathsf{E}\,R_i\,\mathsf{E}\,\Delta_i = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Dále

$$\mathsf{var}\,(W_S) = \frac{1}{4}\,\mathsf{var}\left(\sum_{i=1}^n R_i\,\Delta_i\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \mathsf{var}\,(R_i\,\Delta_i) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1, j\ne i}^n \mathsf{cov}\,(R_i\,\Delta_i, R_j\,\Delta_j).$$

Spočítejme si tedy

$$\mathsf{var}\,(R_i\,\Delta_i) = \mathsf{E}\,(R_i\,\Delta_i)^2 = \mathsf{E}\,R_i^2\,\mathsf{E}\,\Delta_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

kde jsme využili $\mathsf{E}\,R_i\Delta_i = 0$, $\mathsf{E}\,\Delta_i^2 = 1$ a věty 2.16(i), dle které $\mathsf{P}[R_i = k] = \frac{1}{n}$ pro všechna $i, k \in \{1, \dots, n\}$.

Dále pro $i \ne j$ počítejme

$$\mathsf{cov}\,(R_i\,\Delta_i, R_j\,\Delta_j) = \mathsf{E}\,(R_i\,\Delta_i, R_j\,\Delta_j) = \mathsf{E}\,(R_i\,R_j)\,\mathsf{E}\,\Delta_i\,\mathsf{E}\,\Delta_j = 0,$$

kde jsme využili nezávislosti R_i a Δ_i.

Tedy celkem dostáváme

$$\mathsf{var}\,(W_S) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

□

Zde končí předn. 17 (23.11.)

Poznámka.

- Důkaz asymptotické normality vynecháváme. Důkaz je těžký v tom, že pořadí $R_1, \ldots, R_n$ nejsou nezávislé náhodné veličiny.
- Hypotézu budeme zamítat pro příliš malé nebo příliš velké hodnoty W_S.
- Není-li n příliš velké, lze nalézt i přesné rozdělení testové statistiky W_S (numericky nebo v tabulkách). Vzpomeňme si, že sdružené rozdělení vektoru pořadí $(R_1, \ldots, R_n)^\mathsf{T}$ nám dává věta 2.15.

Asymptotické rozdělení testové statistiky za H_0:

$$U_n = \frac{W_S - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \overset{\text{as.}}{\sim} \mathsf{N}(0,1)$$

Kritický obor (asymptotický test):

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow |U_n| > u_{1-\alpha/2}.$$

P-hodnota (asymptotická): $p = 2(1 - \Phi(|u_n|))$, kde u_n je napozorovaná hodnota testové statistiky U_n.

Poznámka. Jednovýběrový Wilcoxonův test bere v úvahu i velikost odchylek od δ_0, nikoli jen jejich znaménko (jako znaménkový test). Jeho síla pro testování mediánu je obecně větší než síla znaménkového testu. Hladinu však dodržuje pouze tehdy, je-li rozdělení jednotlivých pozorování symetrické, zatímco znaménkový test takový předpoklad nevyžaduje.

Porušení předpokladů

Shody kvůli zaokrouhlování Kvůli zaokrouhlování bývají v aplikacích v datech často shody. V tomto případě jako u znaménkového testu nejdříve odstraníme pozorování, která se rovnají přesně δ_0. Testová statistika W_S se pak spočte ze zbývajících dat a v případě shod pracuje s tzv. průměrným pořadím. Pak se dá ukázat, že za nulové hypotézy

$$\frac{W_S - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - kor.}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1),$$

kde n je již (případně zmenšený) rozsah výběru a $kor.$ je korekce rozptylu daná předpisem

$$kor. = \frac{1}{48} \sum_z (t_z^3 - t_z),$$

kde t_z značí počet, kolikrát se mezi hodnotami $|Z_1| \ldots, |Z_n|$ vyskytla hodnota z. Suma $\sum_z$ pak značí sčítání přes všechny rozdílné hodnoty množiny $\{|Z_1| \ldots, |Z_n|\}$.

Za povšimnutí stojí, že bez úpravy jmenovatele pomocí $kor.$ by byl test konzervativní.

Nesymetrie. V případě, že hustota f není symetrická, pak testovaný parametr není medián pozorování X_i, ale tzv. *pseudo-medián*, což je medián náhodné veličiny $\frac{X_1+X_2}{2}$. Problém pseudo-mediánu je jeho obtížná interpretace. Obecně lze pouze říct, že jeho hodnota je někde mezi mediánem m_X a střední hodnotou $\mathsf{E}\, X_i$ (pokud tato střední hodnota existuje).

Dalším nepříjemným důsledkem asymetrie pak je, že i pokud se díváme na jednovýběrový Wilcoxonův test jako na test o pseudo-mediánu, tak jeho skutečná hladina (ať již přesná nebo asymptotická) je odlišná od předepsaného α. Nicméně se ukazuje, že tato odchylka je vcelku malá i pro natolik asymetrická rozdělení jako je například exponenciální. Pokud tedy data nevykazují naprosto očividnou asymetrii, je tedy hlavním problémem interpretace pseudo-mediánu.

5.6 Jednovýběrový χ^2 test na rozptyl

Jednovýběrový χ^2 test na rozptyl* je přesný test vyžadující normální rozdělení pozorovaných dat.

Model: $\mathcal{F} = \{\mathsf{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$

Testovaný parametr: Rozptyl $\sigma_X^2 = \mathsf{var}\, X_i$.

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_0^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_0^2,$$

kde σ_0^2 je předem daná konstanta.

Testová statistika:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2},$$

kde S_n^2 je výběrový rozptyl (viz definice 2.4).

Přesné rozdělení testové statistiky za H_0:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

podle věty 2.8 (i).

Kritický obor: Hypotézu zamítneme, pokud se výběrový rozptyl příliš liší od hypotetického rozptylu, tj. pokud je testová statistika buď moc velká nebo moc malá.

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1}(\alpha/2) \text{ nebo } \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2),$$

kde $\chi^2_{n-1}(\alpha/2)$ a $\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$ jsou po řadě $(\alpha/2)$-tý a $(1-\alpha/2)$-tý kvantil χ^2 rozdělení s $n-1$ stupni volnosti.

P-hodnota: $p = 2\min(1 - F_n(s), F_n(s))$, kde s je pozorovaná hodnota testové statistiky a F_n je distribuční funkce rozdělení χ^2_{n-1}.

Interval spolehlivosti pro σ_X^2: (viz (3.4))

$$\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)} \right)$$

* Angl. *one-sample chi-square variance test*

Poznámka.

- Při porušení předpokladu normality tento test nedodržuje hladinu ani asymptoticky. V tomto případě lze zkonstruovat test na základě asymptotického rozdělení S_n^2, viz Věta 2.6(iii).
- Tento test lze převést na jednostranný test: Hypotéza $H_0' : \sigma_X^2 \leq \sigma_0^2$ se zamítá pouze pro příliš velké hodnoty testové statistiky, kritická hodnota je $\chi^2_{n-1}(1-\alpha)$. Hypotéza $H_0'' : \sigma_X^2 \geq \sigma_0^2$, se zamítá pouze pro příliš malé hodnoty testové statistiky, kritická hodnota je $\chi^2_{n-1}(\alpha)$.

5.7 Párové testy

Uvažujme náhodný výběr

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

dvousložkových náhodných vektorů s dvourozměrnou distribuční funkcí. Chceme porovnat nějakou charakteristiku marginálního rozdělení F_X náhodné veličiny X_i se stejnou charakteristikou marginálního rozdělení F_Y náhodné veličiny Y_i. Pozorování X_i a Y_i ovšem nejsou nezávislá.

Hlavní myšlenka párových testů je jednoduchá: Vezmeme rozdíly $Z_i = X_i - Y_i$ (jež tvoří náhodný výběr z nějakého jednorozměrného rozdělení) a na ně provedeme vhodný jednovýběrový test. Musíme se však zamyslet na tím, jestli hypotéza testovaná jednovýběrovým testem provedeným na Z_i má nějakou rozumnou interpretaci pro porovnání rozdělení X_i a Y_i. Někdy tomu tak je, ale v řadě případů taková interpretace neexistuje (např. párový Kolmogorovův-Smirnovův test rozumnou interpretaci nemá).

Nechť například jednovýběrový test provedený na rozdíly Z_i testuje střední hodnotu, třeba $H_0 : \mathsf{E}\, Z_i = 0$. Tato hypotéza je splněna právě tehdy, když $\mathsf{E}\, X_i = \mathsf{E}\, Y_i$ a výsledný test tedy testuje rovnost středních hodnot X_i a Y_i.

U jiných charakteristik toto neplatí: testujeme-li nulovost mediánu Z_i, neznamená to bez dalších předpokladů, že se za platnosti této hypotézy rovnají mediány X_i a Y_i. Testování rozptylu Z_i jednovýběrovým testem pak neříká vůbec nic o tom, jak a v čem se liší rozdělení X_i od rozdělení Y_i.

Párové testy lze použít pouze na intervalové a poměrové veličiny, jinak by rozdíly hodnot neměly smysluplnou interpretaci. Typicky je používáme na uspořádané dvojice měření téže veličiny na dvou přirozeně spárovaných jednotkách (např. levé oko – pravé oko, manžel – manželka) nebo dvě opakovaná měření téže veličiny na téže jednotce (např. před zásahem – po zásahu, loni – letos).

Hypotéza nulového efektu

V aplikacích vyjadřuje náhodný vektor $(X_i, Y_i)^\mathsf{T}$ měření před a po nějakém ošetření*. Nulová hypotéza pak říká, že ošetření nemělo žádný vliv. Tj. testujeme

$$H_0 : F_X(x) = F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad H_1 : \exists x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) \neq F_Y(x), \tag{5.2}$$

kde F_X a F_Y jsou (marginální) distribuční funkce náhodných veličin X_i a Y_i.

* Angl. *treatment*

Je třeba si uvědomit, že každý z níže uvedených testů se zaměřuje pouze na určitý způsob porušení nulové hypotézy vyjádřené v (5.2).

5.8 Přesný párový t-test

Párový t-test* se provádí jako jednovýběrový t-test na rozdíly Z_i. Předpokládá se normalita rozdílů Z_i, nikoli nutně normalita původních pozorování X_i a Y_i.

Model: $\mathcal{F} = \{Z_i = X_i - Y_i \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$

Testované parametry: Střední hodnoty $\mu_X = \mathsf{E}\, X_i$ a $\mu_Y = \mathsf{E}\, Y_i$.

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0, \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq d_0,$$

kde d_0 je předem daná konstanta (obvykle $d_0 = 0$).

Testová statistika:

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{Z}_n - d_0}{S_n^{(Z)}},$$

kde $\overline{Z}_n$ je aritmetický průměr rozdílů Z_i (což je rovno $\overline{X}_n - \overline{Y}_n$) a $S_n^{(Z)}$ je výběrová směrodatná odchylka rozdílů Z_i. Všimněme si, že

$$S_n^{2(Z)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i - \overline{X}_n + \overline{Y}_n)^2 = S_n^{2(X)} - 2S_n^{X,Y} + S_n^{2(Y)},$$

kde $S_n^{2(X)}$ a $S_n^{2(Y)}$ jsou příslušné výběrové rozptyly a $S_n^{X,Y}$ je výběrová kovariance.

Rozdělení testové statistiky za H_0:

$$T_n \sim t_{n-1}$$

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow |T_n| > t_{n-1}(1-\alpha/2),$$

kde $t_{n-1}(1-\alpha/2)$ je $(1-\alpha/2)$-tý kvantil t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti.

P-hodnota: $p = 2(1 - F_n(|t|))$, kde t je pozorovaná hodnota testové statistiky a F_n je distribuční funkce rozdělení t_{n-1}.

Interval spolehlivosti pro $\mu_X - \mu_Y$: Vypracujte samostatně.

Poznámka. Pro $d_0 = 0$ bychom se mohli na tento test dívat jako na test hypotézy nulového efektu (5.2). Z tohoto pohledu bude test citlivý na rozdíl ve středních hodnotách. Naopak test nebude konzistentní, pokud sice H_0 v (5.2) platit nebude, ale bude $\mathsf{E}\, Z_i = 0$. Tj. ošetření nebude mít efekt na střední hodnotu $\mathsf{E}\, Y_i$ ale pouze například na rozptyl $\mathsf{var}\, Y_i$.

* Angl. *paired t-test*

5.9 Asymptotický párový t-test

Jde o párový t-test provedený za slabších předpokladů konečného druhého momentu Z_i. Jeho vlastnosti jsou stejné, ale platí pouze asymptoticky.

Model: $\mathcal{F} = \{Z_i = X_i - Y_i \in \mathcal{L}_+^2\}$

Testované parametry: Střední hodnoty $\mu_X = \mathsf{E}\, X_i$ a $\mu_Y = \mathsf{E}\, Y_i$.

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = d_0, \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq d_0,$$

kde d_0 je předem daná konstanta (obvykle $d_0 = 0$).

Testová statistika:

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{Z}_n - d_0}{S_n^{(Z)}},$$

kde $\overline{Z}_n$ je aritmetický průměr rozdílů Z_i (což je rovno $\overline{X}_n - \overline{Y}_n$) a $S_n^{(Z)}$ je výběrová směrodatná odchylka rozdílů Z_i.

Rozdělení testové statistiky za H_0:

$$T_n \overset{\text{as.}}{\sim} \mathsf{N}(0,1)$$

Asymptotické rozdělení však lze aproximovat i rozdělením t_{n-1}.

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow |T_n| > t_{n-1}(1-\alpha/2),$$

kde $t_{n-1}(1-\alpha/2)$ je $(1-\alpha/2)$-tý kvantil t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti.

P-hodnota: $p = 2(1 - F_n(|t|))$, kde t je pozorovaná hodnota testové statistiky a F_n je distribuční funkce rozdělení t_{n-1}.

Poznámka. Pro test hypotézy nulového efektu (5.2) platí to, co bylo řečeno u přesného párového t-testu.

5.10 Párový znaménkový test

Párový znaménkový test* se provádí jako jednovýběrový znaménkový test na rozdíly Z_i. Předpokládá se spojitost rozdílů Z_i.

Model: $\mathcal{F} = \{Z_i$ má jakékoli spojité rozdělení$\}$

Testovaný parametr: Medián m_Z rozdílu $Z_i = X_i - Y_i$.

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : m_Z = 0, \quad H_1 : m_Z \neq 0.$$

Poznámka.

1. Medián Z_i obecně nelze vyjádřit pomocí mediánů X_i a Y_i.
2. H_0 platí právě když $\mathsf{P}[X_i \leq Y_i] = \mathsf{P}[X_i \geq Y_i] = 1/2$, tj. X_i je s poloviční pravděpodobností větší než Y_i a s poloviční pravděpodobností menší než Y_i. Tj. jako test hypotézy nulového efektu (5.2) bude test konzistentní, pokud se vliv ošetření promítne do rozdělení Y_i tak, že $\mathsf{P}[X_i \geq Y_i] \neq 1/2$.

* Angl. *paired sign test*

3. Pokud bychom zobecnili nulovou hypotézu a alternativu na

$$H_0 : m_Z = m_0, \quad H_1 : m_Z \neq m_0,$$

tak vlastně testujeme, že $\mathsf{P}[X_i \leq Y_i + m_0] = \mathsf{P}[X_i \geq Y_i + m_0] = 1/2$.
4. Má-li navíc Z_i konečnou střední hodnotu a hustotu symetrickou kolem 0, pak musí platit $\mathsf{E}\, Z_i = \mathsf{E}\, X_i - \mathsf{E}\, Y_i = 0$. Za těchto dodatečných předpokladů je H_0 ekvivalentní hypotéze o rovnosti středních hodnot X_i a Y_i.
5. Není to test shody mediánů X_i a Y_i.

Testová statistika:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{Z_i > 0\}$$

(počet párů, kde $X_i > Y_i$).

Přesné rozdělení testové statistiky za H_0:

$$Y_n \sim \mathsf{Bi}(n, 1/2)$$

Kritický obor (přesný test): Viz jednovýběrový znaménkový test.

Asymptotické rozdělení testové statistiky za H_0:

$$\frac{2}{\sqrt{n}}\Big(Y_n - \frac{n}{2}\Big) \overset{\text{as.}}{\sim} \mathsf{N}(0,1)$$

Kritický obor (asymptotický test):

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow \left|\frac{2}{\sqrt{n}} Y_n - \sqrt{n}\right| > u_{1-\alpha/2}.$$

Poznámka. Výhodou párového znaménkového testu je, že nevyžaduje vyčíslení rozdílu mezi X_i a Y_i. Stačí informace o tom, že X_i je „lepší“ než Y_i, resp. X_i je „horší“ než Y_i. Tento test je vhodný pro aplikace, v nichž může být určení konkrétních hodnot X_i a Y_i problematické.

Zde končí předn. 18 (28.11.)

5.11 Párový Wilcoxonův test

Párový Wilcoxonův test* porovnává střední hodnoty X_i a Y_i. Kvůli interpretaci hypotézy vyžaduje jak symetrii rozdělení Z_i tak konečnou střední hodnotu. Je to neparametrický test založený na pořadích.

Model: $\mathcal{F} = \{Z_i$ má spojité rozdělení s konečnou střední hodnotou a s hustotou f splňující $\exists \delta \in \mathbb{R} : f(\delta - x) = f(\delta + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$

Poznámka. Předpoklad o symetrické hustotě se týká rozdílů Z_i, nikoli původních pozorování X_i a Y_i. Předpoklady symetrie a konečné střední hodnoty zajišťují, že $\delta_X \overset{\text{df}}{=} \mathsf{E}\, Z_i = \mathsf{E}\, X_i - \mathsf{E}\, Y_i$.

* Angl. *paired Wilcoxon test, Wilcoxon signed rank test*

Testované parametry: Střední hodnoty $\mu_X = \mathsf{E}\, X_i$ a $\mu_Y = \mathsf{E}\, Y_i$.
Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0, \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq \delta_0,$$

kde δ_0 je předem daná konstanta (obvykle $\delta_0 = 0$).
Testová statistika:

$$W_S = \sum_{i \in \mathcal{I}} R_i,$$

kde $\mathcal{I} \subset \{1, \ldots, n\}$ je množina všech indexů takových, že $Z_i^* \overset{\mathsf{df}}{=} X_i - Y_i - \delta_0$ má kladné znaménko pro $i \in \mathcal{I}$, a $R_1 < R_2 < \cdots < R_n$ jsou pořadí náhodných veličin $\left|Z_i^*\right|$ mezi všemi $\left|Z_1^*\right|, \ldots, |Z_n^*|$.
Vlastnosti testové statistiky a kritický obor: viz jednovýběrový Wilcoxonův test.

Poznámka.

1. K testování hypotézy H_0 je asymptotický párový t-test zpravidla vhodnější než párový Wilcoxonův test, protože nevyžaduje symetrii hustoty.
2. Pro $\delta_0 = 0$ můžeme použít test na testování hypotézy nulového efektu (5.2). Všimněme si, že v tomto případě je za nulové hypotézy rozdělení náhodné veličiny $Z_i = X_i - Y_i$ symetrické kolem nuly, tj. test bude dodržovat předepsanou hladinu. Je však nutné si uvědomit, že test bude konzistentní pouze proti alternativám, pro které je pseudomedián Z_i (tj. medián $\frac{Z_1+Z_2}{2}$) nenulový.

6 Dvouvýběrové problémy pro kvantitativní data

Mějme dva *nezávislé* náhodné výběry: nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr s distribuční funkcí F_X a $Y_1, \ldots, Y_m$ je náhodný výběr s distribuční funkcí F_Y. Model $\mathcal{F}$ specifikuje množinu uvažovaných distribučních funkcí F_X a F_Y. Máme daný parametr $\theta = t(F)$, jehož hodnotu chceme pro oba výběry porovnat. Označme si $\theta_X = t(F_X)$ a $\theta_Y = t(F_Y)$. Obvykle chceme testovat hypotézu $H_0 : \theta_X = \theta_Y$ proti alternativě $H_1 : \theta_X \neq \theta_Y$, případně sestrojit intervalový odhad pro rozdíl $\theta_X - \theta_Y$.

Dvouvýběrový problém lze zformulovat i jiným způsobem. Mějme náhodný výběr z dvourozměrného rozdělení

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ G_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} Z_N \\ G_N \end{pmatrix},$$

kde Z_j jsou hodnoty nezávislých stejně rozdělených měření a G_j má alternativní rozdělení s parametrem $p_G \in (0, 1)$. Indikátor G_j určuje, do které z porovnávaných skupin j-té pozorování patří (jestliže $G_j = 0$, pak do první skupiny, jinak do druhé). Přeznačíme-li si měření Z_j na X_i anebo Y_i podle toho, do jaké skupiny dané pozorování patří

$$(X_1, \ldots, X_n) \overset{\mathsf{df}}{=} (Z_j : G_j = 0) \quad \text{a} \quad (Y_1, \ldots, Y_m) \overset{\mathsf{df}}{=} (Z_j : G_j = 1),$$

získáme dva nezávislé výběry podle první formulace problému. Chceme porovnat podmíněné rozdělení Z_j v obou skupinách, tj. zajímají nás podmíněné distribuční funkce $F_X(x) = \mathsf{P}[Z_j \leq x \,|\, G_j = 0]$ a $F_Y(x) = \mathsf{P}[Z_j \leq x \,|\, G_j = 1]$. Případně jejich parametry $\theta_X = t(F_X)$ a $\theta_Y = t(F_Y)$. Tato druhá formulace dvouvýběrového problému je totožná s první, až na to, že rozsahy výběrů n a m nejsou konstanty, ale náhodné veličiny s binomickým rozdělením ($n = \sum_{j=1}^{N}(1 - G_j) \sim \mathsf{Bi}(N, 1 - p_G)$). Analýzu však provádíme stejně, jako by rozsahy výběrů byly pevné.

Data podle první formulace získáme tak, že si předem stanovíme, kolik měření z každé skupiny budeme mít, a pak napozorujeme požadovaný počet veličin pro každou skupinu zvlášť. Data podle druhé formulace vzniknou, pokud stanovíme celkový počet pozorování $N = n + m$, učiníme N pozorování a u každého pozorování teprve dodatečně určíme, do které skupiny patří.

Obě formulace se trochu liší v pojetí asymptotických výsledků. U druhé formulace stačí vzít $N \to \infty$. U první formulace potřebujeme $n \to \infty$ a $m \to \infty$, ale navíc ještě musíme předpokládat, že rozsahy obou výběrů konvergují do nekonečna stejně rychle, tj. $n/m \to q$, kde $0 < q < \infty$.

Všechny metody uváděné v této kapitole se hodí pro obě formulace dvouvýběrového problému.

6.1 Dvouvýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test

Dvouvýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test* je rozšířením jednovýběrového testu stejného názvu. Je to neparametrický test, funguje pro jakákoli dvě spojitá rozdělení.

Model: $\mathcal{F} = \{\text{všechna spojitá rozdělení}\}$

Testované parametry: celé distribuční funkce F_X a F_Y

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : F_X(x) = F_Y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_1 : \exists x \in \mathbb{R} : F_X(x) \neq F_Y(x). \tag{6.1}$$

Testujeme, zdali oba výběry pocházejí z téhož rozdělení. Tuto hypotézu budeme dále nazývat **hypotézou nulového rozdílu**.

Testová statistika:

$$K_{n,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{F}_X(x) - \widehat{F}_Y(x) \right|,$$

kde $\widehat{F}_X$ je empirická distribuční funkce náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$ a $\widehat{F}_Y$ je empirická distribuční funkce náhodného výběru $Y_1, \ldots, Y_m$.

Tvrzení 6.1 Nechť $X_1, \ldots, X_n$ a $Y_1, \ldots, Y_m$ jsou nezávislé náhodné výběry ze spojitého rozdělení s distribuční funkcí F_0. Potom

$$\sqrt{\tfrac{mn}{n+m}}\, K_{n,m} \xrightarrow{\mathrm{d}} Z, \text{ pro } m, n \to \infty,$$

kde náhodná veličina Z má distribuční funkci danou předpisem (5.1).

Poznámka.

- Hypotézu zamítneme, pokud se empirické distribuční funkce obou výběrů od sebe příliš liší, tj. pokud je testová statistika velká.
- Tvrzení 6.1 implikuje, že za platnosti hypotézy konverguje $\sqrt{\frac{mn}{n+m}} K_{n,m}$ v distribuci k náhodné veličině s distribuční funkcí $G(y)$, která je stejná jako u jednovýběrového Kolmogorovova-Smirnovova testu (viz tvrzení 5.2). To nám umožní určit kritickou hodnotu pro zamítání H_0.

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow \sqrt{\tfrac{mn}{n+m}}\, K_{n,m} > k_{1-\alpha}, \tag{6.2}$$

kde $k_{1-\alpha} = G^{-1}(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení s distribuční funkcí G.

Podle tvrzení 6.1 má tento test asymptotickou hladinu α.

Poznámka.

- Je možné spočítat i přesnou kritickou hodnotu dvouvýběrového Kolmogorovova-Smirnovova testu pro spojitá rozdělení s malými rozsahy výběru n, m.

* Angl. *two-sample Kolmogorov-Smirnov test*

- Všimněme si, že za alternativy pro $m, n \to \infty$,

$$K_{n,m} \xrightarrow{\mathsf{P}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_X(x) - F_Y(x)| > 0 \implies \sqrt{\tfrac{mn}{n+m}}\, K_{n,m} \xrightarrow{\mathsf{P}} \infty.$$

  Tudíž test je konsistentní (proti jakékoliv alternativě). Test tedy reaguje na jakýkoli rozdíl v rozděleních obou skupin. Další výhodou testu je absence omezujících předpokladů. Nevýhodou tohoto testu je, že má malou sílu proti specifickým druhům porušení H_0. Zajímá-li nás (nebo očekáváme-li) pouze určitý typ porušení H_0 (třeba rozdíl ve střední hodnotě), je lepší použít test, který je zaměřen přímo na určitý parametr.

Porušení předpokladů

Pokud výběry za nulové hypotézy pochází z diskrétního rozdělení (tj. F_0 není spojitá), tak test s kritickým oborem (6.2) bude konzervativní.

Podobně pokud „diskrétnost“ vznikne v důsledku zaokrouhlování. V tomto případě je však zapotřebí předpokládat, že způsob zaokrouhlování je pro oba dva výběry stejný.

6.2 Přesný dvouvýběrový t-test

Dvouvýběrový t-test* porovnává střední hodnoty obou výběrů za předpokladu, že data mají normální rozdělení a rozptyly jsou v obou výběrech stejné. Test pak zachovává požadovanou hladinu přesně pro jakékoli $n, m \geq 2$.

Model:

$$\mathcal{F} = \{F_X = \mathsf{N}(\mu_X, \sigma^2), F_Y = \mathsf{N}(\mu_Y, \sigma^2), \mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$$

Oba výběry mají normální rozdělení s totožným rozptylem, mohou se lišit pouze střední hodnotou.

Testované parametry: Střední hodnoty $\mu_X = \mathsf{E}\, X_i$ a $\mu_Y = \mathsf{E}\, Y_j$.

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y + \delta_0, \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y + \delta_0.$$

Testujeme, zdali se střední hodnoty obou výběrů liší o δ_0 (obvykle se klade $\delta_0 = 0$).

Testová statistika:

$$T_{n,m} = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - \delta_0}{\sqrt{S^2_{n,m}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}}\, \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - \delta_0}{S_{n,m}},$$

kde $\overline{X}_n$ a $\overline{Y}_m$ jsou aritmetické průměry obou výběrů a

$$S^2_{n,m} \overset{\mathsf{df}}{=} \frac{1}{n+m-2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 + \sum_{j=1}^{m}(Y_j - \overline{Y}_m)^2\right] = \frac{n-1}{n+m-2}S^2_X + \frac{m-1}{n+m-2}S^2_Y$$

je nestranný odhad společného rozptylu σ^2 spočítaný z obou výběrů (vážený průměr obou výběrových rozptylů).

* Angl. *two-sample t-test*

Věta 6.2 Nechť $X_1, \ldots, X_n$ a $Y_1, \ldots, Y_m$ jsou nezávislé náhodné výběry z normálních rozdělení se středními hodnotami μ_X a μ_Y a se shodným rozptylem σ^2. Pak

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\,\frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{S_{n,m}} \sim t_{n+m-2}.$$

Důkaz. Přepišme

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\,\frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{S_{n,m}} = \frac{U}{\sqrt{Z/(n+m-2)}},$$

kde

$$U = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \quad \text{a} \quad Z = \frac{(n+m-2)\,S^2_{n,m}}{\sigma^2}.$$

K dokončení důkazu stačí ukázat, že (1) $U \sim \mathsf{N}(0,1)$, (2) $Z \sim \chi^2_{n+m-2}$ a (3) U je nezávislé se Z.

(1) $U \sim \mathsf{N}(0,1)$. K tomu si stačí uvědomit, že díky nezávislosti náhodných výběrů jsou také $\overline{X}_n$ a $\overline{Y}_m$ nezávislé a platí

$$\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y) \sim \mathsf{N}(0, \tfrac{\sigma^2}{n} + \tfrac{\sigma^2}{m}).$$

Tedy

$$U = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim \mathsf{N}(0,1).$$

(2) $Z \sim \chi^2_{n+m-2}$. Díky vlastnosti χ^2-rozdělení

$$Z = \frac{(n+m-2)\,S^2_{n,m}}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\,S^2_X}{\sigma^2} + \frac{(m-1)\,S^2_Y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2},$$

kde jsme využili nezávislosti S^2_X a S^2_Y a toho, že díky větě 2.8(i) $\frac{(n-1)\,S^2_X}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, $\frac{(m-1)\,S^2_Y}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$.

(3) Nezávislost U a Z. Díky nezávislosti náhodných výběrů jsou náhodné vektory $(\overline{X}_n, S^2_X)^\mathsf{T}$ a $(\overline{Y}_m, S^2_Y)^\mathsf{T}$ nezávislé. Dále z věty 2.8(ii) jsou náhodné veličiny $\overline{X}_n$ a S^2_X nezávislé a podobně také náhodné veličiny $\overline{Y}_n$ a S^2_Y jsou nezávislé. Tudíž také náhodné veličiny $\overline{X}_n - \overline{Y}_m$ a $S^2_{n,m}$ jsou nezávislé. Odtud již plyne nezávislost U a Z. □

Zde končí předn. 19 (30.11.)

Poznámka.

- Z věty 6.2 plyne, že za platnosti modelu $\mathcal{F}$ a hypotézy $H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0$ má $T_{n,m}$ rozdělení t_{n+m-2}.
- Hypotézu budeme zamítat, pokud se výběrové průměry obou skupin od sebe příliš liší, tj. pokud je testová statistika buď moc velká nebo moc malá.

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow |T_{n,m}| > t_{n+m-2}(1-\alpha/2),$$

kde $t_{n+m-2}(1-\alpha/2)$ je $(1-\alpha/2)$-tý kvantil t-rozdělení s $n+m-2$ stupni volnosti.

P-hodnota: $p = 2(1-F(|t|))$, kde t je pozorovaná hodnota testové statistiky $T_{n,m}$ a F je distribuční funkce rozdělení t_{n+m-2}.

Interval spolehlivosti pro $\mu_X - \mu_Y$: Z věty 6.2 lze odvodit přesný interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot obou výběrů. Dostaneme

$$\mathsf{P}\Big[\overline{X}_n - \overline{Y}_m - S_{n,m}\sqrt{\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}}\, t_{n+m-2}(1-\alpha/2) < \mu_X - \mu_Y < \overline{X}_n - \overline{Y}_m + S_{n,m}\sqrt{\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}}\, t_{n+m-2}(1-\alpha/2)\Big] = 1-\alpha.$$

Poznámka. Tento test lze snadno upravit na jednostranný.

Porušení předpokladů

Porušení normality. Pokud data nemají normální rozdělení, nicméně stále platí shodnost rozptylů, tj. $\mathsf{var}\,(X_i) = \mathsf{var}\,(Y_j)$, pak za nulové hypotézy

$$T_{n,m} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1), \text{ pro } m,n \to \infty,$$

tj. test není přesný, ale asymptotický.

Porušení shodnosti rozptylů. Označme

$$\sigma_X^2 = \mathsf{var}\,(X_i), \quad \sigma_Y^2 = \mathsf{var}\,(Y_j)$$

a předpokládejme, že $n/(n+m) \to \lambda$. Potom za nulové hypotézy

$$T_{n,m} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,\sigma_*^2), \text{ pro } m,n \to \infty, \tag{6.3}$$

kde

$$\sigma_*^2 = \frac{(1-\lambda)\sigma_X^2 + \lambda\sigma_Y^2}{\lambda\sigma_X^2 + (1-\lambda)\sigma_Y^2}.$$

Všimněme si, že pro $\lambda = \frac{1}{2}$ je $\sigma_*^2 = 1$ a tedy (pro přibližně) stejné rozsahy výběru test dodržuje hladinu asymptoticky.

Obecně však test nedodržuje předepsanou hladinu ani asymptoticky. Přičemž stojí za povšimnutí, že například pokud $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ a $\lambda < \frac{1}{2}$ (tj. větší rozptyl je ve výběru s menším rozsahem), pak $\sigma_*^2 > 1$ a test je (asymptoticky) anti-konzervativní.

T-test jako test hypotézy nulového rozdílu

Pro $\delta_0 = 0$ můžeme na test nahlížet jako na test hypotézy nulového rozdílu (6.1). V tomto případě sice nemáme zaručenu normalitu, ale za nulové hypotézy jsou rozptyly shodné. Test tedy budu dodržovat hladinu asymptoticky.

Co se týká síly testu, tak test bude konsistentní vůči alternativám, pro které $\mu_X - \mu_Y \neq 0$. Pokud se však kromě změny střední hodnoty budou rozdělení F_X a F_Y lišit také rozptylem, tak vliv rozdílnosti těchto rozptylů nemáme pod kontrolou. Rozdílné rozptyly mohou zvyšovat či snižovat sílu testu. Navíc při zamítnutí nulové hypotézy (6.1) můžeme pouze tvrdit, že jsme prokázali rozdílnost rozdělení F_X a F_Y. Toto zamítnutí však nemůžeme přisuzovat pouze k rozdílům středních hodnot, protože k němu mohla přispět i rozdílnost rozptylů.

Cvičení. Dokažte (6.3).
Návod: Vhodně modifikujte důkaz věty 6.3.

6.3 Asymptotický dvouvýběrový z-test

Nyní upravíme dvouvýběrový t-test tak, aby se obešel bez předpokladu normality i bez shodných rozptylů. Půjde o asymptotický test.

Model:

$$\mathcal{F} = \{F_X \in \mathcal{L}^2_+, F_Y \in \mathcal{L}^2_+\}.$$

Testované parametry: Střední hodnoty $\mu_X = \mathsf{E}\, X_i$ a $\mu_Y = \mathsf{E}\, Y_i$.

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y + \delta_0, \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y + \delta_0.$$

Testujeme, zdali se střední hodnoty obou výběrů liší o δ_0 (obvykle se klade $\delta_0 = 0$).

Testová statistika:

$$Z_{n,m} = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - \delta_0}{\sqrt{S_X^2/n + S_Y^2/m}},$$

kde $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_m$ jsou aritmetické průměry obou výběrů a S_X^2, S_Y^2 jsou výběrové rozptyly.

Věta 6.3 Nechť $X_1, \ldots, X_n$ a $Y_1, \ldots, Y_m$ jsou nezávislé náhodné výběry z rozdělení se středními hodnotami μ_X a μ_Y a konečnými rozptyly. Pak

$$\frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{S_X^2/n + S_Y^2/m}} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1) \text{ pro } m, n \to \infty, \tfrac{n}{m} \to q \in (0, \infty).$$

Důkaz. Přepišme

$$\frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{S_X^2/n + S_Y^2/m}} = \frac{\sqrt{m}(\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y))}{\sqrt{S_X^2 \frac{m}{n} + S_Y^2}}$$

Z konzistence výběrového rozptylu $S_X^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} \sigma_X^2$, $S_Y^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} \sigma_Y^2$ a tudíž díky větě o spojité transformaci (tvrzení 1.2) $\sqrt{S_X^2 \frac{m}{n} + S_Y^2} \xrightarrow{\mathsf{P}} \sqrt{\sigma_X^2/q + \sigma_Y^2}$. Tedy s využitím Cramérovy-Sluckého věty (tvrzení 1.3) stačí ukázat, že

$$\sqrt{m}\,(\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu_X - \mu_Y)) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma_X^2/q + \sigma_Y^2). \tag{6.4}$$

Z centrální limitní věty $\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu_X) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma_X^2)$ a tudíž

$$\sqrt{m}\,(\overline{X}_n - \mu_X) = \sqrt{\tfrac{m}{n}}\,\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu_X) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma_X^2/q).$$

Dále díky centrální limitní větě

$$\sqrt{m}(\overline{Y}_m - \mu_Y) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \sigma_Y^2).$$

Nyní s využitím nezávislosti $\overline{X}_n$ a $\overline{Y}_m$

$$\sqrt{m}\begin{pmatrix}\overline{X}_n - \mu_X \\ \overline{Y}_m - \mu_Y\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_X^2/q & 0\\ 0 & \sigma_Y^2\end{pmatrix}\right).$$

Tudíž také pro všechny $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\sqrt{m}\begin{pmatrix}\overline{X}_n - \mu_X \\ \overline{Y}_m - \mu_Y\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\Sigma\boldsymbol{c}).$$

(6.4) nyní plyne z výše uvedené konvergence pro $\boldsymbol{c} = (1, -1)^\mathsf{T}$.

□

Poznámka.

- Hypotézu budeme zamítat, pokud se výběrové průměry obou skupin od sebe příliš liší, tj. pokud je testová statistika buď moc velká nebo moc malá.
- Věta 6.3 implikuje, že za platnosti modelu $\mathcal{F}$ a hypotézy H_0 má $Z_{n,m}$ asymptoticky rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$.

Poznámka. Nechť oba výběry mají stejný rozsah, tj. $m = n$. Potom

$$\sqrt{S_X^2/n + S_Y^2/m} = \sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{S_X^2/2 + S_Y^2/2} = \sqrt{\frac{n+m}{nm}}S_{n,m}.$$

V tomto případě tedy vždy platí $Z_{n,m} = T_{n,m}$, tj. testové statistiky dvouvýběrového t-testu a z-testu jsou totožné. Jelikož věta 6.3 platí i bez předpokladu shodných rozptylů, při $n = m$ dostatečně velkém lze rozdělení $T_{n,m}$ za platnosti H_0 aproximovat rozdělením t_{n+m-2} bez ohledu na to, jsou-li rozptyly stejné nebo ne. *Dvouvýběrový t-test tedy funguje alespoň asymptoticky i tehdy, pokud jsou rozptyly v obou výběrech různé, ale počty pozorování jsou shodné (nebo aspoň velmi podobné).*

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow |Z_{n,m}| > u_{1-\alpha/2},$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je $(1-\alpha/2)$-tý kvantil normovaného normálního rozdělení.

P-hodnota: $p = 2(1 - \Phi(|z|))$, kde z je pozorovaná hodnota testové statistiky $Z_{n,m}$ a Φ je distribuční funkce rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$.

Interval spolehlivosti pro $\mu_X - \mu_Y$: Z věty 6.3 lze odvodit asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot obou výběrů. Pro $n, m \to \infty$ dostáváme

$$\mathsf{P}\left[\overline{X}_n - \overline{Y}_m - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\tfrac{S_X^2}{n} + \tfrac{S_Y^2}{m}} < \mu_X - \mu_Y < \overline{X}_n - \overline{Y}_m + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\tfrac{S_X^2}{n} + \tfrac{S_Y^2}{m}}\right] \to 1 - \alpha.$$

Poznámka. Existují i lepší aproximace kritických hodnot pro tento test založené na t-rozdělení s počtem stupňů volnosti, který závisí na počtu pozorování v obou skupinách a výběrových rozptylech. Takových aproximací je několik[*]. Jedna z variant této aproximace, tzv. Welchův test[†], je implementována v R jako standardní metoda testování rovnosti středních hodnot dvou výběrů (provádí jej funkce `t.test`). V této variantě se používají jako kritické hodnoty kvantily t-rozdělení se stupni volnosti f danými vzorcem

$$f = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{(S_X^2)^2}{n^2(n-1)} + \frac{(S_Y^2)^2}{m^2(m-1)}}.$$

Tento vzorec byl odvozen na základě aproximace rozdělení náhodné veličiny $\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}$ z čitatele testové statistiky pomocí násobku χ^2-rozdělení s „vhodným“ počtem stupňů volnosti (detaily lze nalézt Welch, 1938).

Welchův test lze chápat jako variantu dvouvýběrového z-testu s vylepšenými kritickými hodnotami i jako zobecnění dvouvýběrového t-testu na výběry s nestejnými rozptyly.

Poznámka. Někdy se doporučuje před použitím dvouvýběrového t-testu otestovat shodnost rozptylů obou výběrů, např. testem uvedeným v kap. 6.5 níže, nebo tzv. Leveneovým testem (neuvádíme). Pokud test zamítne rovnost rozptylů, použijeme Welchův test, jinak použijeme dvouvýběrový t-test. Od používání takového postupu spíše odrazujeme. Jedná se o tzv. *dvoufázový test*, kdy celkový výsledek testu závisí na třech různých vzájemně závislých testových statistikách. Není ničím zaručeno, že celková hladina takové testovací procedury je rovna požadované hodnotě α. Pokud si nejsme jisti shodností rozptylů nebo normalitou dat, provedeme raději rovnou Welchův test. Ani jeden z předpokladů dvouvýběrového t-testu pak není třeba nijak ověřovat.

6.4 Dvouvýběrový Wilcoxonův test

Dvouvýběrový Wilcoxonův test[‡] je neparametrický test založený na pořadích.

Model: $\mathcal{F} = \{X_i \sim F_X$ spojitá d.f., $Y_j \sim F_Y$, $\exists \delta \in \mathbb{R} : F_X(x) = F_Y(x - \delta)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$
(tzv. model posunutí v poloze).

Testovaný parametr: Posunutí δ_{XY}.

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \delta_{XY} = 0, \quad H_1 : \delta_{XY} \neq 0.$$

Poznámka.

- Na rozdíl od jednovýběrového a párového Wilcoxonova testu nevyžadujeme symetrii hustoty.
- Pokud platí model $\mathcal{F}$ a hypotéza H_0, rozdělení X a Y jsou totožná. Potom platí $m_X = m_Y$ a $\mathsf{E}X = \mathsf{E}Y$ (existují-li střední hodnoty). To jest, za platnosti modelu $\mathcal{F}$ lze dvouvýběrový Wilcoxonův test chápat jako test rovnosti středních hodnot i mediánů. Všimněte si, že nejsou-li rozptyly X a Y totožné, model $\mathcal{F}$ nemůže platit.

[*] lze je nalézt např. v kapitole 8.1. knihy Anděl (1998). [†] Angl. *Welch test* [‡] Angl. *two-sample Wilcoxon test, Wilcoxon rank-sum test*

Testová statistika:

$$W_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} R_i,$$

kde $R_1, R_2, \ldots, R_n$ jsou pořadí náhodných veličin X_i ve spojeném náhodném výběru $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$.

Poznámka. Testová statistika $W_{n,m}$ může nabývat hodnot $n(n+1)/2, \ldots, mn + n(n+1)/2$. Spočítá se následujícím způsobem:

1. Vezmeme spojený výběr $(Z_1, \ldots, Z_{n+m}) \overset{\mathrm{df}}{=} (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$.
2. Seřadíme všechny Z_j od nejmenší do největší; získáme uspořádaný výběr

$$Z_{(1)} < Z_{(2)} < \cdots < Z_{(n+m)}.$$

3. Určíme pořadí R_i náhodné veličiny X_i mezi všemi $Z_{(1)}, \ldots, Z_{(n+m)}$. Platí $X_i = Z_{(R_i)}$.
4. Sečteme pořadí R_i pro $i = 1, \ldots, n$.

Zde asi bude končit předn. 20 (5.12.)

Tvrzení 6.4 Platí-li model $\mathcal{F}$ a hypotéza H_0, pak

(i)
$$\mathsf{E}\, W_{n,m} = \frac{n(n+m+1)}{2}, \quad \mathsf{var}\,(W_{n,m}) = \frac{mn(n+m+1)}{12}.$$

(ii) Pokud $n, m \to \infty$,
$$\frac{W_{n,m} - \mathsf{E}\, W_{n,m}}{\sqrt{\mathsf{var}\,(W_{n,m})}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Důkaz. Část (i). Za platnosti hypotézy jsou rozdělení X_i a Y_j shodné, tedy $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ je náhodný výběr o rozsahu $n+m$. S využitím věty 2.16 tedy máme, že

$$\mathsf{E}\, R_i = \frac{n+m+1}{2}, \qquad \mathsf{var}\,(R_i) = \frac{(n+m)^2 - 1}{12}, \quad \mathsf{cov}\,(R_i, R_j) = -\frac{n+m+1}{12} \text{ pro } i \neq j.$$

Tedy

$$\mathsf{E}\, W_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\, R_i = \frac{n\,(n+m+1)}{2}$$

a

$$\begin{aligned}
\mathsf{var}\,(W_{n,m}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{var}\,(R_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathsf{cov}\,(R_i, R_j) \\
&= n\,\frac{(n+m+1)(n+m-1)}{12} - n(n-1)\frac{n+m+1}{12} \\
&= \frac{n(n+m+1)}{12}\big[n+m-1-(n-1)\big] = \frac{nm(n+m+1)}{12}.
\end{aligned}$$

Část (ii). Nebudeme dokazovat. Potíž důkazu spočívá v tom, že pořadí $R_1, \ldots, R_n$ nejsou nezávislé náhodné veličiny. □

Poznámka.

- Hypotézu budeme zamítat pro příliš malé nebo příliš velké hodnoty $W_{n,m}$.
- Předchozí tvrzení dává návod k nalezení kritických hodnot pro zamítání hypotézy, které zaručují asymptotickou hladinu α.
- Nejsou-li n a m příliš velká, lze nalézt i přesné rozdělení testové statistiky $W_{n,m}$ (numericky nebo v tabulkách).

Kritický obor (asymptotický test):

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow \frac{\left|W_{n,m} - \frac{n(m+n+1)}{2}\right|}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}} > u_{1-\alpha/2}.$$

Porušení předpokladů

Shody kvůli zaokrouhlování. Kvůli zaokrouhlování bývají v aplikacích v datech často shody. Testová statistika $W_{n,m}$ se pak spočte s využitím tzv. průměrných pořadí. Dá se ukázat, že za nulové hypotézy

$$\frac{W_{n,m} - \frac{n(n+m+1)}{2}}{\sqrt{\frac{m\,n\,(n+m+1-kor.)}{12}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1),$$

kde $kor.$ je korekce upravující rozptyl daná předpisem

$$kor. = \frac{1}{(n+m)(n+m-1)} \sum_z (t_z^3 - t_z),$$

kde t_z značí počet, kolikrát se mezi hodnotami $Z_1 \ldots, Z_{n+m}$ vyskytla hodnota z. Suma $\sum_z$ pak značí sčítání přes všechny rozdílné hodnoty množiny $\{Z_1 \ldots, Z_{n+m}\}$.

Za povšimnutí stojí, že bez úpravy jmenovatele pomocí $kor.$ by byl test konzervativní.

Neplatí model posunutí. Pro porozumění je vhodné využít níže uvedenou Mannovu-Whitneyho formulaci Wilcoxonova testu.

Mannova-Whitneyho formulace Wilcoxonova testu

Test ekvivalentní s Wilcoxonovým lze získat i následující úvahou. Uvažujme všechny dvojice (X_i, Y_j) pro $i = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, m$ a spočtěme, kolik z nich splňuje podmínku $X_i < Y_j$:

$$W^*_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}\{X_i < Y_j\}.$$

Náhodná veličina $W^*_{n,m}$, tzv. *Mannova-Whitneyho statistika*, může nabývat hodnot z množiny $\{0, \ldots, nm\}$.

Následující tvrzení ukazuje, že mezi dvouvýběrovou Wilcoxonovou statistikou $W_{n,m}$ a Mannovou-Whitneyho statistikou $W^*_{n,m}$ je deterministický lineární vztah. Můžeme tedy snadno spočítat momenty $W^*_{n,m}$.

Tvrzení 6.5

(i) $W_{n,m} + W^*_{n,m} = mn + \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) Pokud $\min(n, m) \to \infty$, pak $(mn)^{-1} W^*_{n,m} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{P}[X_i < Y_j]$.

Důkaz. Část (i). Z definice pořadí

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}\{X_j \le X_i\} + \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}\{Y_j \le X_i\}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} W_{n,m} + W^*_{n,m} &= \sum_{i=1}^{n} R_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}\{X_i < Y_j\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}\{X_j \le X_i\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}\{Y_j \le X_i\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}\{X_i < Y_j\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}\{X_{(j)} \le X_{(i)}\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}\{Y_j \le X_i \text{ nebo } Y_j < X_i\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} i + nm = \frac{n(n+1)}{2} + nm. \end{aligned}$$

Část (ii). Nebudeme dokazovat. Potíž důkazu vězí v tom, že indikátory $\mathbb{1}\{X_i < Y_j\}$ nejsou (pro $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$) nezávislé náhodné veličiny. □

Rozeberme si důsledky tvrzení 6.5. Část (i) říká, že testy založené na dvouvýběrové Wilcoxonově statistice a Mannově-Whitneyho statistice jsou ekvivalentní. Části (ii) pak ukazuje, že $W^*_{n,m}/(nm)$ je konsistentním odhadem parametru $\theta_{XY} = \mathsf{P}[X_i < Y_j]$. Pokud $F_X = F_Y$, lze snadno ukázat, že $\theta_{XY} = 1/2$. Parametr θ_{XY} však může nabývat hodnoty $1/2$ i pro dvě rozdělení, která nejsou totožná.

Tedy uvažujeme-li dvouvýběrový Wilcoxonův test jako test hypotézy nulového rozdílu (6.1), pak je tento test konsistentní pouze vůči alternativám, pro které je $\theta_{XY} \neq \frac{1}{2}$. Tuto nerovnost však obecně (tj. mimo model posunutí) nemůžeme interpretovat jako nerovnost středních hodnot nebo mediánů. Existují spojitá rozdělení F_X a F_Y taková, že mají rozdílné střední hodnoty (resp. mediány) a přitom $\theta_{XY} = \frac{1}{2}$. A na druhou stranu existují spojitá rozdělení F_X a F_Y taková, že mají stejné střední hodnoty (resp. mediány) a přitom $\theta_{XY} \neq \frac{1}{2}$.

Vzhledem k výše uvedenému by nás mohla zajímat, zda bychom nemohli uvažovat Mannův-Whitneyho test jako test pro následující obecnou situaci.

Model: $\mathcal{F}^* = \{X \sim F_X$ spojitá d.f., $Y \sim F_Y$ spojitá d.f.$\}$

Testovaný parametr: $\theta_{XY} = \mathsf{P}[X < Y]$

Hypotéza a alternativa:

$$H_0^* : \theta_{XY} = \tfrac{1}{2}, \quad H_1^* : \theta_{XY} \neq \tfrac{1}{2}.$$

Problém však je, že v tomto případě nelze rozptyl testové statiky $W^*_{n,m}$ za hypotézy počítat podle tvrzení 6.4 (neboť za hypotézy již obecně nemáme stejně rozdělené náhodné veličiny). Kritické hodnoty spočítané pro Wilcoxonův test v modelu $\mathcal{F}$ tedy v obecném modelu $\mathcal{F}^*$

nefungují. Přičemž se ukazuje, že ignorování tohoto faktu může vést k testu, který je konzervativní nebo naopak anti-konzervativní.*

Tyto úvahy vedou k jednoznačnému závěru: *Chceme-li testovat rovnost středních hodnot bez dalších předpokladů na tvar rozdělení obou výběrů, použijeme dvouvýběrový z-test nebo Welchův test, nikoli Wilcoxonův test.*

Poznámka. Někdy se doporučuje před použitím dvouvýběrového t-testu na porovnání středních hodnot otestovat normalitu obou výběrů (populární je například tzv. Shapiro-Wilkův test normality, který neuvádíme). Pokud test zamítne normalitu, použijeme Wilcoxonův test, jinak použijeme dvouvýběrový t-test. Od používání takového postupu zásadně odrazujeme. Jak víme, jedná se o dva testy, které testují rozdílné hypotézy, nemůžeme je tedy použít na ten samý problém. Pokud si nejsme jisti normalitou dat, provedeme raději rovnou Welchův test, který normalitu nevyžaduje a testuje právě tu hypotézu, která byla zadána.

Poznámka. V případě shod je zapotřebí tvrzení 6.5 mírně modifikovat. Pokud statistika $W_{n,m}$ se počítá pomocí průměrných pořadí, tak vztah (i) platí, pokud definujeme statistiku $W^*_{n,m}$ jako

$$W^*_{n,m} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\mathbb{1}\{X_i < Y_j\} + \tfrac{1}{2}\mathbb{1}\{X_i = Y_j\}\right].$$

Část (ii) je pak zapotřebí opravit na

$$\frac{W^*_{n,m}}{mn} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{P}[X_i < Y_j] + \tfrac{1}{2}\mathsf{P}[X_i = Y_j].$$

6.5 Dvouvýběrový F test shody rozptylů

Dvouvýběrový F test shody rozptylů† je přesný test porovnávající rozptyly dvou nezávislých výběrů za předpokladu normálního rozdělení.

Model: $\mathcal{F} = \{X_i \sim \mathsf{N}(\mu_X, \sigma_X^2), Y_j \sim \mathsf{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2), \mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}, \sigma_X^2 > 0, \sigma_Y^2 > 0\}$

Testované parametry: Rozptyly $\sigma_X^2 = \mathsf{var}\, X_i$ a $\sigma_Y^2 = \mathsf{var}\, Y_j$.

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

Testová statistika:

$$F_{n,m} = \frac{S_X^2}{S_Y^2},$$

kde S_X^2 je výběrový rozptyl výběru $X_1, \ldots, X_n$ a S_Y^2 je výběrový rozptyl výběru $Y_1, \ldots, Y_m$.

Poznámka.

- Z věty 2.11 plyne, že testová statistika má za platnosti modelu a hypotézy přesně rozdělení $F_{n-1,m-1}$.
- Hypotézu zamítneme, pokud se výběrové rozptyly příliš liší, tj. pokud je testová statistika buď moc velká nebo moc malá.

* Standardizaci testové statistiky $W^*_{n,m}$, aby test asymptoticky dodržoval hladinu i v obecném modelu $\mathcal{F}^*$, lze nalézt například v Chung and Romano (2016). † Angl. *two-sample F test of equality of variances*

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow F_{n,m} < F_{n-1,m-1}(\alpha/2) \text{ nebo } F_{n,m} > F_{n-1,m-1}(1-\alpha/2),$$

kde $F_{n-1,m-1}(\alpha/2)$ a $F_{n-1,m-1}(1-\alpha/2)$ jsou po řadě $(\alpha/2)$-tý a $(1-\alpha/2)$-tý kvantil F rozdělení s $n-1$ a $m-1$ stupni volnosti.

P-hodnota: $p = 2\min(1-F(s), F(s))$, kde s je pozorovaná hodnota testové statistiky a F je distribuční funkce rozdělení $F_{n-1,m-1}$.

Interval spolehlivosti pro σ_X^2/σ_Y^2: Z věty 2.11 lze odvodit interval spolehlivosti pro podíl rozptylů. Dostaneme

$$\mathsf{P}\left[\frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{F_{n-1,m-1}(1-\frac{\alpha}{2})} < \sigma_X^2/\sigma_Y^2 < \frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{1}{F_{n-1,m-1}(\frac{\alpha}{2})}\right] = 1-\alpha.$$

Poznámka. Tento test lze převést na jednostranný test: Hypotéza $H_0' : \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ se zamítá pouze pro příliš velké hodnoty testové statistiky, kritická hodnota je $F_{n-1,m-1}(1-\alpha)$. Hypotéza $H_0'' : \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$, se zamítá pouze pro příliš malé hodnoty testové statistiky, kritická hodnota je $F_{n-1,m-1}(\alpha)$.

Porušení předpokladů

Při porušení předpokladu normality tento test nedodržuje hladinu ani asymptoticky. Pro sestavení testu v tomto případě by bylo zapotřebí odvodit asymptotické rozdělení testové statistiky $F_{n,m}$ za hypotézy a pracovat s tímto rozdělením. Alternativně lze využít také Leveneův test*. Ten se dá použít i na porovnání více nezávislých výběrů. Je však třeba upozornit, že tento test obecně netestuje shodu rozptylů, ale trochu jiného parametru variability.

* Angl. *Levene's test*

7 Jednovýběrové a dvouvýběrové problémy pro binární data

V této kapitole a v kapitole následující se budeme zabývat *binárními veličinami*, které nabývají pouze dvou hodnot.

7.1 Jednovýběrový problém

Alternativní rozdělení je nejjednodušším modelem pro kategoriální veličinu, která nabývá pouze dvou hodnot zakódovaných jako 0 a 1. Nechť $p_X \in (0,1)$ je pravděpodobnost, že daný jedinec je klasifikován do kategorie 1.

Nechť $Y_1, \ldots, Y_n$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení $\mathsf{Alt}(p_X)$ zaznamenávající klasifikaci n jedinců do kategorií 0 a 1. Označme počet jedinců klasifikovaných do skupiny 1 jako $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Tato veličina má rozdělení $\mathsf{Bi}(n, p_X)$ (viz věta 2.3(iv)). Počet jedinců klasifikovaných do skupiny 0 je $n - X_n \sim \mathsf{Bi}(n, 1-p_X)$.

Nestranným a konsistentním odhadem parametru p_X je relativní četnost

$$\widehat{p}_n = \frac{X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = \overline{Y}_n.$$

Jeho vlastnosti vycházejí z vlastností průměru a jsou shrnuty ve větě 2.3.

7.1.1 Clopperova-Pearsonova metoda

Nejprve se budeme zabývat metodami pro sestrojení intervalu spolehlivosti pro pravděpodobnost p_X a pro testování hypotéz o p_X založenými na přesném rozdělení statistiky X_n, tj. $\mathsf{Bi}(n, p_X)$.

Uvažujme hypotézu $H_0 : p_X = p_0$ proti alternativě $H_1 : p_X \neq p_0$. Stanovme kritický obor

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow X_n \leq c_L(\alpha) \text{ nebo } X_n \geq c_U(\alpha),$$

kde $c_L(\alpha)$ je největší celé číslo, které splňuje

$$\mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n, p_0) \leq c_L(\alpha)\Big) = \sum_{j=0}^{c_L(\alpha)} \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j} \leq \frac{\alpha}{2}$$

a $c_U(\alpha)$ je nejmenší celé číslo, které splňuje

$$\mathsf{P}\Big(\mathsf{Bi}(n, p_0) \geq c_U(\alpha)\Big) = \sum_{j=c_U(\alpha)}^{n} \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Tento test (zvaný *Clopperův-Pearsonův*) má nejvyšší možnou dosažitelnou hladinu, jež nepřesahuje α (vzhledem k diskrétnímu rozdělení testové statistiky nelze vždy dosáhnout stanovené hladiny α). P-hodnota tohoto testu je dána vzorcem:

$$p(x_n) = 2\min\{\mathsf{P}(\mathsf{Bi}(n, p_0) \le x_n), \mathsf{P}(\mathsf{Bi}(n, p_0) \ge x_n)\},$$

kde x_n je pozorovaná hodnota testové statistiky X_n.

Nyní řešme úlohu *sestavení intervalu spolehlivosti* pro p_X s pravděpodobností pokrytí nepřekračující $1-\alpha$. Podle tvrzení 4.3(ii) (dualita intervalů spolehlivosti a testování), můžeme sestavit požadovaný interval spolehlivosti jako množinu obsahující všechny parametry $p \in (0,1)$, pro něž při pozorovaných datech X_n Clopperův-Pearsonův test nezamítá hypotézu $H_0 : p_X = p$. Tj. interval spolehlivosti bude tvaru (p_L, p_U), kde p_L a p_U nalezneme jako řešení následujících rovnic

$$\sum_{j=X_n}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = \frac{\alpha}{2}, \qquad \sum_{j=0}^{X_n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = \frac{\alpha}{2}.$$

Lze ukázat, že p_L a p_U lze explicitně vyjádřit a dostáváme interval ve tvaru

$$\left(\frac{X_n q_L(\alpha)}{X_n q_L(\alpha) + n - X_n + 1}, \frac{(X_n+1) q_U(\alpha)}{(X_n+1) q_U(\alpha) + n - X_n}\right),$$

kde $q_L(\alpha)$ je $\alpha/2$-kvantil rozdělení $F_{2X_n, 2(n-X_n+1)}$ a $q_U(\alpha)$ je $(1-\alpha/2)$-kvantil $F_{2(X_n+1), 2(n-X_n)}$. Pokud $X_n = 0$, položíme dolní mez intervalu rovnou 0, pokud $X_n = n$, položíme horní mez intervalu rovnou 1.

Výše uvedený interval se nazývá *Clopperův-Pearsonův interval spolehlivosti* pro parametr binomického rozdělení. Výhodou tohoto intervalu je, že pravděpodobnost pokrytí zaručeně nepřevýší požadovanou hodnotu $1-\alpha$ ani při malém rozsahu výběru. Jeho nevýhodou je, že jeho pravděpodobnost pokrytí může být o hodně vyšší než $1-\alpha$ a že mívá příliš velkou délku.

Nyní se můžeme vrátit ke Clopperově-Pearsonově testu hypotézy $H_0 : p_X = p_0$ proti alternativě $H_1 : p_X \neq p_0$. Místo toho, abychom složitě počítali kritické hodnoty $c_L(\alpha)$ a $c_U(\alpha)$, spočítáme Clopperův-Pearsonův interval spolehlivosti a H_0 zamítneme, pokud p_0 v tomto intervalu neleží.

Zde končí předn. 21 (7.12.)

7.1.2 Klasická asymptotická metoda

V příkladě uvedeném v kapitole 3.4.2 na str. 44 jsme odvodili asymptotický interval spolehlivosti pro p_X založený na bodě (iii) věty 2.3 a Sluckého větě. Podle (3.7) platí

$$Z_n = \sqrt{n}\,\frac{\widehat{p}_n - p_X}{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Toto tvrzení lze použít k odvození asymptotického testu hypotézy $H_0 : p_X = p_0$ proti alternativě $H_1 : p_X \neq p_0$ s kritickým oborem

$$H_0 \text{ zamítneme} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{n}\frac{|\widehat{p}_n - p_0|}{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}} > u_{1-\alpha/2}. \tag{7.1}$$

Interval spolehlivosti pro p_X z kapitoly 3.4.2 má tvar

$$\left(\widehat{p}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tfrac{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}{n}},\ \widehat{p}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tfrac{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}{n}}\right). \tag{7.2}$$

Nevýhodou tohoto přístupu je, že vyžaduje relativně velký počet pozorování (doporučuje se alespoň 5 úspěchů a alespoň 5 neúspěchů), konvergence k normalitě je pomalá a krajní body intervalu spolehlivosti mohou být menší než 0 nebo větší než 1.

Cvičení. Jelikož alternativní rozdělení náleží do $\mathcal{L}_+^2$, tak bychom také mohli použít asymptotický t-test, viz kapitola 5.3. Ukažte, že v tomto případě by měla testová statistika tvar

$$T_n = \sqrt{n-1}\,\frac{\widehat{p}_n - p_0}{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}}$$

a porovnávali bychom ji s kvantily t_{n-1}-rozdělení. Dostali bychom tedy test, který je o trochu konzervativnější než test uvedený v (7.1).

7.1.3 Wilsonova metoda

Wilsonova metoda je založena přímo na bodě (iii) věty 2.3

$$W_n = \sqrt{n}\,\frac{\widehat{p}_n - p_X}{\sqrt{p_X(1-p_X)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1)$$

bez aplikace Sluckého věty. Za platnosti hypotézy $H_0 : p_X = p_0$ známe p_X a toho využijeme k sestavení kritického oboru

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow \sqrt{n}\frac{|\widehat{p}_n - p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} > u_{1-\alpha/2}.$$

Tento test se nazývá *Wilsonův*.

Interval spolehlivosti pro p_X založíme na pivotální statistice W_n, tj. vyjdeme z

$$\mathsf{P}\left[u_{1-\alpha/2} < \sqrt{n}\,\frac{\widehat{p}_n - p_X}{\sqrt{p_X(1-p_X)}} < u_{1-\alpha/2}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha$$

a nerovnosti uvnitř upravíme tak, abychom uprostřed dostali p_X a na okrajích meze intervalu spolehlivosti. K tomu je nutné vyřešit kvadratickou rovnici pro p_X. Výsledkem je asymptotický interval s krajními body

$$\left(\widehat{p}_n + \frac{u^2}{2n} \mp u\sqrt{\tfrac{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}{n} + \tfrac{u^2}{4n^2}}\right)\frac{1}{1+u^2/n},$$

kde u je zkrácené značení pro $u_{1-\alpha/2}$. Tento interval se též nazývá *Wilsonův*. V literatuře se uvádí, že Wilsonův test a interval dává přesnější výsledky než metody z kapitoly 7.1.2.

Je zajímavé si povšimnout, že střed Wilsonova intervalu lze vyjádřit jako vážený průměr $w_n\widehat{p}_n + (1-w_n)1/2$, kde $w_n = (1+u^2/n)^{-1} \to 1$ pro $n \to \infty$. Počítáme-li 95% interval spolehlivosti, pak střed Wilsonova intervalu je zhruba $(X_n+2)/(n+4)$.

7.1.4 Logitová metoda

* Logitová metoda je založena na šanci místo na pravděpodobnosti.

Definice 7.1 Nechť úspěch nastává s pravděpodobností p. Podíl $\frac{p}{1-p}$ pravděpodobnosti úspěchu a neúspěchu se nazývá *šance*† na úspěch.

Pojem šance se běžně používá při kursových sázkách.

Zvolme jako odhadovaný parametr logaritmus šance $\theta_X = \log \frac{p_X}{1-p_X}$. Tomuto parametru se běžně říká *logit,* transformace $g(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ se nazývá *logitová.* Logitová transformace $g(x)$ je rostoucí a spojitě diferencovatelná pro $x \in (0,1)$ a zobrazuje interval $(0,1)$ na $\mathbb{R}$. Inversní transformace je $g^{-1}(y) = \frac{\exp\{y\}}{1+\exp\{y\}}$. Logaritmus šance θ_X tedy může nabývat libovolné hodnoty v $\mathbb{R}$ a můžeme z ní vyjádřit pravděpodobnost p_X jako $p_X = \exp\{\theta_X\}/(1+\exp\{\theta_X\})$.

Logaritmus šance θ_X odhadneme transformací $g(\widehat{p}_n)$ odhadu $\widehat{p}_n$. Dostaneme odhad

$$\widehat{\theta}_n = \log\left(\frac{\widehat{p}_n}{1-\widehat{p}_n}\right),$$

který je podle tvrzení P.7.3 konsistentním (ne však nestranným) odhadem θ_X.

Asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$ získáme aplikací bodu (iii) věty 2.3 a delta metody (věta P.7.11).

Věta 7.1 Nechť $p_X \in (0,1)$. Pak platí

(i)
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}\left(0, \frac{1}{p_X} + \frac{1}{1-p_X}\right),$$

(ii)
$$\sqrt{\frac{X_n(n-X_n)}{n}}(\widehat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Označme $D_n = \sqrt{\frac{n}{X_n(n-X_n)}}$. Je to vlastně odhad směrodatné chyby $\widehat{\theta}_n$.

Na základě věty 7.1 můžeme sestrojit asymptotický test hypotézy $H_0 : p_X = p_0$. Označme $\theta_0 = \log \frac{p_0}{1-p_0}$. Hypotézu H_0 můžeme přepsat jako $H_0 : \theta_X = \theta_0$ a zamítáme ji ve prospěch alternativy $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$ pokud

$$\frac{1}{D_n}\left|\widehat{\theta}_n - \theta_0\right| > u_{1-\alpha/2}.$$

Tento test nazveme *logitový.*

Interval spolehlivosti pro θ_X s pravděpodobností pokrytí konvergující k $1-\alpha$ má tvar

$$\left(\widehat{\theta}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} D_n,\ \widehat{\theta}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} D_n\right).$$

Aplikujeme-li ryze rostoucí funkci g^{-1} na oba krajní body tohoto intervalu, dostaneme asymptotický $100(1-\alpha)$-procentní interval spolehlivosti pro p_X ve tvaru

$$\left(\frac{\frac{\widehat{p}_n}{1-\widehat{p}_n}\mathrm{e}^{-u_{1-\alpha/2}D_n}}{1+\frac{\widehat{p}_n}{1-\widehat{p}_n}\mathrm{e}^{-u_{1-\alpha/2}D_n}},\ \frac{\frac{\widehat{p}_n}{1-\widehat{p}_n}\mathrm{e}^{u_{1-\alpha/2}D_n}}{1+\frac{\widehat{p}_n}{1-\widehat{p}_n}\mathrm{e}^{u_{1-\alpha/2}D_n}}\right). \tag{7.3}$$

Interval (7.3) nazýváme *logitový.* Oba jeho krajní body jistě leží uvnitř $(0,1)$. Navíc konvergence $\widehat{\theta}_n$ k normálnímu rozdělení je rychlejší než konvergence $\widehat{p}_n$, takže limitní aproximace založená na $\widehat{\theta}_n$ je přesnější než aproximace založená na $\widehat{p}_n$. Logitová metoda patří spolu s Wilsonovou k metodám doporučovaným v literatuře.

* Tato kapitola nebyla probrána na přednášce. † Angl. *odds*

7.2 Dvouvýběrový problém

Mějme $Y_{11}, \dots, Y_{1n}$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení $\mathsf{Alt}(p_1)$ a $Y_{21}, \dots, Y_{2m}$ je náhodný výběr z $\mathsf{Alt}(p_2)$. Označme $X_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_{1i}$ a $X_2 = \sum_{i=1}^{m} Y_{2i}$. Budeme se tedy zabývat porovnáním dvou nezávislých binomických veličin $X_1 \sim \mathsf{Bi}(n, p_1)$ a $X_2 \sim \mathsf{Bi}(m, p_2)$. Chceme zjistit, zdali a jakým způsobem se liší pravděpodobnosti p_1 a p_2. Jejich odlišnost můžeme vyjádřit různými způsoby, z toho nám vyplyne několik variant odhadů a testů.

Pokud veličiny X_1 a X_2 udávají počty nějakých negativních událostí (smrt, nemoc, ztráta zaměstnání, porucha, bankrot) parametry p_1 a p_2 nazýváme *riziky* události v obou populacích. Pravděpodobnosti (rizika) p_1 a p_2 můžeme odhadnout relativními četnostmi $\widehat{p}_1 = X_1/n$, $\widehat{p}_2 = X_2/m$. Jejich vlastnosti shrnuje věta 2.3.

Pravděpodobnosti (rizika) $\widehat{p}_1$ a $\widehat{p}_2$ zpravidla porovnáváme jedním ze tří následujícím způsobů:

1. rozdíl pravděpodobností (nárůst rizika)* $d_X = p_1 - p_2$, odhadujeme pomocí $\widehat{d} = \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2$;
2. podíl pravděpodobností (relativní riziko†) $r_X = \frac{p_1}{p_2}$, odhadujeme pomocí $\widehat{r} = \frac{\widehat{p}_1}{\widehat{p}_2}$;
3. poměr šancí‡ $o_X = \frac{p_1/(1-p_1)}{p_2/(1-p_2)} = \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}$, odhadujeme pomocí $\widehat{o} = \frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_2)}{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_1)} = \frac{X_1(m-X_2)}{X_2(n-X_1)}$.

Pro každé z těchto porovnání budeme potřebovat asymptotické rozdělení příslušného odhadu. U všech asymptotických výsledků budeme stejně jako v kapitole 6 předpokládat $n \to \infty$, $m \to \infty$ a $n/m \to q$, kde $0 < q < \infty$. Výsledky uváděné v této kapitole však platí i tehdy, je-li pevný pouze celkový počet pororování $n+m$, zatímco rozsahy výběrů n a m jsou náhodné (viz diskuse na str. 88).

Všimněme si, že pomocí centrální limitní věty máme

$$\sqrt{n}\,(\widehat{p}_1 - p_1) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, p_1(1-p_1)) \;\text{ a }\; \sqrt{m}\,(\widehat{p}_2 - p_2) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, p_2(1-p_2)).$$

Dále díky nezávislosti $\widehat{p}_1$ a $\widehat{p}_2$ dostaneme stejným způsobem jako v důkazu věty 6.3

$$\sqrt{m}\begin{pmatrix}\widehat{p}_1 - p_1\\ \widehat{p}_2 - p_2\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{p_1(1-p_1}{q} & 0\\ 0 & p_2(1-p_2)\end{pmatrix}\right). \tag{7.4}$$

7.2.1 Rozdíly pravděpodobností, nárůst rizika

Odlišnost obou rozdělení můžeme vyjádřit např. *rozdílem pravděpodobností (rizik)* $d_X = p_1 - p_2$, jež říká, o kolik je větší riziko v populaci 1 než v populaci 2. Tento parametr může nabývat hodnot -1 až 1, nulová hodnota odpovídá totožným pravděpodobnostem v obou populacích.

Nestranným a konsistentním odhadem parametru d_X je $\widehat{d} = \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2$.

Tvrzení 7.2

$$\frac{\widehat{d} - d_X}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n} + \frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{m}}} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

* Angl. *risk difference, excess risk* † Angl. *relative risk* ‡ Angl. *odds ratio*

Důkaz. Budeme postupovat podobně jako v důkazu věty 6.3.

Nejdříve přepíšeme

$$\frac{\widehat{d}-d_X}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n}+\frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{m}}}=\frac{\sqrt{m}\,(\widehat{d}-d_X)}{\sqrt{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)\frac{m}{n}+\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}}.$$

Nyní s pomocí zákona velkých čísel (tvrzení 1.5) a věty o spojité transformaci (tvrzení 1.2) se ukáže, že

$$\sqrt{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)\tfrac{m}{n}+\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}\xrightarrow{\mathsf{P}}\sqrt{\tfrac{p_1(1-p_1)}{q}+p_2(1-p_2)}\,.$$

Pomocí Cramérovy-Sluckého věty (věta 1.3) tedy zbývá dokázat, že

$$\sqrt{m}\,(\widehat{d}-d_X)\xrightarrow{\mathsf{d}}\mathsf{N}\Big(0,\tfrac{p_1(1-p_1)}{q}+p_2(1-p_2)\Big),$$

což plyne podobně jako v důkazu věty 6.3 ze sdružené asymptotické normality odhadů $\widehat{p}_1$ a $\widehat{p}_2$ v (7.4). □

Pro asymptotický test hypotézy $H_0 : d_X = 0$ proti alternativě $H_1 : d_X \neq 0$ použijeme testovou statistiku

$$T_d=\frac{\widehat{d}}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n}+\frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{m}}}$$

a hypotézu zamítneme pokud $|T_d| > u_{1-\alpha/2}$.

Z tvrzení 7.2 dostaneme postupnými úpravami

$$\mathsf{P}\Big[\widehat{d}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\tfrac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n}+\tfrac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{m}}<d_X<\widehat{d}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\tfrac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n}+\tfrac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{m}}\Big]\to 1-\alpha.$$

Odtud získáme asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl pravděpodobností d_X.

Poznámka. Jelikož za nulové hypotézy $H_0 : d_X = 0$ je $p_1 = p_2$, tak lze místo T_d použít testovou statistiku

$$\widetilde{T}_d=\frac{\widehat{d}}{\sqrt{\widetilde{p}(1-\widetilde{p})(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}},$$

kde $\widetilde{p}=\frac{X_1+X_2}{n+m}$ je odhad společné pravděpodobnosti úspěchu za nulové hypotézy. Testová statistika $\widetilde{T}_d$ má za nulové hypotézy asymptoticky rozdělení $\mathsf{N}(0,1)$. Ukazuje se však, že skutečná hladina testu založeného na $\widetilde{T}_d$ je zpravidla bližší předepsané hladině, než skutečná hladina testu T_d.

Cvičení. Alternativně bychom mohli použít asymptotický dvouvýběrový z-test (viz kapitola 6.3) hypotézy $H_0 : \mu_X = \mu_Y$. Dokažte, že v tomto případě má testová statistika $Z_{n,m}$ tvar

$$Z_{n,m}=\frac{\widehat{d}}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n-1}+\frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{m-1}}}\,.$$

7.2.2 Podíly pravděpodobností, relativní riziko

Jiný způsob, jak vyjádřit odlišnost pravděpodobností (rizik), je *relativní riziko* $r_X = p_1/p_2$. Tento parametr říká, kolikrát je větší riziko v populaci 1 než v populaci 2 a může nabývat hodnot v intervalu $(0, \infty)$. Pravděpodobnosti (rizika) v obou populacích jsou totožné právě když $r_X = 1$.

Konsistentním (nikoli nestranným) odhadem parametru r_X je $\widehat{r} = \widehat{p}_1/\widehat{p}_2$.

I když bychom mohli odvodit asymptotické rozdělení odhadu $\widehat{r} = \widehat{p}_1/\widehat{p}_2$, tak se ukazuje, že normální aproximace funguje rychleji pro logaritmus tohoto podílu.

Tvrzení 7.3

$$\frac{\log \widehat{r} - \log r_X}{\sqrt{\frac{1-\widehat{p}_1}{n\widehat{p}_1} + \frac{1-\widehat{p}_2}{m\widehat{p}_2}}} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Důkaz. Opět budeme postupovat podobně jako v důkazu věty 6.3.

Nejdříve přepíšeme

$$\frac{\log \widehat{r} - \log r_X}{\sqrt{\frac{1-\widehat{p}_1}{n\widehat{p}_1} + \frac{1-\widehat{p}_2}{m\widehat{p}_2}}} = \frac{\sqrt{m}\,(\log \widehat{r} - \log r_X)}{\sqrt{\frac{1-\widehat{p}_1}{\widehat{p}_1}\frac{m}{n} + \frac{1-\widehat{p}_2}{\widehat{p}_2}}}$$

Nyní s pomocí zákona velkých čísel (tvrzení 1.5) a věty o spojité transformaci (tvrzení 1.2) se ukáže, že

$$\sqrt{\frac{1-\widehat{p}_1}{\widehat{p}_1}\frac{m}{n} + \frac{1-\widehat{p}_2}{\widehat{p}_2}} \xrightarrow{\mathsf{P}} \sqrt{\frac{1-p_1}{p_1 q} + \frac{1-p_2}{p_2}}\,.$$

Pomocí Cramérovy-Sluckého věty (věta 1.3) tedy zbývá dokázat, že

$$\sqrt{m}\,(\log \widehat{r} - \log(r_X)) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}\Big(0, \tfrac{1-p_1}{p_1 q} + \tfrac{1-p_2}{p_2}\Big).$$

To však plyne z delta-metody (tvrzení 1.7) a ze sdružené asymptotické normality (7.4), neboť gradient funkce $\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ je $\left(\frac{1}{p_1}, \frac{-1}{p_2}\right)$ a tedy asymptotický rozptyl veličiny $\sqrt{m}\,(\log \widehat{r} - r_X)$ je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & \frac{-1}{p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_1(1-p_1)}{q} & 0 \\ 0 & p_2(1-p_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} \\ \frac{-1}{p_2} \end{pmatrix} = \frac{1-p_1}{p_1 q} + \frac{1-p_2}{p_2}.$$

□

Chceme otestovat, jestli $\log r_X = 0$ neboli $r_X = 1$. Pro asymptotický test hypotézy $H_0 : r_X = 1$ proti alternativě $H_1 : r_X \neq 1$ použijeme testovou statistiku

$$T_r = \frac{\log \widehat{r}}{\sqrt{\frac{1-\widehat{p}_1}{n\widehat{p}_1} + \frac{1-\widehat{p}_2}{m\widehat{p}_2}}}$$

a hypotézu zamítneme pokud $|T_r| > u_{1-\alpha/2}$.

Z tvrzení 7.3 dostaneme postupnými úpravami

$$\mathsf{P}\left[\widehat{r}\exp\left\{-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1-\widehat{p}_1}{n\widehat{p}_1} + \frac{1-\widehat{p}_2}{m\widehat{p}_2}}\right\} < r_X < \widehat{r}\exp\left\{u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1-\widehat{p}_1}{n\widehat{p}_1} + \frac{1-\widehat{p}_2}{m\widehat{p}_2}}\right\}\right] \to 1-\alpha,$$

což nám dává asymptotický interval spolehlivosti pro relativní riziko r_X.

Cvičení. Jak by vypadal kritický obor hypotézy $H_0 : r_X = 2$ proti alternativě $H_1 : r_X \neq 2$?

7.2.3 Poměr šancí

Třetím možným způsobem vyjádření odlišnosti dvou pravděpodobností je *poměr šancí*

$$o_X = \frac{p_1/(1-p_1)}{p_2/(1-p_2)} = \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}.$$

Tento parametr říká, kolikrát je větší šance v populaci 1 než v populaci 2. Může nabývat hodnot v intervalu $(0, \infty)$. Pravděpodobnosti (rizika) v obou populacích jsou totožná právě když $o_X = 1$.

Konsistentním (nikoli nestranným) odhadem parametru o_X je

$$\widehat{o} = \frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_2)}{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_1)} = \frac{X_1(m-X_2)}{X_2(n-X_1)}.$$

I když bychom mohli odvodit asymptotické rozdělení odhadu $\widehat{o} = \widehat{p}_1/\widehat{p}_2$, tak se ukazuje, že normální aproximace funguje rychleji pro logaritmus tohoto odhadu.

Tvrzení 7.4 Nechť

$$\widehat{V}_o = \frac{1}{n\widehat{p}_1} + \frac{1}{n(1-\widehat{p}_1)} + \frac{1}{m\widehat{p}_2} + \frac{1}{m(1-\widehat{p}_2)} = \\ = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{n-X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{m-X_2}.$$

Pak

$$\frac{\log\widehat{o} - \log o_X}{\sqrt{\widehat{V}_o}} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Důkaz. Podobně jako v důkazu věty 6.3 nejdříve přepíšeme

$$\frac{\log\widehat{o} - \log o_X}{\sqrt{\widehat{V}_o}} = \frac{\sqrt{m}\,(\log\widehat{o} - \log o_X)}{\sqrt{m\,\widehat{V}_o}}$$

Nyní s pomocí zákona velkých čísel (tvrzení 1.5) a věty o spojité transformaci (tvrzení 1.2) se ukáže, že

$$\sqrt{m\,\widehat{V}_o} = \sqrt{\tfrac{m}{n\widehat{p}_1} + \tfrac{m}{n(1-\widehat{p}_1)} + \tfrac{1}{\widehat{p}_2} + \tfrac{1}{(1-\widehat{p}_2)}} \xrightarrow{\mathsf{P}} \sqrt{\tfrac{1}{qp_1} + \tfrac{1}{q(1-p_1)} + \tfrac{1}{p_2} + \tfrac{1}{(1-p_2)}}$$

Pomocí Cramérovy-Sluckého věty (věta 1.3) tedy zbývá dokázat, že

$$\sqrt{m}\,(\log\widehat{o} - \log o_X) \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}\Big(0, \tfrac{1}{qp_1} + \tfrac{1}{q(1-p_1)} + \tfrac{1}{p_2} + \tfrac{1}{(1-p_2)}\Big),$$

což plyne použitím delta-metody (tvrzení 1.7) z (7.4). □

Pravděpodobnosti (šance) v obou populacích jsou totožné právě když $o_X = 1$ neboli $\log o_X = 0$. Pro asymptotický test hypotézy $H_0 : o_X = 1$ proti alternativě $H_1 : o_X \neq 1$ použijeme testovou statistiku

$$T_o = \frac{\log\widehat{o}}{\sqrt{\widehat{V}_o}}$$

a hypotézu zamítneme pokud $|T_o| \geq u_{1-\alpha/2}$.

Asymptotický interval spolehlivosti pro poměr šancí o_X je dán faktem

$$P\left[\widehat{o}\exp\left\{-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{V}_o}\right\} < o_X < \widehat{o}\exp\left\{u_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{V}_o}\right\}\right] \to 1-\alpha,$$

který plyne z tvrzení 7.4.

Cvičení. Jak by vypadal kritický obor hypotézy $H_0 : o_X \leq 2$ proti alternativě $H_1 : o_X > 2$?

8 Multinomické rozdělení a kontingenční tabulky

V této kapitole a v kapitole následující se budeme zabývat *kategoriálními veličinami*, které mohou obecně nabývat dvou nebo více hodnot. Pojem kategoriální veličina byl vyložen v kapitole 3.2.2. Stručně řečeno, jde o diskrétní veličinu nabývající konečně mnoha hodnot, typicky $1, \ldots, K$, jejíž hodnoty nemusí mít numerickou interpretaci, ale označují členství v nějaké skupině (kategorii). Parametry používané v analýze kategoriálních dat jsou typicky pravděpodobnosti jednotlivých hodnot.

8.1 Multinomické rozdělení

Multinomické rozdělení zobecňuje binomické rozdělení na situaci, kdy kategoriální veličina může nabývat více než dvou hodnot.

Multinomické rozdělení: definice a vlastnosti

Definice 8.1 (Multinomické rozdělení) Nechť $K \geq 2$ a $n \geq 1$ jsou přirozená čísla a $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_K)^\mathsf{T}$ je vektor konstant splňující $p_k > 0\ \forall k$ a $\sum_{k=1}^K p_k = 1$. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_K)^\mathsf{T}$ má multinomické rozdělení $\mathsf{Mult}_K(n, \boldsymbol{p})$, právě když jeho hustota vzhledem k součinové čítací míře na $\mathbb{Z}^K$ je

$$\mathsf{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_K = x_K] = \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1! \cdots x_K!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_K^{x_K} & \sum_{k=1}^K x_k = n \\ & x_k \in \mathbb{N}_0\ \forall k \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Multinomické rozdělení je rozdělení počtu pozorování přidělených do každé z K možných přihrádek v n nezávislých experimentech, přičemž v každém experimentu jsou pravděpodobnosti přiřazení do jednotlivých přihrádek dány složkami vektoru pravděpodobností $\boldsymbol{p}$.

Věta 8.1 (Rozklad multinomického rozdělení.) Nechť $\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_n$ jsou nezávislé náhodné vektory s rozdělením $\mathsf{Mult}_K(1, \boldsymbol{p})$. Pak $\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{Y}_i \sim \mathsf{Mult}_K(n, \boldsymbol{p})$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí.

Pro $n = 1$ máme $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}_1$ a tedy

$$\mathsf{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_K = x_K] = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_K^{x_K}, \text{ pro } \sum_{k=1}^K x_k = 1.$$

Předpokládejme, že věta platí pro $n-1$. Tj. $\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{Y}_i \sim \mathsf{Mult}_K(n-1, \boldsymbol{p})$. Ukážeme, že $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}_n \sim \mathsf{Mult}_K(n, \boldsymbol{p})$.

Označme $\boldsymbol{Y}_n = (Y_{n1} \dots, Y_{nK})^\mathsf{T}$ a pro $\sum_{k=1}^K x_k = n$ s využitím indukčního předpokladu počítejme

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}[X_1 + Y_{n1} = x_1, \dots, X_K + Y_{nK} = x_K] \\
&\qquad = \sum_{k=1}^K \mathsf{P}[X_1 + Y_{n1} = x_1, \dots, X_K + Y_{nK} = x_K \mid Y_{nk} = 1]\, \mathsf{P}[Y_{nk} = 1] \\
&\qquad = \sum_{k=1}^K \mathsf{P}[X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k - 1, \dots, X_K = x_K]\, \mathsf{P}[Y_{nk} = 1] \\
&\qquad = \sum_{k=1}^K \frac{(n-1)!}{x_1! \cdots (x_k - 1)! \cdots x_K!}\, p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k - 1} \cdots p_K^{x_K}\, p_k \\
&\qquad = \frac{(n-1)!}{x_1! \cdots x_k! \cdots x_K!}\, p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k} \cdots p_K^{x_K} \sum_{k=1}^K x_k \\
&\qquad = \frac{n!}{x_1! \cdots x_K!}\, p_1^{x_1} \cdots p_K^{x_K}.
\end{aligned}$$

□

Zde končí předn. 22 (12.12)

Věta 8.2 (Vlastnosti multinomického rozdělení.) Nechť $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{Mult}_K(n, \boldsymbol{p})$. Pak

(i) $X_k \sim \mathsf{Bi}(n, p_k)$,
(ii) $\mathsf{E}\, X_k = np_k$, $\mathsf{var}\, X_k = np_k(1-p_k)$,
(iii) $\mathsf{cov}\,(X_j, X_k) = -np_jp_k$, pro $j \neq k$,
(iv) $\mathsf{var}\, \boldsymbol{X} = n\,[\mathsf{diag}\,(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}^{\otimes 2}]$

Důkaz. Dle věty 8.1 si můžeme $\boldsymbol{X}$ reprezentovat jako $\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{Y}_i$, kde $\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_n$ jsou nezávislé náhodné vektory s rozdělením $\mathsf{Mult}_K(1, \boldsymbol{p})$.

Část (i) plyne z toho, že $X_k = \sum_{i=1}^n Y_{ik}$ a část (ii) plyne z vlastností binomického rozdělení.

Část (iii). Pomocí výše uvedené reprezentace pro $j \neq k$ počítejme

$$\begin{aligned}
\mathsf{cov}\,(X_j, X_k) &= \mathsf{cov}\left(\sum_{i=1}^n Y_{ij}, \sum_{l=1}^n Y_{lk}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \mathsf{cov}\,(Y_{ij}, Y_{lk}) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathsf{cov}\,(Y_{ij}, Y_{ik}) = n\,\mathsf{cov}\,(Y_{ij}, Y_{ik}) \\
&= n\,(\mathsf{E}\, Y_{ij}Y_{ik} - \mathsf{E}\, Y_{ij}\mathsf{E}\, Y_{ik}) = -np_jp_k,
\end{aligned}$$

kde jsme využili nezávislosti náhodných vektorů $\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_n$ a dále toho, že $\mathsf{E}\, Y_{ij}Y_{ik} = 0$, $\mathsf{E}\, Y_{ij} = p_j$ a $\mathsf{E}\, Y_{ik} = p_k$.

Část (iv). Z částí (ii) a (iii) plyne

$$\mathsf{var}\, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & \dots & -np_1p_K \\ -np_2p_1 & np_2(1-p_2) & \dots & -np_2p_K \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -np_Kp_1 & -np_Kp_2 & \dots & np_K(1-p_K) \end{pmatrix} = n\,[\mathsf{diag}\,(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\mathsf{T}].$$

□

Věta 8.3 (Asymptotické vlastnosti multinomického rozdělení.)
Nechť $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{Mult}_K(n, \boldsymbol{p})$. Pak

(i)
$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{X} - n\boldsymbol{p}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_K(\boldsymbol{0}, \mathsf{diag}\,(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}^{\otimes 2}),$$

(ii)
$$\sum_{k=1}^{K} \frac{(X_k - np_k)^2}{np_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \chi^2_{K-1}.$$

Důkaz. Část (i). Díky větě 8.1 si můžeme $\boldsymbol{X}$ reprezentovat jako $\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Y}_i$, kde $\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_n$ jsou nezávislé náhodné vektory s rozdělením $\mathsf{Mult}_K(1, \boldsymbol{p})$. Z věty 8.2 pak víme, že

$$\mathsf{E}\,\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{p}, \qquad \mathsf{var}\,\boldsymbol{Y}_i = \mathsf{diag}\,(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}^{\otimes 2}.$$

Tedy pomocí centrální limitní věty pro nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory (tvrzení 1.6)

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{X} - n\,\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{Y}_i - \boldsymbol{p}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_K\Big(\boldsymbol{0}, \mathsf{diag}\,(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}^{\otimes 2}\Big).$$

Část (ii). Označme si

$$\boldsymbol{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathsf{diag}\,(\sqrt{\boldsymbol{p}})^{-1}(\boldsymbol{X} - n\boldsymbol{p}),$$

pak můžeme psát

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{(X_k - np_k)^2}{np_k} = \boldsymbol{Z}_n^{\mathsf{T}} \boldsymbol{Z}_n.$$

S využitím tvrzení (i)

$$\boldsymbol{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \boldsymbol{Z} \sim \mathsf{N}_K(\boldsymbol{0}, \Sigma), \tag{8.1}$$

kde

$$\Sigma = \mathsf{diag}\,(\sqrt{\boldsymbol{p}})^{-1}[\mathsf{diag}\,(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}^{\otimes 2}]\mathsf{diag}\,(\sqrt{\boldsymbol{p}})^{-1} = \mathbb{I}_K - \sqrt{\boldsymbol{p}}^{\otimes 2}.$$

Všimněme si, že matice $\mathbb{I}_K - \sqrt{\boldsymbol{p}}^{\otimes 2}$ je idempotentní, neboť

$$\begin{aligned}(\mathbb{I}_K - \sqrt{\boldsymbol{p}}^{\otimes 2})(\mathbb{I}_K - \sqrt{\boldsymbol{p}}^{\otimes 2}) &= \mathbb{I}_K - 2\,\sqrt{\boldsymbol{p}}^{\otimes 2} + \sqrt{\boldsymbol{p}}\,\sqrt{\boldsymbol{p}}^{\mathsf{T}}\,\sqrt{\boldsymbol{p}}\,\sqrt{\boldsymbol{p}}^{\mathsf{T}} \\ &= \mathbb{I}_K - 2\,\sqrt{\boldsymbol{p}}^{\otimes 2} + \sqrt{\boldsymbol{p}}\,\sqrt{\boldsymbol{p}}^{\mathsf{T}} = \mathbb{I}_K - \sqrt{\boldsymbol{p}}^{\otimes 2}.\end{aligned}$$

Dále z (8.1) a věty o spojité transformaci (tvrzení 1.6) víme, že

$$\boldsymbol{Z}_n^{\mathsf{T}} \boldsymbol{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{Z}.$$

Neboť matice $\mathbb{I}_K - \sqrt{\boldsymbol{p}}^{\otimes 2}$ je idempotentní, tak použitím věty P.6.3(iii) s $\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$ dostáváme, že kvadratická forma $\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{Z}$ má χ^2-rozdělení s počtem stupňů volnosti

$$\mathsf{tr}\,(\mathbb{A}\Sigma) = \mathsf{tr}\,(\mathbb{I}_K - \sqrt{\boldsymbol{p}}^{\otimes 2}) = K - \sum_{k=1}^{K} p_k = K - 1.$$

□

Odhady parametrů multinomického rozdělení

Pro odhadování jednotlivých parametrů p_k, testování hypotéz o p_k a konstrukci intervalových odhadů pro p_k můžeme použít metody popsané v kapitole 7.1, neboť podle věty 8.2(i) platí $X_k \sim \mathsf{Bi}(n, p_k)$,

Celý vektor $\boldsymbol{p}$ odhadneme pomocí $\widehat{\boldsymbol{p}}_n = \boldsymbol{X}/n$. Sdružené asymptotické rozdělení odhadu $\widehat{\boldsymbol{p}}_n$ získáme z věty 8.3(i):

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\boldsymbol{p}}_n - \boldsymbol{p}) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{X} - n\boldsymbol{p}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}_K(\boldsymbol{0}, \mathsf{diag}\,(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}^{\otimes 2}).$$

Pro libovolný vektor konstant $\boldsymbol{c}$ o délce K, platí

$$\sqrt{n}\,(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\widehat{\boldsymbol{p}}_n - \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{p}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, \boldsymbol{c}^\mathsf{T}[\mathsf{diag}\,(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}^{\otimes 2}]\boldsymbol{c}).$$

Pokud $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}[\mathsf{diag}\,(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}^{\otimes 2}]\boldsymbol{c} \neq 0$ a $\widehat{V}_c \overset{\mathsf{df}}{=} \boldsymbol{c}^\mathsf{T}[\mathsf{diag}\,(\widehat{\boldsymbol{p}}_n) - \widehat{\boldsymbol{p}}_n^{\otimes 2}]\boldsymbol{c} \neq 0$, dostaneme ze Sluckého věty

$$\frac{\sqrt{n}\,(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\widehat{\boldsymbol{p}}_n - \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{p})}{\sqrt{\widehat{V}_c}} \xrightarrow{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, 1). \tag{8.2}$$

Odtud můžeme snadno odvodit asymptotické testy hypotéz $H_0 : \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{p} = \gamma_0$. Vezmeme testovou statistiku

$$T_c = \frac{\sqrt{n}\,(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\widehat{\boldsymbol{p}}_n - \gamma_0)}{\sqrt{\widehat{V}_c}},$$

která má podle (8.2) za platnosti hypotézy asymptoticky normované normální rozdělení a H_0 zamítneme právě když $|T_c| \geq u_{1-\alpha/2}$.

Asymptotický interval spolehlivosti pro $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{p}$ založený na konvergenci (8.2) jest

$$\left(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\widehat{\boldsymbol{p}}_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\tfrac{\widehat{V}_c}{n}},\ \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\widehat{\boldsymbol{p}}_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\tfrac{\widehat{V}_c}{n}}\right).$$

Vektor $\boldsymbol{c}$ vybereme tak, aby součin $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{p}$ vytvořil lineární kombinaci parametrů, která nás v dané aplikaci zajímá. Chceme-li například vědět, zdali pravděpodobnosti první a poslední kategorie jsou stejné, a sestrojit interval spolehlivosti pro rozdíl jejich hodnot, zvolíme $\boldsymbol{c} = (1, 0, \ldots, 0, -1)^\mathsf{T}$ a $\gamma_0 = 0$.

χ^2 test dobré shody pro multinomické rozdělení

Pojmem χ^2 *test dobré shody*[*] rozumíme test hypotézy $H_0 : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^0$ založený na větě 8.3(ii). Tato hypotéza říká, že pravděpodobnosti kategorií $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_K)^\mathsf{T}$ jsou rovny předem stanoveným hypotetickým pravděpodobnostem $\boldsymbol{p}^0 = (p_1^0, \ldots, p_K^0)^\mathsf{T}$, tj. $p_k = p_k^0$ pro všechna $k = 1, \ldots, K$.

Platí-li hypotéza H_0, pak testová statistika

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(X_k - np_k^0)^2}{np_k^0}$$

[*] Angl. χ^2 *test of goodness of fit*

má podle věty 8.3(ii) asymptotické rozdělení χ^2_{K-1}. Testová statistika porovnává pozorovanou četnost X_k v kategorii k s četností np_k^0 očekávanou za platnosti hypotézy. Velké hodnoty testové statistiky svědčí proti H_0. Hypotézu H_0 zamítneme, pokud

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(X_k - np_k^0)^2}{np_k^0} > \chi^2_{K-1}(1-\alpha), \tag{8.3}$$

kde $\chi^2_{K-1}(1-\alpha)$ značí $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení χ^2_{K-1}.

Poznámka. Asymptotická aproximace χ^2 rozdělením vyžaduje, aby celkový počet pozorování n byl dostatečně velký. Jako jednoduché orientační pravidlo můžeme vzít např. požadavek, aby očekávané četnosti np_k^0 překročily 5 ve všech kategoriích $k = 1, \dots, K$. Vyskytují-li se v hodnotách $\boldsymbol{X}$ velmi malé četnosti nebo nuly, χ^2 aproximace může být velmi nepřesná.

Poznámka. Vezmeme-li $K = 2$, $p_1^0 \equiv p_0$, $X_2 = n - X_1$, $p_2^0 = 1 - p_0$, dostaneme

$$\chi^2 = \frac{(X_1 - np_0)^2}{np_0} + \frac{[n - X_1 - n(1-p_0)]^2}{n(1-p_0)} = \left[\sqrt{n}\frac{\widehat{p}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right]^2,$$

takže testová statistika χ^2 testu pro $K = 2$ kategorie je rovna čtverci Wilsonovy testové statistiky uvedené v kapitole 7.1.3.

Příklad (Je kostka pravidelná?)**.** Hodíme n-krát kostkou a zaznamenáme, kolikrát padly výsledky 1–6: dostaneme četnosti $X_1, \dots, X_6$. Nastavíme $p_k^0 = 1/6$, $k = 1, \dots, 6$. Zamítne-li χ^2 test hypotézu H_0, prokázali jsme, že na kostce nepadají všechna čísla stejně často.

Příklad (Rodí se děti během roku rovnoměrně?)**.** Máme dány počty dětí narozených v jednotlivých měsících během kalendářního roku: $X_1, \dots, X_{12}$. Nastavíme $p_k^0 = m_k/365$, kde m_k je počet dní v měsíci k. Zamítne-li χ^2 test hypotézu H_0, prokázali jsme, že děti se nerodí během roku rovnoměrně.

Příklad (Pochází náhodný výběr z distribuční funkce F_0?)**.** Mějme náhodný výběr $Z_1, \dots, Z_n$. Zajímá nás, zdali pochází z rozdělení s distribuční funkcí $F_0(x) = F(x; \boldsymbol{\theta}_0)$, kde $\boldsymbol{\theta}_0$ je známo.

Stanovíme si intervaly $(a_{k-1}, a_k\rangle$, $k = 1, \dots, K$, $a_0 = -\infty$, $a_K = \infty$ tak, že jejich počet K je výrazně menší než n a do každého z intervalů padne dostatečný počet pozorování. Spočítáme, kolik pozorování padlo do k-tého intervalu: $X_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(a_{k-1}, a_k\rangle}(Z_i)$. Pochází-li náhodný výběr $Z_1, \dots, Z_n$ z rozdělení s distribuční funkcí $F_0(x) = F(x; \boldsymbol{\theta}_0)$, potom vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_K)^\mathsf{T}$ má multinomické rozdělení $\mathsf{Mult}_K(n, \boldsymbol{p}^0)$, kde pravděpodobnosti jednotlivých kategorií jsou $p_k^0 = F(a_k; \boldsymbol{\theta}_0) - F(a_{k-1}; \boldsymbol{\theta}_0)$.

Provedeme test hypotézy $H_0 : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^0$ testem dobré shody podle vzorce (8.3). Zamítne-li test hypotézu H_0, prokázali jsme, že náhodný výběr $Z_1, \dots, Z_n$ nepochází z rozdělení $F(x; \boldsymbol{\theta}_0)$.

χ^2 test dobré shody pro multinomické rozdělení s odhadnutými parametry

Jak jsme viděli v předchozím příkladě, pravděpodobnosti kategorií p_k^0 mohou záviset na vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}_0$. Test dobré shody můžeme provést podle vzorce (8.3) jen tehdy, pokud tyto parametry známe. V praxi je ovšem někdy neznáme, můžeme je nanejvýš odhadnout. Nyní si ukážeme, jak upravit test dobré shody pro takové případy.

Uvažujme model $\mathcal{F}_0$: Nechť náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_K)^\mathsf{T}$ má multinomické rozdělení $\mathsf{Mult}_K(n, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta}_X))$, kde $\boldsymbol{\theta}_X \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ je neznámý d-rozměrný parametr, $d < K$, a $\boldsymbol{p}$ je funkce zobrazující Θ do $(0,1)^K$ taková, že $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta})^\mathsf{T}\mathbf{1}_K = 1$ pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ (součet všech složek $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta})$ je vždy 1). Zajímá nás, zdali rozdělení $\boldsymbol{X}$ lze popsat tímto modelem nebo ne.

Příklad. V nějaké populaci se určitý gen vyskytuje ve dvou variantách (alelách) A (např. tmavé oči) a a (např. světlé oči). Mezi všemi geny v celé populaci tvoří alela A podíl $\theta_X \in (0,1)$ a alela a $1-\theta_X$. Každý jedinec má dva exempláře příslušného genu (jeden po otci, jeden po matce). Pokud se geny míchají nezávisle (platí tzv. Hardyho-Weinbergovo ekvilibrium), pravděpodobnosti tří možných variant genotypu jedince jsou:

Genotyp	Pravděpodobnost
AA	θ_X^2
Aa	$2\theta_X(1-\theta_X)$
aa	$(1-\theta_X)^2$

Pozorujeme genotypy n nezávislých jedinců a označíme X_1, X_2, X_3 počty jedinců s genotypem (po řadě) AA, Aa, aa. Platí-li Hardyho-Weinbergovo ekvilibrium, pak vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^\mathsf{T}$ má rozdělení $\mathsf{Mult}_3(n, \boldsymbol{p}(\theta_X))$, kde $\boldsymbol{p}(\theta_X) = (\theta_X^2, 2\theta_X(1-\theta_X), (1-\theta_X)^2)^\mathsf{T}$. Na základě pozorování $\boldsymbol{X}$ chceme otestovat, zdali se populace nachází v Hardyho-Weinbergově ekvilibriu.

Zde asi bude končit předn. 23 (14.12.)

Parametry $\boldsymbol{\theta}_X$ potřebujeme odhadnout. K tomu lze použít např. metodu maximální věrohodnosti, která vede k soustavě d rovnic o d neznámých $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$:

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{X_k}{p_k(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)} \frac{\partial p_k(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}. \tag{8.4}$$

Uvažujme testování hypotézy

$$H_0 : \exists \boldsymbol{\theta}_X \in \Theta \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta}_X) \qquad \text{(model } \mathcal{F}_0 \text{ platí)}$$

proti alternativě

$$H_1 : \forall \boldsymbol{\theta}_X \in \Theta \quad \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta}_X) \qquad \text{(model } \mathcal{F}_0 \text{ neplatí)}.$$

Nejprve získáme odhad $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ parametru $\boldsymbol{\theta}_X$ vyřešením soustavy (8.4). Poté můžeme otestovat hypotézu H_0 testem dobré shody s odhadnutými parametry namísto parametrů skutečných. Rozdělení testové statistiky je stále χ^2, ale ztrácí se jeden stupeň volnosti za každý odhadovaný parametr.

Tvrzení 8.4 Platí-li hypotéza H_0, pak testová statistika

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{[X_k - n p_k(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)]^2}{n p_k(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)}$$

má asymptoticky rozdělení χ^2_{K-d-1}, kde d je počet odhadovaných parametrů.

Platnost tohoto tvrzení plyne z teorie maximální věrohodnosti, která bude vysvětlena v navazující přednášce. Testová statistika porovnává pozorovanou četnost X_k v kategorii k s četností $np_k(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ očekávanou za platnosti hypotézy; velké hodnoty testové statistiky svědčí proti H_0. Hypotézu H_0 zamítneme, pokud

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{[X_k - np_k(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)]^2}{np_k(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)} \geq \chi^2_{K-d-1}(1-\alpha), \tag{8.5}$$

kde $\chi^2_{K-d-1}(1-\alpha)$ značí $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení χ^2_{K-d-1}.

Poznámka. I zde je nutné mít dostatečně velký počet pozorování v každé složce vektoru $\boldsymbol{X}$.

Příklad (Pochází náhodný výběr z dané parametrické rodiny rozdělení?)**.** Mějme náhodný výběr $Z_1, \ldots, Z_n$. Zajímá nás, zdali pochází z rozdělení $F_X(x) = F(x; \boldsymbol{\theta}_X)$, kde $\boldsymbol{\theta}_X \in \Theta$ není známo (např. nějaké normální, gama nebo Poissonovo rozdělení).

Stanovíme si intervaly $(a_{k-1}, a_k\rangle$, $k = 1, \ldots, K$, $a_0 = -\infty$, $a_K = \infty$ tak, že jejich počet K je výrazně menší než n a do každého z intervalů padne dostatečný počet pozorování. Spočítáme, kolik pozorování padlo do k-tého intervalu: $X_k = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(a_{k-1}, a_k\rangle}(Z_i)$.

Pochází-li náhodný výběr $Z_1, \ldots, Z_n$ z rozdělení s distribuční funkcí $F(x; \boldsymbol{\theta}_X)$, potom vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_K)^\mathsf{T}$ má multinomické rozdělení $\mathsf{Mult}_K(n, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta}_X))$, kde pravděpodobnosti jednotlivých kategorií jsou $p_k(\boldsymbol{\theta}_X) = F(a_k; \boldsymbol{\theta}_X) - F(a_{k-1}; \boldsymbol{\theta}_X)$.

Řešením soustavy (8.4) získáme odhad $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ parametru $\boldsymbol{\theta}_X$. Provedeme test hypotézy H_0 testem dobré shody podle vzorce (8.5). Zamítne-li test hypotézu, prokázali jsme, že náhodný výběr $Z_1, \ldots, Z_n$ nepochází z dané rodiny rozdělení.

8.2 Kontingenční tabulky

Nechť $X \in \{1, \ldots, J\}$ a $Z \in \{1, \ldots, K\}$ jsou dvě kategoriální veličiny. Uvažujme náhodný výběr $(X_1, Z_1)^\mathsf{T}, \ldots, (X_N, Z_N)^\mathsf{T}$ o rozsahu N (pevném). Označme počet jedinců klasifikovaných do j-té kategorie veličiny X a k-té kategorie veličiny Z jako $n_{jk} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}\{X_i = j, Z_i = k\}$, $j = 1, \ldots, J$, $k = 1, \ldots, K$. Náhodnou veličinu n_{jk} nazýváme *pozorovanou četností*[*] pro kombinaci kategorií j a k. Označme $p_{jk} = \mathsf{P}[X = j, Z = k]$ a $\boldsymbol{p} = (p_{11}, \ldots, p_{JK})^\mathsf{T}$. Vzhledem k tomu, že pozorované četnosti byly vyvořeny klasifikací N nezávislých jedinců do JK kategorií, náhodný vektor $\boldsymbol{n} = (n_{11}, \ldots, n_{JK})^\mathsf{T}$ musí mít multinomické rozdělení $\mathsf{Mult}_{JK}(N, \boldsymbol{p})$. Protože pracujeme s multinomickým rozdělením, můžeme používat všechny výsledky z kapitoly 8.1. Odhadem pravděpodobnosti p_{ij} je n_{ij}/N. Odhadem vektoru $\boldsymbol{p}$ je $\widehat{\boldsymbol{p}}_n = \boldsymbol{n}/N$.

Označme dále

$$n_{j+} = \sum_{k=1}^{K} n_{jk}, \quad n_{+k} = \sum_{j=1}^{J} n_{jk}, \quad n_{++} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} n_{jk} = N,$$
$$p_{j+} = \sum_{k=1}^{K} p_{jk}, \quad p_{+k} = \sum_{j=1}^{J} p_{jk}, \quad p_{++} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} p_{jk} = 1.$$

Pravděpodobnosti p_{jk} určují sdružené rozdělení X a Z, pravděpodobnosti $p_{j+} = \mathsf{P}[X = j]$ určují marginální rozdělení X, pravděpodobnosti $p_{+k} = \mathsf{P}[Z = k]$ určují marginální rozdělení Z.

[*] Angl. *observed frequency*

Pozorované četnosti můžeme sestavit do tabulky, kterou nazýváme *kontingenční tabulka*[*].

	$Z=1$	…	$Z=K$	Σ
$X=1$	n_{11}	…	n_{1K}	n_{1+}
$X=2$	n_{21}	…	n_{2K}	n_{2+}
…	…	…	…	…
$X=J$	n_{J1}	…	n_{JK}	n_{J+}
Σ	n_{+1}	…	n_{+K}	N

Podobně můžeme sestavit tabulku pravděpodobností, která popisuje sdružené rozdělení vektoru $(X,Z)^\mathsf{T}$ i marginální rozdělení veličin X a Z.

	$Z=1$	…	$Z=K$	Σ
$X=1$	p_{11}	…	p_{1K}	p_{1+}
$X=2$	p_{21}	…	p_{2K}	p_{2+}
…	…	…	…	…
$X=J$	p_{J1}	…	p_{JK}	p_{J+}
Σ	p_{+1}	…	p_{+K}	1

Označme ještě podmíněné pravděpodobnosti

$$\mathsf{P}\left[X=j \mid Z=k\right] = p_{j(k)} = \frac{p_{jk}}{p_{+k}},$$
$$\mathsf{P}\left[Z=k \mid X=j\right] = p_{(j)k} = \frac{p_{jk}}{p_{j+}}.$$

8.2.1 Kontingenční tabulky 2×2

Nejprve se budeme zabývat speciálním případem $J=2$ a $K=2$, kdy obě veličiny mohou nabývat pouze dvou hodnot. Výsledná kontingenční tabulka obsahuje 2×2 četnosti:

	$Z=1$	$Z=2$	Σ
$X=1$	n_{11}	n_{12}	n_{1+}
$X=2$	n_{21}	n_{22}	n_{2+}
Σ	n_{+1}	n_{+2}	N

	$Z=1$	$Z=2$	Σ
$X=1$	p_{11}	p_{12}	p_{1+}
$X=2$	p_{21}	p_{22}	p_{2+}
Σ	p_{+1}	p_{+2}	1

Tuto situaci jsme vlastně řešili v kapitole 7.2. Představme si, že veličina Z určuje číslo výběru: máme jeden výběr hodnot náhodné veličiny X z jedinců splňujících $Z=1$ a druhý výběr náhodné veličiny X z jedinců splňujících $Z=2$. V prvním výběru bylo n_{11} hodnot $X=1$ (úspěch) a n_{21} hodnot $X=2$ (neúspěch), celkem n_{+1} pozorování. Pravděpodobnost úspěchu v 1. výběru je $p_{1(1)}=p_{11}/p_{+1}$. V druhém výběru bylo n_{12} hodnot $X=1$ (úspěch) a n_{22} hodnot $X=2$ (neúspěch), celkem n_{+2} pozorování. Pravděpodobnost úspěchu v 2. výběru je $p_{1(2)}=p_{12}/p_{+2}$.

Značení zavedené v kapitole 7.2 můžeme snadno převést na značení používané nyní a naopak. Naše kontingenční tabulka přepsaná do značení z kapitoly 7.2 vypadá takto:

[*] Angl. *contingency table*

	$Z=1$	$Z=2$	Σ
$X=1$	X_1	X_2	X_1+X_2
$X=2$	$n-X_1$	$m-X_2$	$n+m-X_1-X_2$
Σ	n	m	$n+m$

Rozdíl proti situaci v kapitole 7.2 spočívá v tom, že tam byly oba výběry nezávislé, zatímco nyní uvažujeme jeden výběr z multinomického rozdělení se čtyřmi možnými hodnotami. Tehdy byly rozsahy obou výběrů n, m pevné, nyní jsou to binomické náhodné veličiny a pouze celkový počet pozorování $N = n + m$ je pevný. Znovu jsme narazili na dvě různé formulace dvouvýběrového problému, podobně jako v kapitole 6 o dvouvýběrových testech pro nominální data. Stejně jako tam, i tady je jedno, kterou formulaci používáme a jakým způsobem byla kontingenční tabulka vytvořena. Všechny studované metody platí pro obě dvě formulace.

Kapitola 7.2 vysvětluje, jak porovnat riziko události $[X = 1]$ pro různé hodnoty Z. Můžeme použít tři způsoby porovnání:

- *rozdíl pravděpodobností* $d_X = p_{1(1)} - p_{1(2)}$ odhadneme pomocí $\widehat{d} = \frac{n_{11}}{n_{+1}} - \frac{n_{12}}{n_{+2}}$;
- *podíl pravděpodobností* $r_X = p_{1(1)}/p_{1(2)}$ odhadneme pomocí $\widehat{r} = \frac{n_{11}n_{+2}}{n_{12}n_{+1}}$;
- *poměr šancí* $o_X = \frac{p_{1(1)}(1-p_{1(2)})}{p_{1(2)}(1-p_{1(1)})}$ odhadneme pomocí $\widehat{o} = \frac{n_{11}n_{22}}{n_{12}n_{21}}$ (proto se poměru šancí někdy říká *křížový poměr*[*]).

Metody pro testování těchto parametrů a konstrukci intervalů spolehlivosti jsou uvedeny v kapitole 7.2.

Náhodné veličiny X a Z jsou nezávislé, právě když pro každé $j, k \in \{1, 2\}$ platí

$$\mathsf{P}[X = j, Z = k] = \mathsf{P}[X = j]\,\mathsf{P}[Z = k] \quad \text{neboli} \quad p_{jk} = p_{j+}p_{+k}$$

anebo ekvivalentně

$$\mathsf{P}\left[X = j \mid Z = k\right] = \mathsf{P}[X = j] \quad \text{neboli} \quad p_{j(k)} = p_{j+}.$$

Jelikož $p_{2(k)} = 1 - p_{1(k)}$, nezávislost platí právě když $p_{1(1)} = p_{1(2)}$, což je ekvivalentní kterémukoli ze vztahů

$$d_X = 0, \quad r_X = 1, \quad o_x = 1.$$

Test na nulovost rozdílu rizik nebo jednotkovost relativního rizika či poměru šancí je v této situaci zároveň testem nezávislosti X a Z.

Testování nezávislosti χ^2 testem

Jiný způsob, jak otestovat nezávislost X a Z poskytuje χ^2 test dobré shody pro multinomické rozdělení s odhadnutými parametry založený na tvrzení 8.4. Pokud platí hypotéza, že X a Z jsou nezávislé, pravděpodobnosti $\boldsymbol{p} = (p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})^\mathsf{T}$ specifikující multinomické rozdělení vektoru $\boldsymbol{n}$ jsou vlastně funkcemi pouze dvou parametrů p_{1+} a p_{+1}. Máme

[*] Angl. *cross ratio*

tedy $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta}_X)$, kde $\boldsymbol{\theta}_X = (p_{1+}, p_{+1})^\mathsf{T}$. Maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}_X$ za hypotézy nezávislosti je $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{p}_{1+}, \widehat{p}_{+1})^\mathsf{T} = (n_{1+}/N, n_{+1}/N)^\mathsf{T}$, což jsou empirické relativní četnosti jevů $[X = 1]$ a $[Z = 1]$. Maximálně věrohodný odhad vektoru $\boldsymbol{p}$ za hypotézy nezávislosti jest

$$\begin{aligned}
p_{11}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) &= \widehat{p}_{1+}\widehat{p}_{+1} = \frac{n_{1+}n_{+1}}{N^2} \\
p_{12}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) &= \widehat{p}_{1+}(1-\widehat{p}_{+1}) = \widehat{p}_{1+}\widehat{p}_{+2} = \frac{n_{1+}n_{+2}}{N^2} \\
p_{21}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) &= (1-\widehat{p}_{1+})\widehat{p}_{+1} = \widehat{p}_{2+}\widehat{p}_{+1} = \frac{n_{2+}n_{+1}}{N^2} \\
p_{22}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) &= (1-\widehat{p}_{1+})(1-\widehat{p}_{+1}) = \widehat{p}_{2+}\widehat{p}_{+2} = \frac{n_{2+}n_{+2}}{N^2}
\end{aligned}$$

Očekávané četnosti v kontingenční tabulce za platnosti hypotézy jsou $N p_{jk}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = N\widehat{p}_{j+}\widehat{p}_{+k} = n_{j+}n_{+k}/N$. Počet odhadovaných parametrů je $d = 2$.

Testová statistika je

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j+}n_{+k}}{N}\right)^2}{\frac{n_{j+}n_{+k}}{N}}.$$

Za platnosti hypotézy nezávislosti má asymptoticky rozdělení χ^2_{4-d-1}, kde $d = 2$, tj. χ^2_1. Hypotézu nezávislosti zamítneme, pokud $\chi^2 \geq \chi^2_1(1-\alpha)$.

Zde asi bude končit předn. 24 (19.12.)

8.2.2 Kontingenční tabulky $2 \times K$

Nyní rozšíříme zkoumanou situaci na případ $J = 2$ a $K \geq 2$. Kontingenční tabulka obsahuje $2 \times K$ četností:

	$Z=1$	$Z=2$	$\ldots$	$Z=K$	Σ
$X=1$	n_{11}	n_{12}	$\ldots$	n_{1K}	n_{1+}
$X=2$	n_{21}	n_{22}	$\ldots$	n_{2K}	n_{2+}
Σ	n_{+1}	n_{+2}	$\ldots$	n_{+K}	N

	$Z=1$	$Z=2$	$\ldots$	$Z=K$	Σ
$X=1$	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1K}	p_{1+}
$X=2$	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2K}	p_{2+}
Σ	p_{+1}	p_{+2}	$\ldots$	p_{+K}	N

Toto je zobecnění situace řešené v kapitole 7.2. Můžeme si ji představit i tak, že máme (po sloupcích) K výběrů z binomického rozdělení s potenciálně různými pravděpodobnostmi úspěchu p_{1k}/p_{+k} nebo máme (po řádcích) dva výběry z multinomického rozdělení s potenciálně různými vektory pravděpodobností

$$(p_{11}/p_{1+}, p_{12}/p_{1+}, \ldots, p_{1K}/p_{1+})^\mathsf{T} \quad \text{a} \quad (p_{21}/p_{2+}, p_{22}/p_{2+}, \ldots, p_{2K}/p_{2+})^\mathsf{T}.$$

Testování nezávislosti χ^2 testem

X a Z jsou nezávislé, právě když $p_{1(1)} = p_{1(2)} = \ldots = p_{1(K)}$. To vyžaduje, aby pro kterékoli dvě skupiny $Z = k_1$ a $Z = k_2$ byl rozdíl rizik 0 nebo relativní riziko či poměr šancí 1. Zatímco zobecnit testování pomocí rozdílů rizik, jednotkovosti relativního rizika či poměrů šancí na tento případ by vyžadovalo další práci, χ^2 test nezávislosti lze zobecnit snadno.

Pokud platí hypotéza, že X a Z jsou nezávislé náhodné veličiny, pravděpodobnosti $\boldsymbol{p} = (p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{1K}, p_{2K})^\mathsf{T}$ specifikující multinomické rozdělení vektoru $\boldsymbol{n}$ jsou funkcemi p_{1+} a $p_{+1}, \ldots, p_{+(K-1)}$, celkem K parametrů. Máme tedy

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta}_X), \text{ kde } \boldsymbol{\theta}_X = (p_{1+}, p_{+1}, \ldots, p_{+(K-1)})^\mathsf{T}.$$

Maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}_X$ za hypotézy nezávislosti je roven marginálním empirickým četnostem

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{p}_{1+}, \widehat{p}_{+1}, \ldots, \widehat{p}_{+(K-1)})^\mathsf{T} = (n_{1+}/N, n_{+1}/N, \ldots, n_{+(K-1)}/N)^\mathsf{T}.$$

Maximálně věrohodné odhady složek vektoru $\boldsymbol{p}$ za hypotézy nezávislosti jsou

$$p_{jk}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \widehat{p}_{j+}\widehat{p}_{+k} = \frac{n_{j+}n_{+k}}{N^2},$$

$j = 1, 2$, $k = 1, \ldots, K$. Očekávané četnosti v kontingenční tabulce za platnosti hypotézy jsou $N p_{jk}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = N\widehat{p}_{j+}\widehat{p}_{+k} = n_{j+}n_{+k}/N$.

Testová statistika je

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{K} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j+}n_{+k}}{N}\right)^2}{\frac{n_{j+}n_{+k}}{N}}.$$

Za platnosti hypotézy nezávislosti má asymptoticky rozdělení χ^2_{2K-K-1}, tj. χ^2_{K-1}. Hypotézu nezávislosti zamítneme, pokud $\chi^2 \geq \chi^2_{K-1}(1-\alpha)$.

Test nezávislosti zároveň testuje i hypotézu, že K výběrů z binomického rozdělení má stejné pravděpodobnosti úspěchu (jde tedy o K-výběrový test na binomické rozdělení) a hypotézu, že dva výběry z multinomického rozdělení mají stejné vektory pravděpodobností (jde tedy o dvouvýběrový test na multinomické rozdělení).

8.2.3 Kontingenční tabulky $J \times K$

Zobecnění na situaci $J \geq 2$ a $K \geq 2$ je nyní snadné. Kontingenční tabulka obsahuje $J \times K$ četností:

	$Z = 1$	$\ldots$	$Z = K$	Σ
$X = 1$	n_{11}	$\ldots$	n_{1K}	n_{1+}
$X = 2$	n_{21}	$\ldots$	n_{2K}	n_{2+}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$X = J$	n_{J1}	$\ldots$	n_{JK}	n_{J+}
Σ	n_{+1}	$\ldots$	n_{+K}	N

	$Z=1$	…	$Z=K$	Σ
$X=1$	p_{11}	…	p_{1K}	p_{1+}
$X=2$	p_{21}	…	p_{2K}	p_{2+}
…	…	…	…	…
$X=J$	p_{J1}	…	p_{JK}	p_{J+}
Σ	p_{+1}	…	p_{+K}	1

Můžeme si ji představit i tak, že máme (po sloupcích) K výběrů z multinomického rozdělení Mult_J s potenciálně různými vektory pravděpodobností nebo (po řádcích) J výběrů z multinomického rozdělení Mult_K s potenciálně různými vektory pravděpodobností.

Testování nezávislosti χ^2 testem

Nezávislost X a Z platí, právě když $p_{j(1)} = p_{j(2)} = \ldots = p_{j(K)}$ pro všechna $j = 1, \ldots, J$. To vyžaduje, aby v kterékoli podtabulce 2×2 obsahující hodnoty $X = j_1, j_2$ a $Z = k_1, k_2$ byl rozdíl rizik 0 nebo relativní riziko či poměr šancí 1.

Pokud platí hypotéza, že X a Z jsou nezávislé náhodné veličiny, pravděpodobnosti $\boldsymbol{p} = (p_{11}, \ldots, p_{JK})^\mathsf{T}$ specifikující multinomické rozdělení vektoru $\boldsymbol{n}$ jsou funkcemi $d = J + K - 2$ parametrů $\boldsymbol{\theta}_X = (p_{1+}, \ldots, p_{(J-1)+}, p_{+1}, \ldots, p_{+(K-1)})^\mathsf{T}$. Maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}_X$ za hypotézy nezávislosti je

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\widehat{p}_{1+}, \ldots, \widehat{p}_{(J-1)+}, \widehat{p}_{+1}, \ldots, \widehat{p}_{+(K-1)})^\mathsf{T} = (n_{1+}/N, \ldots, n_{(J-1)+}/N, n_{+1}/N, \ldots, n_{+(K-1)}/N)^\mathsf{T}.$$

Maximálně věrohodné odhady složek vektoru $\boldsymbol{p}$ za hypotézy nezávislosti vyjdou

$$p_{jk}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \widehat{p}_{j+}\widehat{p}_{+k} = \frac{n_{j+}n_{+k}}{N^2},$$

$j = 1, \ldots, J$, $k = 1, \ldots, K$. Očekávané četnosti v kontingenční tabulce za platnosti hypotézy jsou opět $N p_{jk}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) = N\widehat{p}_{j+}\widehat{p}_{+k} = n_{j+}n_{+k}/N$.

Testová statistika χ^2 testu nezávislosti má tvar

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} \frac{\left(n_{jk} - \frac{n_{j+}n_{+k}}{N}\right)^2}{\frac{n_{j+}n_{+k}}{N}}.$$

Podle tvrzení 8.4 má tato statistika za platnosti hypotézy nezávislosti asymptoticky χ^2 rozdělení s počtem stupňů volnosti $JK - (J + K - 2) - 1$, tj. $(J-1)(K-1)$. Hypotézu nezávislosti zamítneme, pokud $\chi^2 \geq \chi^2_{(J-1)(K-1)}(1-\alpha)$.

Test nezávislosti zároveň testuje i hypotézu že K výběrů z multinomického rozdělení má stejné vektory pravděpodobností (jde tedy o K-výběrový test na shodnost parametrů K multinomických rozdělení).

9 Analýza rozptylu

Dvouvýběrové testy ověřují, jestli se dvě skupiny nezávislých pozorování liší v nějaké charakteristice, nejčastěji ve střední hodnotě. Jak ale porovnat střední hodnoty, je-li skupin více? Pro kategoriální data (binomické či multinomické rozdělení) jsme problém porovnání několika skupin řešili v minulé kapitole. Nyní budeme studovat tento problém u kvantitativních náhodných veličin.

Máme $p \geq 2$ nezávislých náhodných výběrů (skupin)

$$\begin{aligned} &Y_{11}, \ldots, Y_{1n_1} \text{ z rozdělení } F_1, \\ &Y_{21}, \ldots, Y_{2n_2} \text{ z rozdělení } F_2, \\ &\vdots \\ \text{a} \quad &Y_{p1}, \ldots, Y_{pn_p} \text{ z rozdělení } F_p. \end{aligned}$$

Pozorování označujeme Y_{ij}, kde i je číslo výběru jdoucí od 1 do p a j je index pozorování v rámci daného výběru běžící od 1 do n_i, kde n_i je rozsah i-tého výběru. Označme $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ a $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_p)^\mathsf{T}$. Platí $\mathbf{1}_p^\mathsf{T} \boldsymbol{n} = N$.

9.1 Analýza rozptylu – jednoduché třídění

Budeme předpokládat platnost modelu, který požaduje, aby všechny výběry měly normální rozdělení s totožným rozptylem. Jednotlivé skupiny se tedy mohou navzájem lišit pouze střední hodnotou.

Model:

$$\mathcal{F} = \{F_i = \mathsf{N}(\mu_i, \sigma^2), \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, p, \sigma^2 > 0\}$$

Parametr μ_i označuje střední hodnotu i-té skupiny, tj. $\mu_i = \mathsf{E}\, Y_{ij}$. Budeme se zabývat otázkou, zdali všechny skupiny mají stejnou střední hodnotu.

Testované parametry: Střední hodnoty $\mu_i = \mathsf{E}\, Y_{ij}$

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_p, \quad H_1 : \exists i \neq j : \mu_i \neq \mu_j.$$

Značení. Nechť $Y_{i+} \overset{\mathsf{df}}{=} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$ a $\overline{Y}_{i+} \overset{\mathsf{df}}{=} n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$ jsou součty a průměry jednotlivých skupin, nechť $Y_{++} \overset{\mathsf{df}}{=} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$ je celkový součet a $\overline{Y}_{++} \overset{\mathsf{df}}{=} N^{-1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$ je celkový průměr. Všimněte si, že $\overline{Y}_{++}$ je vážený průměr skupinových průměrů $\overline{Y}_{i+}$ s vahami n_i, tj.

$$\overline{Y}_{++} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \overline{Y}_{i+}}{\sum_{i=1}^{p} n_i}.$$

Označme dále pozorování ve skupinách $\boldsymbol{Y}_i = (Y_{i1}, \ldots, Y_{in_i})^\mathsf{T}$, $i = 1, \ldots, p$, všechna pozorování $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}_1^\mathsf{T}, \ldots, \boldsymbol{Y}_p^\mathsf{T})^\mathsf{T}$ a průměry skupin $\overline{\boldsymbol{Y}} = (\overline{Y}_{1+}, \ldots, \overline{Y}_{p+})^\mathsf{T}$.

Náš přístup bude založen na několika druzích součtů čtverců, které zavádí následující definice.

Definice 9.1 Součty čtverců v analýze rozptylu:

- $SS_C \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_{++})^2$ nazýváme *celkový součet čtverců*[*],
- $SS_A \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{p} n_i (\overline{Y}_{i+} - \overline{Y}_{++})^2$ nazýváme *součet čtverců skupin*[†],
- $SS_e \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i+})^2$ nazýváme *residuální součet čtverců*[‡].

Věta 9.1 Platí

$$SS_C = SS_A + SS_e.$$

Poznámka. SS_C měří celkovou variabilitu dat. Tu můžeme rozložit na variabilitu mezi jednotlivými skupinami vyjadřující jejich vzájemnou odlišnost (SS_A) a variabilitu uvnitř jednotlivých skupin SS_e.

Jelikož $\overline{Y}_{i+}$ je odhadem μ_i a $\overline{Y}_{++}$ je odhadem celkové střední hodnoty (za H_0), bude za platnosti hypotézy SS_A malé vzhledem k SS_e. Pokud je SS_A velké vzhledem k SS_e, znamená to, že se průměry jednotlivých skupin od sebe příliš liší a hypotézu o rovnosti středních hodnot bychom měli zamítat.

Označme $\mathbb{A}_i = \mathbb{I}_{n_i} - \frac{1}{n_i}\mathbf{1}_{n_i}^{\otimes 2}$, $\mathbb{C} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{n}) - \frac{1}{N}\boldsymbol{n}^{\otimes 2}$,

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1}^{\mathsf{T}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n_2}^{\mathsf{T}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1}_{n_p}^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{A}_p \end{pmatrix}.$$

Následující lemma ukazuje, že SS_A a SS_e lze přepsat jako kvadratické formy.

Lemma 9.2 Platí

(i) $\overline{\boldsymbol{Y}} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{n})^{-1}\mathbb{H}\boldsymbol{Y}$;
(ii) $\mathbf{1}_N^{\mathsf{T}}\mathbb{A} = \mathbf{0}^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{1}_p^{\mathsf{T}}\mathbb{C} = \mathbf{0}^{\mathsf{T}}$;
(iii) $SS_e = \boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y} - c\mathbf{1}_N)^{\mathsf{T}}\mathbb{A}(\boldsymbol{Y} - c\mathbf{1}_N)$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$;
(iv) $SS_A = \overline{\boldsymbol{Y}}^{\mathsf{T}}\mathbb{C}\overline{\boldsymbol{Y}} = (\overline{\boldsymbol{Y}} - c\mathbf{1}_p)^{\mathsf{T}}\mathbb{C}(\overline{\boldsymbol{Y}} - c\mathbf{1}_p)$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ a
(v) $SS_A = \boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}\mathbb{B}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y} - c\mathbf{1}_N)^{\mathsf{T}}\mathbb{B}(\boldsymbol{Y} - c\mathbf{1}_N)$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$, kde $\mathbb{B} = \mathbb{H}^{\mathsf{T}}\operatorname{diag}(\boldsymbol{n})^{-1}\mathbb{C}\operatorname{diag}(\boldsymbol{n})^{-1}\mathbb{H}$.

Zde asi bude končit předn. 25 (9.1.)

Věta 9.3 (rozdělení součtů čtverců) Za platnosti modelu $\mathcal{F}$ máme

(i)
$$\frac{SS_e}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-p}, \quad \mathsf{E}\,\frac{SS_e}{N-p} = \sigma^2.$$

(ii) Platí-li navíc hypotéza H_0, pak
$$\frac{SS_C}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-1}, \quad \mathsf{E}\,\frac{SS_C}{N-1} = \sigma^2.$$

[*] Angl. *total sum of squares* [†] Angl. *between group sum of squares* [‡] Angl. *residual sum of squares, error sum of squares*

(iii) Platí-li navíc hypotéza H_0, pak

$$\frac{SS_A}{\sigma^2} \sim \chi^2_{p-1}, \quad \mathsf{E}\,\frac{SS_A}{p-1} = \sigma^2.$$

(iv) SS_A a SS_e jsou nezávislé.

Poznámka.

- $SS_e/(N-p)$ je vždy nestranným odhadem rozptylu σ^2 (bez ohledu na platnost hypotézy nebo předpoklad normality).
- $SS_A/(p-1)$ je nestranným odhadem rozptylu pouze za hypotézy (ať už je rozdělení Y_{ij} normální nebo ne). Pokud hypotéza neplatí, lze ukázat pomocí lemmatu 2.5, že

$$\mathsf{E}\,\frac{SS_A}{p-1} = \sigma^2 + \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p} n_i\,(\mu_i - \overline{\mu})^2,$$

  kde $\overline{\mu} = N^{-1}\sum_{i=1}^{p} n_i\mu_i$. Porušení hypotézy se tedy projeví na SS_A zvýšením jeho střední hodnoty.
- Tato metoda se nazývá analýza rozptylu* kvůli tomu, jakým způsobem je sestavena testová statistika. Účelem analýzy rozptylu není analyzovat rozptyl.

Testová statistika:

$$F_A = \frac{SS_A}{p-1}\Big/\frac{SS_e}{N-p}$$

Hypotézu budeme zamítat pro příliš velké hodnoty F_A.

Věta 9.4 Za platnosti modelu $\mathcal{F}$ a hypotézy H_0 platí $F_A \sim F_{p-1,N-p}$.

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow F_A \geq F_{p-1,N-p}(1-\alpha)$$

kde $F_{p-1,N-p}(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-tý kvantil F rozdělení s $p-1$ a $N-p$ stupni volnosti.

Poznámka.

- Tento test se nazývá F test analýzy rozptylu. Je to přesný test rovnosti středních hodnot v $p \geq 2$ nezávislých výběrech. Vyžaduje normální rozdělení a stejný rozptyl ve všech výběrech.
- Pokud rozdělení dat není normální, ale rozptyly ve všech skupinách jsou stejné, F test analýzy rozptylu dodržuje hladinu alespoň asymptoticky.
- Pro případ nestejných rozptylů navrhl zobecnění testové statistiky a aproximaci jejího rozdělení Welch. Jde vlastně o zobecnění dvouvýběrového Welchova testu na více výběrů. Publikované simulační studie ukazují, že porušení předpokladu shodných rozptylů nemá zásadní vliv na chování F testu analýzy rozptylu, pokud je počet pozorování ve všech skupinách přibližně stejný.

P-hodnota: $1-F^*(s)$, kde s je pozorovaná hodnota testové statistiky a F^* je distribuční funkce rozdělení $F_{p-1,N-p}$.

* Angl. *analysis of variance, ANOVA*

Poznámka. Výsledky analýzy rozptylu se tradičně uvádějí formou tabulky.

Zdroj měnlivosti	Součet čtverců	Stupňů volnosti	Podíl	F
Skupina	SS_A	$p-1$	$\frac{SS_A}{p-1}$	$\frac{SS_A}{p-1} / \frac{SS_e}{N-p}$
Residuální	SS_e	$N-p$	$\frac{SS_e}{N-p}$	
Celkový	SS_C	$N-1$		

Tvrzení 9.5 Pokud $p = 2$, pak platí

$$F_A = T^2_{n_1,n_2},$$

kde F_A je testová statistika analýzy rozptylu a $T^2_{n_1,n_2}$ je čtverec testové statistiky dvouvýběrového t-testu.

Pro porovnání dvou skupin je tedy analýza rozptylu ekvivalentní dvouvýběrovému t-testu.

Analýza rozptylu se dále zobecňuje na vícenásobné třídění. Tato zobecnění se probírají v předmětu Lineární regrese. Např. dvojné třídění spočívá v tom, že se pozorování klasifikují do pq skupin podle dvou kategoriálních veličin s p a q hodnotami. Zajímá nás, zdali některá z obou kategoriálních veličin ovlivňuje střední hodnotu pozorování.

9.2 Mnohonásobná porovnávání

V analýze rozptylu porovnáváme mezi sebou střední hodnoty p skupin. Pokud F test analýzy rozptylu zamítne hypotézu, že všechny skupiny mají stejnou střední hodnotu, pak usoudíme, že alespoň některé skupiny se od sebe liší ve středních hodnotách. Nevíme ovšem, kolik takových odlišných skupin je, ani které to jsou.

Kdybychom chtěli porovnat střední hodnoty pouze dvou skupin, třeba skupin i a j, použili bychom dvouvýběrový t-test. Mohli bychom pak provést dvouvýběrové testy pro všech $p(p-1)/2$ možných dvojic skupin a otestovat všechny hypotézy $H_0^{ij} : \mu_i = \mu_j$ na hladině α. Potom ale pravděpodobnost, že alespoň jednu hypotézu zamítneme za podmínky, že všechny hypotézy platí, není rovna α, ale je větší.

Problém současného testování více hypotéz se ve statistice často nazývá *problém mnohonásobných porovnávání*[*] nebo *mnohonásobného testování*[†]. Tento problém lze převést na problém konstrukce několika intervalů spolehlivosti pro různé parametry tak, aby pravděpodobnost, že *všechny* intervaly pokrývají hledané parametry byla $1-\alpha$. Pak hovoříme o *simultánních intervalech spolehlivosti*[‡].

V této kapitole si uvedeme nejprve jeden obecný přístup k tomuto problému a pak speciální metodu pro porovnávání středních hodnot několika nezávislých výběrů.

[*] Angl. *multiple comparisons* [†] Angl. *multiple testing* [‡] Angl. *simultaneous confidence intervals*

9.2.1 Bonferroniho metoda

Představme si obecný problém mnohonásobného testování: máme m hypotéz $H_0^1, \ldots, H_0^m$, které chceme otestovat. Hypotéza H_0^i bude testována testem s testovou statistikou T_i a kritickým oborem C_i zvoleným tak, aby každý test měl hladinu α_0. Pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ tedy platí

$$\mathsf{P}_{H_0^i}[T_i \in C_i] = \alpha_0.$$

Celková pravděpodobnost zamítnutí alespoň jedné hypotézy za předpokladu, že všechny platí, je

$$\mathsf{P}_{\bigcap H_0^i}\left(\bigcup_{i=1}^m [T_i \in C_i]\right) = \alpha_C.$$

Pochopitelně α_C je větší než α_0, často výrazně.

Máme danou celkovou hladinu α a chceme zaručit, že $\alpha_C \leq \alpha$. K tomu použijeme následující lemma.

Lemma 9.6 (Booleova nerovnost) Pro jakékoli náhodné jevy $A_1, \ldots, A_n$ platí

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathsf{P}(A_i).$$

Booleova nerovnost je triviální pro $n = 2$, pro vyšší n se snadno dokáže matematickou indukcí.

Máme tedy

$$\alpha_C = \mathsf{P}_{\bigcap H_0^i}\left(\bigcup_{i=1}^m [T_i \in C_i]\right) \leq m\alpha_0.$$

Zvolíme-li $\alpha_0 = \alpha/m$, pak musí platit $\alpha_C \leq \alpha$. Chceme-li tedy provést m testů tak, aby celková hladina všech testů (pravděpodobnost zamítnutí alespoň jedné hypotézy za podmínky, že všechny platí) byla nejvýše α, provedeme jednotlivé dílčí testy na hladině α/m. Podobně, chceme-li sestrojit m intervalů spolehlivosti tak, aby pravděpodobnost, že všechny intervaly pokryjí hledané parametry, byla alespoň $1 - \alpha$, stačí stanovit pravděpodobnost pokrytí jednotlivých dílčích intervalů na $1 - \alpha/m$. Tento přístup k mnohonásobnému testování a konstrukci simultánních intervalů spolehlivosti se nazývá *Bonferroniho metoda*[*].

Výhodou Bonferroniho metody je její jednoduchopst a universalita. Její nevýhodou je, že úprava hladiny α na α/m je téměř vždy příliš přísná. Bonferroniho metoda tedy dává testy s malou silou a zbytečně široké intervaly spolehlivosti.

Aplikace Bonferroniho metody na mnohonásobná porovnávání v analýze rozptylu vypadá takto: provedeme $p(p-1)/2$ dvouvýběrových t-testů pro všechny možné dvojice skupin a otestujeme všechny hypotézy $H_0^{ij} : \mu_i = \mu_j$ na hladině $2\alpha/[p(p-1)]$. Pokud je některá z těchto hypotéz zamítnuta, prohlásíme střední hodnoty daných dvou skupin za významně odlišné na celkové hladině α.

Máme-li například $\alpha = 0.05$ a $p = 6$ skupin, provádíme 15 testů rovnosti středních hodnot pro 15 dvojic různých skupin na hladině $0.05/15 \doteq 0,0033$. To je natolik nízká hladina, že může být obtížné najít kterékoli dvě odlišné skupiny, přestože F test analýzy rozptylu zamítá hypotézu, že všechny střední hodnoty jsou stejné.

Zde asi bude končit předn. 26 (12.1.)

[*] Angl. *Bonferroni correction*

9.2.2 Tukeyova metoda

Pozn.: Tato část nebyla v roce 2016/17 přednášena.

Mějme nezávislé náhodné veličiny $Z_i \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ pro $i = 1, \ldots, m$. Nechť S^2 je odhad rozptylu σ^2 takový, že S^2 je nezávislé na $Z_1, \ldots, Z_m$ a pro nějaké přirozené k platí $kS^2/\sigma^2 \sim \chi^2_k$.

Definujme tak řečené *studentisované rozpětí*[*] jako

$$Q = \frac{\max_{i=1,\ldots,m} Z_i - \min_{i=1,\ldots,m} Z_i}{S}.$$

Lze ukázat, že náhodná veličina Q má rozdělení závisející pouze na hodnotách m a k. Označme kvantilovou funkci tohoto rozdělení $q_{m,k}(\alpha)$. (Vzorce pro hustotu a kvantilovou funkci studentisovaného rozpětí nebudeme uvádět.)[†]

Studentizovaného rozpětí lze použít k sestrojení simultánních intervalů spolehlivosti pro rozdíly středních hodnot. Tento postup se nazývá *Tukeyova metoda*.[‡]

Věta 9.7 (Tukeyova) Nechť $Z_1, \ldots, Z_m$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $Z_i \sim \mathsf{N}(\mu_i, \sigma^2)$. Nechť S^2 je odhad rozptylu σ^2 takový, že S^2 je nezávislé na $Z_1, \ldots, Z_m$ a pro nějaké přirozené k platí $kS^2/\sigma^2 \sim \chi^2_k$. Pak

$$\mathsf{P}\Big[Z_i - Z_j - Sq_{m,k}(1-\alpha) \le \mu_i - \mu_j \le Z_i - Z_j + Sq_{m,k}(1-\alpha) \quad \forall i \ne j \in \{1, \ldots, m\}\Big] = 1 - \alpha.$$

Tukeyovu větu lze snadno použít i na testování hypotéz. Hypotézu $H_0^{ij} : \mu_i = \mu_j$ zamítneme, pokud $\left|Z_i - Z_j\right| > Sq_{m,k}(1-\alpha)$. Hypotézu $H_0 : \mu_1 = \ldots = \mu_m$ zamítneme na celkové hladině α, pokud pro alespoň jednu dvojici $i \ne j$ platí $\left|Z_i - Z_j\right| > Sq_{m,k}(1-\alpha)$.

Tukeyovu větu můžeme přímo aplikovat na mnohonásobná porovnávání v analýze rozptylu, pokud rozsah výběru všech skupin je totožný, tj. $n_1 = \cdots = n_p \equiv n$. Pak totiž $\overline{Y}_{1+}, \ldots, \overline{Y}_{p+}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $\overline{Y}_{i+} \sim \mathsf{N}(\mu_i, \sigma^2/n)$. Za S^2, odhad σ^2/n vezmeme $SS_e/[n(N-p)]$. Máme $k = N - p$. Hypotézu $H_0^{ij} : \mu_i = \mu_j$ zamítneme, pokud

$$\left|\overline{Y}_{i+} - \overline{Y}_{j+}\right| > \sqrt{\frac{SS_e}{N-p}}\sqrt{\frac{1}{n}}q_{p,N-p}(1-\alpha). \tag{9.1}$$

Pokud rozsahy všech výběrů nejsou stejné, nemůžeme Tukeyovu větu přímo použít, protože nejsou splněny její předpoklady. Lze ale dokázat, že pokud výraz $\sqrt{\frac{1}{n}}$ v (9.1) nahradíme výrazem $\sqrt{\frac{1}{2n_i} + \frac{1}{2n_j}}$, celková pravděpodobnost zamítnutí některé z platných hypotéz H_0^{ij} nepřekročí α. Tukeyova metoda tedy po této úpravě stále funguje, pouze se stává poněkud konservativní.

[*] Angl. *studentized range* [†] Studentisované rozpětí se někdy definuje jako $Q/\sqrt{2}$. Na to je třeba dávat pozor při používání tabelovaných nebo softwarem vypočtených hodnot $q_{m,k}(\alpha)$. Pro kontrolu můžeme porovnat rozdělení Q při $m = 2$ s rozdělením $|T|$, kde $T \sim t_k$. Pro naši definici jsou tato dvě rozdělení totožná. [‡] Angl. *Tukey method, Tukey's range test, Tukey's HSD (honest significant difference) test.*

9.3 Kruskalův-Wallisův test

Pozn.: Tato část nebyla v roce 2016/17 přednášena.

Kruskalův-Wallisův test je zobecněním dvouvýběrového Wilcoxonova testu na porovnání $p \geq 2$ výběrů. I nadále používáme značení zavedené na začátku kapitoly Analýza rozptylu.

Model: $\mathcal{F} = \{F_i \text{ je spojitá d.f. taková, že } F_i(x) = F(x - \delta_i)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

Jde o p spojitých rozdělení navzájem posunutých v poloze. Bez újmy na obecnosti můžeme položit $\delta_1 = 0$.

Hypotéza a alternativa:

$$H_0 : \delta_1 = \cdots = \delta_p = 0, \quad H_1 : \exists i : \delta_i \neq 0.$$

Poznámka. Pokud platí model $\mathcal{F}$ a hypotéza H_0, rozdělení ve všech skupinách jsou totožná. Potom platí mezi p skupinami rovnost veškerých charakteristik. Nejsou-li rozptyly ve všech skupinách totožné, model $\mathcal{F}$ nemůže platit.

Testová statistika:

Lze ukázat, že testová statistika dvouvýběrového Wilcoxonova testu je ekvivalentní čitateli testové statistiky dvouvýběrového t testu (tj. rozdílu průměrů), pokud do ní místo původních pozorování dosadíme jejich pořadí. Se stejnou logikou můžeme použít čitatel testové statistiky F testu analýzy rozptylu (tj. SS_A), do nějž dosadíme pořadí namísto původních pozorování.

Nechť R_{ij} je pořadí pozorování Y_{ij} ve spojeném výběru $Y_{11}, \ldots, Y_{pn_p}$. Položme $R_{i+} = \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}$ a $\overline{R}_{i+} = n_i^{-1} R_{i+}$. Celkový průměr všech pořadí je $\overline{R}_{++} = N^{-1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij} = (N+1)/2$. Dosazením do vzorce pro SS_A dostaneme

$$\sum_{i=1}^{p} n_i \Big(\overline{R}_{i+} - \frac{N+1}{2}\Big)^2 = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i} \Big(R_{i+} - n_i \frac{N+1}{2}\Big)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i} \Big(R_{i+}^2 - R_{i+} n_i (N+1) + n_i^2 \frac{(N+1)^2}{4}\Big) = \sum_{i=1}^{p} \frac{R_{i+}^2}{n_i} - \frac{N(N+1)^2}{4}.$$

Tento výraz podělíme $N(N+1)/12$ a tím dostaneme testovou statistiku Q Kruskalova-Wallisova testu:

$$Q = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{p} \frac{R_{i+}^2}{n_i} - 3(N+1).$$

Tvrzení 9.8 (Hájek & Šidák, 1967) Platí-li model $\mathcal{F}$ a hypotéza H_0 a všechna n_i konvergují do ∞ stejně rychle, pak

$$Q \xrightarrow{\mathrm{d}} \chi^2_{p-1}.$$

Statistika $Q/(p-1)$ má tedy za platnosti hypotézy stejné asymptotické rozdělení jako F_A. Hypotézu budeme zamítat pro příliš velké hodnoty Q.

Kritický obor:

$$H_0 \text{ zamítneme } \Leftrightarrow Q \geq \chi^2_{p-1}(1-\alpha).$$

Poznámka. Neplatí-li model posunutí v poloze, Kruskalův-Wallisův test ověřuje hypotézy $H_0^{*(ij)}$: $\mathsf{P}[Y_{ik} < Y_{jl}] = 1/2$ pro všechna $i \neq j$ (viz diskuse dvouvýběrového Wilcoxonova testu na str. 99). Tuto hypotézu nelze interpretovat jako rovnost středních hodnot nebo mediánů. Limitní rozdělení testové statistiky Q navíc platí pouze za předpokladu posunutí v poloze, při porušení tohoto předpokladu nejsou kritické hodnoty správné. Nejsme-li si jistí platností modelu posunutí v poloze, Kruskalův-Wallisův test raději nepoužíváme.

10 Korelační analýza

Pozn.: Tato kapitola nebyla v roce 2016/17 přednášena.

Uvažujme náhodný výběr

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

dvousložkových náhodných vektorů, kde obě veličiny jsou spojité a $n \geq 3$.

10.1 Výběrový korelační koeficient

Chceme otestovat korelaci mezi oběma složkami, případně sestrojit interval spolehlivosti pro korelační koeficient definovaný jako

$$\varrho = \varrho(X_i, Y_i) = \frac{\operatorname{cov}(X_i, Y_i)}{\sqrt{\operatorname{var} X_i \operatorname{var} Y_i}}. \tag{10.1}$$

Jeho konsistentním odhadem je výběrový korelační koeficient

$$\widehat{\varrho}_n = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)(Y_i - \overline{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y}_n)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\overline{X}_n \overline{Y}_n}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2\right)\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\overline{Y}_n^2\right)}} \tag{10.2}$$

zavedený v definici 3.8.

Poznámka. Zde popisovaný korelační koeficient se někdy nazývá také *Pearsonův korelační koeficient*[*].

Ukážeme si nejprve bez důkazu rozdělení korelačního koeficientu za předpokladu normality a nezávislosti.

Tvrzení 10.1 Nechť $\binom{X_i}{Y_i}$, $i = 1, \ldots, n$ je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení s kladnými rozptyly a nulovou korelací mezi složkami. Pak platí

$$T = \sqrt{n-2}\frac{\widehat{\varrho}_n}{\sqrt{1-\widehat{\varrho}_n^2}} \sim t_{n-2}.$$

Tohoto tvrzení můžeme použít pro otestování hypotézy

$$H_0 : \varrho = 0 \text{ proti alternativě } H_1 : \varrho \neq 0$$

za předpokladu normality. Hypotézu H_0 zamítneme, pokud $|T| \geq t_{n-2}(1-\alpha/2)$. Tento test má přesně hladinu α.

[*] Angl. *Pearson correlation coefficient*

Poznámka. Nechť $\binom{X_i}{Y_i}$, $i = 1, \dots, n$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozdělení s konečnou nesingulární varianční maticí. Potom za předpokladu, že X_i a Y_i jsou nezávislé, platí, že $\rho = 0$. Navíc se dá ukázat, že

$$T = \sqrt{n-2}\frac{\widehat{\varrho}_n}{\sqrt{1-\widehat{\varrho}_n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1). \tag{10.3}$$

Tedy testová statistika T se dá použít jako asymptotický test hypotéz

$$H_0 : X_i \text{ a } Y_i \text{ jsou nezávislé} \qquad H_1 : X_i \text{ a } Y_i \text{ nejsou nezávislé},$$

i v případě, že nemají dvourozměrné normální rozdělení. Tento test bude citlivý proti alternativám, pro které je skutečný korelační koeficient ϱ nenulový, tj. mezi veličinami se dá detekovat lineární závislost. Na druhou stranu test však nebude konsistentní, pokud X_i a Y_i sice nebudou nezávislé, ale jsou nekorelované, tj. $\rho = 0$. Extrémní příkladem takové situace je, když X_i má symetrické rozdělení kolem nuly a $Y_i = X_i^2$.

Je důležité si uvědomit, že se zde jedná o test nezávislosti nikoliv však o test nekorelovanosti, tj. o test hypotézy, že $H_0 : \rho = 0$. Existují totiž dvourozměrná rozdělení, pro která je $\rho = 0$, ale asymptotický výsledek (10.3) neplatí.

Tvrzení 10.1 (ani výsledek (10.3)) však nelze rozšířit na testování hypotéz $H_0 : \varrho = \varrho_0$, kde $\varrho_0 \neq 0$. Nelze z něj také sestrojit interval spolehlivosti. Za předpokladu, že $\binom{X_i}{Y_i}$ mají **dvourozměrné normální rozdělení**, tak se dá pomocí Δ-metody (tvrzení 1.7) ukázat, že

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\varrho}_n - \varrho) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0, (1-\rho^2)^2). \tag{10.4}$$

Odtud bychom mohli sestavit asymptotický interval spolehlivosti pro parametr ρ jako

$$\left(\widehat{\varrho}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}}(1-\widehat{\varrho}_n^2)/\sqrt{n},\ \widehat{\varrho}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}}(1-\widehat{\varrho}_n^2)/\sqrt{n}\right).$$

Ukazuje se však, že obzvláště pokud $|\rho|$ je velké, tak je lépe použít transformaci stabilizující asymptotický rozptyl

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},$$

kterou navrhl R. A. Fisher. Tato transformace se nazývá *Fisherova Z-transformace*.

Tvrzení 10.2 Nechť $\binom{X_i}{Y_i}$, $i = 1, \dots, n$ je náhodný výběr z dvourozměrného normálního rozdělení s korelačním koeficientem ϱ. Pak pro výběrový korelační koeficient $\widehat{\varrho}_n$ platí

$$\sqrt{n-3}\left(\operatorname{arctgh}\widehat{\varrho}_n - \operatorname{arctgh}\varrho\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Důkaz. Důkaz plyne z asymptotické normality korelačního koeficientu (10.4) a Δ-metody (tvrzení 1.7). □

Poznámka. Použití $\sqrt{n-3}$ místo tradičního $\sqrt{n}$ nemá na asymptotické rozdělení vliv. Ukazuje se však, že normální aproximace je pro $\sqrt{n-3}$ zpravidla přesnější než pro $\sqrt{n}$. Důvodem je, že se dá odvodit, že

$$\mathsf{var}\,(\widehat{\varrho}_n) = \frac{1}{n-3} + o(\tfrac{1}{n}).$$

Chceme-li otestovat hypotézu $H_0 : \varrho = \varrho_0$ proti alternativě $H_1 : \varrho \neq \varrho_0$, spočítáme testovou statistiku

$$Z = \sqrt{n-3}\,(\operatorname{arctgh} \widehat{\varrho}_n - \operatorname{arctgh} \varrho_0)$$

a H_0 zamítneme na hladině α, pokud $|Z_n| \geq u_{1-\alpha/2}$. Přibližný interval spolehlivosti pro ϱ získáme z intervalu spolehlivosti pro $\operatorname{arctgh} \varrho$ zpětnou transformací pomocí funkce $\operatorname{tgh} x = \frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}$. Dostaneme interval

$$\left(\operatorname{tgh}\left(\operatorname{arctgh} \widehat{\varrho}_n - u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n-3}\right),\ \operatorname{tgh}\left(\operatorname{arctgh} \widehat{\varrho}_n + u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n-3}\right)\right).$$

Zdůrazněme, že Fisherova Z-transformace spoléhá na **dvourozměrnou normalitu**. Pro jiná rozdělení tvrzení 10.2 obecně neplatí. Pokud data nepocházejí z dvourozměrné normálního rozdělení, tak je třeba pomocí Δ-metody (tvrzení 1.7) najít asymptotické rozdělení výběrového korelačního koeficientu. Toto asymptotické rozdělení pak má mnohem složitější asymptotický rozptyl než je uvedeno v (10.4). Alternativně lze také využít metodu *bootstrap*, s níž se lze seznámit v předmětu „Moderní statistické metody".

10.2 Spearmanův korelační koeficient

Spearmanův korelační koeficient vychází z výrazu (10.2), ale dosazuje do něj pořadí namísto původních pozorování. Označme R_i pořadí pozorování X_i v náhodném výběru $X_1, \ldots, X_n$ a označme S_i pořadí pozorování Y_i v náhodném výběru $Y_1, \ldots, Y_n$. Pokud X_i je nezávislé na Y_i pro každé i, pak by neměly být závislosti ani mezi pořadími R_i a S_i.

(Výběrový) *Spearmanův korelační koeficient*[*] dostaneme dosazením R_i místo X_i a S_i místo Y_i v (10.2):

$$\widehat{\varrho}_S = \frac{\sum_{i=1}^n R_i S_i - n\overline{R}_n \overline{S}_n}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n R_i^2 - n\overline{R}_n^2\right)\left(\sum_{i=1}^n S_i^2 - n\overline{R}_n^2\right)}}.$$

Za předpokladu, že v datech nejsou shody (tj. všechny hodnoty $X_1, \ldots, X_n$ jsou odlišné a také všechny hodnoty $Y_1, \ldots, Y_n$ jsou odlišné) platí

$$\overline{R}_n = \overline{S}_n = \frac{n+1}{2}, \qquad \sum_{i=1}^n R_i^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pak lze přepsat $\widehat{\varrho}_S$ v jednodušším tvaru:

$$\widehat{\varrho}_S = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2. \tag{10.5}$$

Jelikož shody nemohou vzniknout pokud máme náhodný výběr ze spojitého rozdělení, tak někteří autoři definují výběrový Spearmanův korelační koeficient rovnou jako (10.5).

Spearmanův korelační koeficient rozhodně není odhadem teoretického korelačního koeficientu ϱ daného rovnicí (10.1). Dá se ukázat, že podobně jako výběrový korelační koeficient $\widehat{\varrho}_n$ odhaduje teoretický korelační koeficient ϱ, tak $\widehat{\varrho}_S$ odhaduje

$$\varrho_S = \frac{\operatorname{cov}\left(F_X(X_i), F_Y(Y_i)\right)}{\sqrt{\operatorname{var}\left(F_X(X_i)\right)\operatorname{var}\left(F_Y(Y_i)\right)}},$$

[*] Angl. *Spearman correlation coefficient*

kde F_X a F_Y jsou distribuční funkce náhodných veličin X_i a Y_i. Tj. na ϱ_S můžeme nahlížet jako na korelační koeficient transformovaných náhodných veličin $F_X(X_i)$ a $F_Y(Y_i)$.

Z přepisu (10.5) vidíme, že Spearmanův korelační koeficient nabývá hodnoty 1 tehdy a jen tehdy, pokud $R_i = S_i$ pro každé i. Pořadí X_i a Y_i jsou si rovna, právě když existuje ostře rostoucí funkce h taková, že $X_i = h(Y_i)$ pro každé i. Spearmanův korelační koeficient má tedy hodnotu jedna, právě když X_i je ostře rostoucí transformací Y_i, zatímco výběrový korelační koeficient $\widehat{\varrho}_n$ nabývá hodnoty jedna, právě když X_i je rostoucí lineární transformací Y_i. Naopak, Spearmanův korelační koeficient nabývá své minimální hodnoty -1, právě když $R_i = n + 1 - S_i$, tj. když existuje ostře klesající funkce h taková, že $X_i = h(Y_i)$ pro každé i.

Lze ukázat, že jsou-li X_i a Y_i nezávislé, pak

$$\mathsf{E}\,\widehat{\varrho}_S = 0 \quad \text{a} \quad \mathsf{var}\,(\widehat{\varrho}_S) = \frac{1}{n-1}.$$

Za nezávislosti tedy $\widehat{\varrho}_S$ konverguje v pravděpodobnosti k nule. Dokonce lze ukázat, že za nezávislosti platí

$$\sqrt{n-1}\,\widehat{\varrho}_S \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{d}} \mathsf{N}(0,1).$$

Toho lze využít ke konstrukci testu hypotézy nezávislosti mezi X_i a Y_i. Hypotézu zamítneme, pokud $\sqrt{n-1}\,|\widehat{\varrho}_S| \geq u_{1-\alpha/2}$. Test je asymptotický a nepředpokládá normalitu. Podobně jako test založený na korelačním koeficientu v předchozí sekci bude tento test citlivý vůči alternativám, kdy je korelační koeficient mezi $F_X(X_i)$ a $F_Y(Y_i)$ nenulový. Naopak nebude konsistentní proti alternativám, kdy X_i a Y_i sice nejsou nezávislé, ale $\varrho_S = 0$.

Literatura

Anděl, J. (1998). *Statistické metody*. Praha: Matfyzpress.

Chung, E. and J. P. Romano (2016). Asymptotically valid and exact permutation tests based on two-sample u-statistics. *Journal of Statistical Planning and Inference 168*, 97–105.

Dupač, V. and M. Hušková (1999). *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Praha: Karolinum.

Welch, B. L. (1938). The significance of the difference between two means when the population variances are unequal. *Biometrika 29*(3/4), 350–362.

Rejstřík