Výsledky příkladů na procvičení z NMSA202
Poslední změna (oprava): 30. července 2019

1 Klasická pravděpodobnost

1. $\frac{2}{5}$
2. $\frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$
3. $\frac{8!\,3!}{10!} = \frac{1}{15}$
4. (a) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}/k! = 1 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$;
   (b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k! \to \mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e}$ pro $n \to \infty$
5. (a) $\left(\frac{6}{7}\right)^n$
   (b) $\frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}5^{n-5}}{7^n}$
   (c) $\sum_{i=1}^{6}(-1)^{i+1}\binom{7}{i}\left(\frac{7-i}{7}\right)^n$
6. (a) $\frac{m}{n+m}$; (b) $\frac{\binom{K}{k}\binom{n+m-K}{m-k}}{\binom{n+m}{m}}$ pokud $m \geq k$, $n \geq K-k$, $K \geq k$, jinak 0; (c) $\frac{\binom{n+m-k}{m-k}}{\binom{n+m}{m}}$.

2 Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

1. jevy jsou závislé
2. (a) neplatí, A^C a B^C jsou nezávislé,
   (b) platí
   (c) neplatí
   (d) platí
   (e) neplatí
3. profesor: $\dfrac{3^3}{4^4 - 3^4} = \dfrac{27}{175}$
4. studenti: (a) 28/45 (b) ze skupiny B (c) $1 - (0{,}2)^3(0{,}4)^4(0{,}6)^2$
5. krabice s míčky: $528/5915 = 0{,}089$
6. HUMOR: 5/11
7. mince: $\dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)(k+1)!}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$
8. obrazy: (a) 0,977 (b) 0,64
9. HIV test: (a) 0,77, (b) 10^{-5}, (c) 0,999
10. kostky: (a) $\mathsf{P}(\text{“6”}) = 7/72$, $\mathsf{P}(\text{“11”}) = 1/24$,
    (b) 4/7
    (c) $\mathsf{P}(\text{“6”}|\text{chlapec}) = 5/54$, $\mathsf{P}(\text{“6”}|\text{dívka}) = 19/180$, $\mathsf{P}(\text{“6”}) = 157/1620$

3 Náhodná veličina — diskrétní rozdělení

1. (a) $\mathsf{P}(X=0)=\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\mathsf{P}(X=1)=\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\mathsf{P}(X=2)=1-\sqrt{\frac{2}{3}}$;
   (b) $P_X(B)=\sqrt{\frac{1}{3}}\,\delta_0(B)+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\delta_1(B)+\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\delta_2(B)$, pro $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. $c=1/14$, $\mathsf{E}\,X=\frac{18}{7}$, $\mathsf{var}\,X=\frac{19}{49}$,
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1,\\ \dfrac{1}{14} & x\in[1,2),\\ \dfrac{5}{14} & x\in[2,3),\\ 1 & x\geq 3.\end{cases}$$
   $\mathsf{P}(X\geq 2)=\frac{13}{14}$.
   Rozdělení Y: $\mathsf{P}(Y=0)=4/14=2/7$ a $\mathsf{P}(Y=1)=1/14+9/14=10/14=5/7$, tj. Y má alternativní rozdělení $\mathsf{Alt}(p)$ s parametrem $p=5/7$; $\mathsf{E}\,Y=\frac{5}{7}$
3. $a=1/4$, $\mathsf{E}\,X=5/12$, $\mathsf{var}\,X=155/144$, rozdělení Y: $\mathsf{P}(Y=0)=1/2$, $\mathsf{P}(Y=1)=\mathsf{P}(Y=4)=1/4$, $\mathsf{E}\,Y=5/4$
4. basketbalista: $\mathsf{P}(X=n)=\binom{n+k-1}{n}p^k(1-p)^n$ pro $n=0,1,2,\dots$
5. kostky: 1/3
6. (a) $\mathsf{E}\,N=7/2$, $\mathsf{var}\,N=35/12$
   (b)
$$\mathsf{P}(N=i|\text{ součet je 5 })=\begin{cases}\frac{1296}{2401}, & i=1,\\ \frac{864}{2401}, & i=2,\\ \frac{216}{2401}, & i=3,\\ \frac{24}{2401}, & i=4,\\ \frac{1}{2401}, & i=5,\\ 0, & i=6.\end{cases}$$
   (c)
$$\mathsf{P}(N=i|\text{ právě 4 šestky })=\begin{cases}0, & i=1,2,3\\ \frac{12}{187}, & i=4,\\ \frac{50}{187}, & i=5,\\ \frac{125}{187}, & i=6.\end{cases}$$
7. Adam a Bedřich: (a) $\left(\frac{13}{18}\right)^{k-1}\frac{1}{9}$, $k=1,2,\dots$; (b) $\frac{2}{5}$; (c) $\frac{18}{5}$.
8. A a B: (a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$, $k=1,2,\dots$; (b) $\frac{3}{8}$;
   (c) $\mathsf{P}(\text{B hodí k-krát})=\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\left(\frac{4}{6}\right)^{k}\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}\frac{2}{6}$, $k=1,2,\dots$ a $\mathsf{P}(\text{B hodí 0-krát})=\frac{1}{6}$;
   (d) $\mathsf{E}\,(\text{počtu hodů})=\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}\frac{2}{6}=\ldots=\frac{33}{8}$.
9. Počet přestupků má Poissonovo rozdělení s parametrem $p\lambda$.

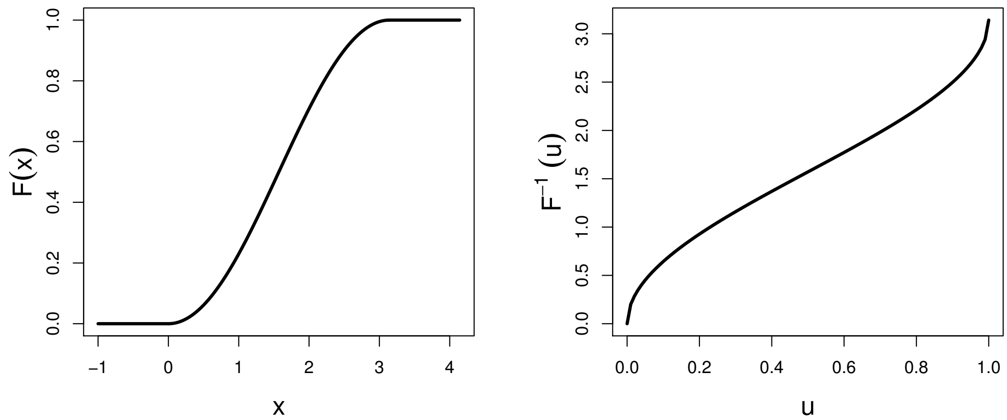
4 Náhodná veličina — spojité rozdělení

1. (a) Distr. funkce X
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2, & x \in (0,1), \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$
Pravděpodobnostní míra P_X
$$P_X(B) = \int_{B \cap (0,1)} 2x \, \mathrm{d}x, \quad \text{pro } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
(b) Medián X je $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. $c = 1/(\mathrm{e} - 1)$,
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e} - 1}, & x \in [0,1], \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$
$\mathsf{E}\, X = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$, $\mathsf{var}\, X = \frac{\mathrm{e}^2 - 3\mathrm{e} + 1}{(\mathrm{e}-1)^2}$
3. Medián X je $\log(\frac{e}{2} + \frac{1}{2})$ a medián e^X je $\frac{e}{2} + \frac{1}{2}$.
4. $c = \frac{1}{2\log((k+1)/k)}$, $\mathsf{E}\, X = 0 =$ medián X (plyne ihned ze symetrie hustoty), $\mathsf{var}\,(X) = c(2k+1) = \frac{2k+1}{2\log((k+1)/k)}$
5. (a) Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$,
(b) $\mathsf{E}\, Z = 3/2$, $\mathsf{var}\,(Z) = 3/4$
6. (a) distr. funkce Y:
$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ \sqrt{y}/\pi, & y \in [0, \pi^2], \\ 1 & y > \pi^2 \end{cases}$$
hustota: $g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{y}} \mathbb{I}\{y \in (0, \pi^2)\}$, $\mathsf{E}\, Y = \pi^2/3$.
(b) distribuční funkce Z:
$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{2 \arcsin(z)}{\pi}, & 0 \leq z \leq 1, \\ 1, & z > 1 \end{cases}$$
hustota $h(z) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}} \mathbb{I}[\{z \in (0,1)]\}$. $\mathsf{E}\, Z = 2/\pi$
(c) distribuční funkce $W = \max\{X, Y\}$:
$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < 0, \\ \frac{\sqrt{w}}{\pi}, & 0 \leq w \leq 1, \\ \frac{w}{\pi}, & 1 < w \leq \pi, \\ 1, & w > \pi \end{cases}$$
hustota $f_W(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{w}} \mathbb{I}\{w \in (0,1]\} + \frac{1}{\pi} \mathbb{I}\{w \in (1,\pi)\}$

7. (a) $c = 1/2$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (1 - \cos x)/2 = \sin^2(x/2), & 0 \le x \le \pi, \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

(b) $\mathsf{E}\, X = \pi/2 =$ medián X (plyne ihned ze symetrie hustoty)
(c) $F^{-1}(u) = \arccos(1 - 2u)$, $u \in (0, 1)$
(d) rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 2)$



8. trojúhelník:
   (a) 0
   (b) rozdělení je rovnoměrné na intervalu $(0, \pi/2)$; hledaná pravděpodobnost je $1/3$
   (c) distribuční funkce a hustota:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{2}{\pi}\text{arcsin} y, & y \in (0, 1), \\ 1, & y \ge 1, \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, & y \in (0, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   $\mathsf{P}(a > 1/2) = 2/3$
   (d) $\mathsf{E}\, a = \dfrac{2}{\pi}$, $\mathsf{var}\,(a) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \dfrac{\pi^2 - 8}{2\pi^2}$,
   (e) $\mathsf{E}\, V = \dfrac{1}{2\pi}$.

5 Náhodné vektory

1. hody mincí
   (a) sdružené rozdělení:

		Y		
		0	1	2
	0	0	1/8	1/8
X	1	1/8	1/4	1/8
	2	1/8	1/8	0

   (b) marginální rozdělení: $\mathsf{P}(X=0)=1/4$, $\mathsf{P}(X=1)=1/2$, $\mathsf{P}(X=2)=1/4$, totéž pro Y, veličiny jsou závislé
   (c) $\mathsf{cov}\,(X,Y)=-1/4$, $\rho_{XY}=-1/2$

2. (a) $c=4$,
   (b) $f_X(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathbb{I}\{x\geq 0\}$, $f_Y(y)=2y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathbb{I}\{y\geq 0\}$, X a Y jsou nezávislé
   (c) $\mathsf{E}\,(X^2+Y^2)=2$
3. $c=1/\pi$, $f_X(x)=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}\,\mathbb{I}\{x\in(-1,1)\}=f_Y(x)$, veličiny nejsou nezávislé.
4. (a) hustota $f(z)=(1-|z|)\,\mathbb{I}\{z\in(-1,1)\}$, $\mathsf{E}\,Z=0$, $\mathsf{var}\,(Z)=1/6$; (b) $\mathsf{E}\,(ZW)=0$.
5. $X+Y$ má binomické rozdělení $\mathsf{Bi}(m+n,p)$
6. (a) $\frac{3}{2}$ (b) Nejsou nezávislé. (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$.
7. maximum a minimum:
   (a) $F_U(u)=[F(u)]^n$, $f_U(u)=n[F(u)]^{n-1}f(u)$
   (b) $F_V(v)=1-[1-F(v)]^n$, $f_V(v)=n[1-F(v)]^{n-1}f(v)$
   (c) $\mathsf{E}\,U=n/(n+1)$, $\mathsf{var}\,(U)=n/[(n+1)^2(n+2)]$, $\mathsf{E}\,V=1/(n+1)$, $\mathsf{var}\,(V)=n/[(n+1)^2(n+2)]$
8. $\mathsf{cov}\,(H,D)=1/36$, jsou závislé
9. vlak a autobus:
   (a) hustota a distribuční funkce $Z=A+V$: Je-li $\lambda\neq\mu$, pak

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(\mathrm{e}^{-\mu z}-\mathrm{e}^{-\lambda z}\right), & z>0,\\ 0 & z\leq 0,\end{cases}\qquad G(z)=\begin{cases}1-\dfrac{\lambda\mathrm{e}^{-\mu z}\mu\mathrm{e}^{-\lambda z}}{\lambda-\mu}, & z>0\\ 0, & z\leq 0\end{cases}$$

   Je-li $\lambda=\mu$, pak

$$g(z)=\begin{cases}\lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z}, & z>0,\\ 0 & z\leq 0,\end{cases}\qquad G(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda z}-\lambda z\mathrm{e}^{-\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\leq 0,\end{cases}$$

   (b) $\mathsf{E}\,Z=\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}$, $\mathsf{var}\,(Z)=\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\lambda^2}$,
   (c) rozdělení $W=V-A$:

$$G(w)=\begin{cases}1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-\lambda w}, & w>0,\\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{\mu w}, & w\leq 0.\end{cases}\qquad g(w)=\begin{cases}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-\lambda w}, & w>0,\\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{\mu w}, & w<0,\end{cases}$$

   $\mathsf{P}(V-A>k)=1-G(k)$, $\mathsf{P}(V-A=k)=0$.
   (d) $\mathsf{P}(V>kA)=\dfrac{\mu}{\lambda k+\mu}$
10. Jsou závislé.

6 Limitní věty

1. (a) 0
   (b) ano
   (c) ano
   (d) ne

2. rovnoměrné rozdělení na $[0,1]$:
   (a) plyne z rozdělení Y_n jakožto minima
   (b) ano, použijte Cantelliho větu
   (c) ano, $c=1$
   (d) s pravděpodobností 1
   (e) s pravděpodobností 1
3. Použijte např. Markovovu nerovnost pro $r=2$.
4. (a) konvergence v P plyne snadno, konvergence s.j. neplatí (Borelova věta)
   (b) konverguje k 0
5. Plyne přímo z definice a rozdělení X_n.
6. plyne z 0-1 zákonů (Borelova věta) a z nerovnosti
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(|X| \geq n) - 1 \leq \mathsf{E}\,|X| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(|X| \geq n),$$
   která platí pro libovolnou náhodnou veličinu X (např. viz Lemma 4.7 ve skriptech)
7. (a) 0; (b) 0; (c) 1; (d) 0.
8. (a) plyne ze SZVČ pro nezávislé nestejně rozdělené náhodné veličiny; (b) Je splněna Ljapunovova podmínka. (b) Plyne z definice konvergence v pravděpodobnosti.
9. (a) $\mathsf{E}\,X = m+1$, $\mathsf{var}\,(X) = m+1$,
10. bankomat: alespoň 10 230 tisícikorunových bankovek
11. kostka: 0,921
12. hostina: nejvýše 45 hostů
13. konzultace: 0,013
14. a) 0,858 b) 2 044 960 c) 22 337
15. terč: 0,993075

7 Bodový odhad

1. (a) Je třeba ukázat, že věrohodnost je maximalizována v bodě $\hat{a} = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.
   (d) $V_n = \frac{n+1}{n} U_n = \frac{n+1}{n} \max_{1\leq i\leq n} X_i$ je nestranný odhad parametru a,
   V_n je konzistentní odhad parametru a.
   (e) T_n je nestranný i konzistentní odhad parametru a.
   (f) $\mathsf{var}\,(V_n) = \dfrac{a^2}{n(n+2)}$, $\mathsf{var}\,(T_n) = \dfrac{a^2}{3n}$.
   (g) Odhad V_n má menší rozptyl.
2. (a) Maximálně věrohodný odhad je $\widehat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(X_i)$. Odhad je nestranný a konzistentní odhad parametru μ.
   (b) Momentovým odhadem je $\widetilde{\mu}_n = \log(\overline{X}_n) - \frac{1}{2}$. Tento odhad je konzistentní.
3. $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ není nestranný ani konzistentní odhad parametru μ. Nicméně $\bar{X}_n$ je nestranným a konzistentním odhadem parametrické funkce $\mathsf{E}\,X_1 = \exp\{\mu + \frac{1}{2}\}$.
4. Maximálně věrohodný odhad parametru σ^2 je $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$. Tento odhad je nestranný i konzistentní.

5. Výběrový rozptyl je nestranný i konzistentní odhad parametru σ^2. V případě známého μ_0 má však o něco větší rozptyl než maximálně věrohodný odhad $\widehat{\sigma^2_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$. Zatímco $\mathsf{var}\left(\widehat{\sigma^2_n}\right) = \frac{2\,\sigma^4}{n}$, je $\mathsf{var}\,(S_n^2) = \frac{2\,\sigma^4}{n-1}$.
6. (a) Maximálně věrohodný odhad parametru p je $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.
   (b) $\hat{p}_n$ není nestranný, ale je konzistentní odhad parametru p.
   (c) $\tilde{p}_n$ je nestranný, ale není konzistentní odhad parametru p.
7. Odhad není nestranný, ale je konzistentní.
8. (a) Maximálně věrohodný odhad parametru θ je $\widehat{\theta}_n = \min_{1\le i\le n} X_i$. Odhad není nestranný, ale je konzistentní.
   (b) Momentový odhad parametru θ je $\widetilde{\theta}_n = \frac{\overline{X}_n}{2}$. Odhad je nestranný i konzistentní.
9. Maximálně věrohodný odhad parametru θ je $\widehat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$. Odhad není nestranný, ale je konzistentní.

8 Intervalový odhad

1. Označme X_i výšku i-tého chlapce, $i = 1,\dots,15$.
   Model: $X_1,\dots,X_{15}$ nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $\mathsf{N}(\mu, 39{,}112)$.
   (a) $(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (134{,}97; 143{,}29)$
   (b) $(\bar{X}_n - u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; +\infty) = (135{,}37; +\infty)$
   (c) $(-\infty; \bar{X}_n - u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (-\infty; 142{,}89)$
2. (a) $(\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}) = (13{,}94; 14{,}67)$
   (b) $\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}; \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\right) = (0{,}164;\ 0{,}943)$
3. (a) Předpokládaný model: Nechť X_i je indikátor toho, zda i-tá osoba souhlasí. Předpokládáme, že $X_1,\dots,X_{400}$ jsou nezávislé a stejně rozdělené s alternativním (tj. nula-jedničkovým) rozdělením s neznámým parametrem $p \in (0,1)$.
   Bodový odhad je $\hat{p} = 0{,}6$.
   (b) $(0{,}552; 0{,}648)$,
   (c) $n \ge 4098$.
4. Model:
   - $X_1,\dots,X_{25}$ výška chlapců v cm, náhodné veličiny s $\mathsf{N}(\mu_1, \sigma^2)$,
   - $Y_1,\dots,Y_{20}$ výška dívek v cm, náhodné veličiny s $\mathsf{N}(\mu_2, \sigma^2)$,
   - všechny veličiny $X_1,\dots,X_{25}$, $Y_1,\dots,Y_{20}$ jsou nezávislé.

   95%-ní intervalový odhad spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$ je $(14{,}02; 17{,}38)$.
5. (a) Oboustranný intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 95% je
$$\left(\widehat{\lambda}_L, \widehat{\lambda}_U\right) = \left(\overline{X}_n - u_{0.975}\frac{\sqrt{\overline{X}_n}}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + u_{0.975}\frac{\sqrt{\overline{X}_n}}{\sqrt{n}}\right).$$
   Pro data z příkladu $(1.55, 2.58)$.
   (b) Oboustranný intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 95% je $\left(\exp\{-\widehat{\lambda}_U\}, \exp\{-\widehat{\lambda}_L\}\right)$.
   Pro data z příkladu $(0.08, 0.21)$.

(c) Oboustranný intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 95% je

$$\Bigg(\sum_{k=11}^{\infty} \frac{(\widehat{\lambda}_L)^k}{k!} \exp\{-\widehat{\lambda}_L\}, \sum_{k=11}^{\infty} \frac{(\widehat{\lambda}_U)^k}{k!} \exp\{-\widehat{\lambda}_U\} \Bigg).$$

Pro data z příkladu $(7.7 \cdot 10^{-7},\, 8.1 \cdot 10^{-5})$.

6. (a) Bodový odhad střední doby životnosti je 10 a intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 90% je $(6.2, 13.8)$.

   (b) Bodový odhad mediánu životnosti je 6.9 a intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 90% je $(4.3, 9.5)$.