GEORG PICK: PRAŽSKÝ MATEMATICKÝ KOLEGA ALBERTA EINSTEINA

Ivan Netuka, Praha

Slavnostní seminář, který se u příležitosti 120. výročí narození Alberta Einsteina konal dne 14. března 1999 v Karolinu, měl pochopitelně zaměření převážně fyzikální. Nicméně organizátoři na matematiku nezapomněli. Krátká přednáška, k níž jsem byl pozván, byla věnována Georgu Pickovi. Tento profesor matematiky na Německé univerzitě v Praze byl velmi blízkým kolegou A. Einsteina v průběhu jeho šestnáctiměsíčního pražského pobytu v letech 1911 - 1912.

Georg Pick se narodil 10. srpna 1859 ve Vídni, kde na univerzitě studoval v letech 1875 – 1879 matematiku a fyziku. V roce 1880 získal doktorát pod vedením L. Königsbergera, který je považován za žáka K. Weierstrasse. V témže roce Pick přijal na Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze místo pomocného asistenta E. Macha, v r. 1881 se habilitoval a v r. 1888 byl jmenován mimořádným profesorem Německé univerzity v Praze. Ve školním roce 1884/1885 pobýval v Lipsku, kde byl ovlivněn F. Kleinem. Řádným profesorem byl jmenován v r. 1892 a ve školním roce 1900/1901 byl děkanem Filozofické fakulty. Aktivní působení na univerzitě ukončil v r. 1929 a vrátil se do Vídně. Po anšlusu Rakouska se v r. 1938 přestěhoval zpět do Prahy. O čtyři roky později byl dne 13. července 1942 deportován pod číslem 824 transportem AAq do Terezína. Tam zemřel ve věku 83 let 26. července 1942. (Další informace o životě G. Picka lze nalézt v [12].)

Celých 46 let působil G. Pick v Praze jako vysokoškolský učitel. Přehled jeho přednášek je uveden v [12]. Těžiště Pickovy pedagogické práce spočívalo v analýze a geometrii. V souvislosti s další diskusí o odborných kontaktech Picka a Einsteina není bez zajímavosti uvést, že ve školním roce 1905/1906 Pick konal přednášku *Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie* (3/0) a ve školním roce 1911/1912, tedy přesně v době Einsteinova pražského pobytu, přednášel *Infinitesimalgeometrie* (5/0). Profesor Pick vedl 20 disertačních prací. Např. v roce 1910/1911 dokončil pod jeho vedením E. Stransky svou práci *Infinitesimalgeometrie der Raumkurven auf Grundlage einer nicht-Euklidischen Massbestimmung.* Patrně nejznámější z Pickových doktorandů je K. Löwner, pozdější profesor Německé univerzity v Praze, a po nucené emigraci profesor na významných amerických univerzitách; viz [13].

V letech 1876-1939 publikoval G. Pick 67 prací. Jejich zařazení do různých oblastí matematiky může být pouze přibližné, nicméně naznačuje Pickovy odborné zájmy: *Lineární algebra* (2), *Teorie invariantů* (4), *Integrální počet* (8), *Komplexní analýza* (18), *Teorie potenciálu* (2), *Funkcionální analýza* (4), *Geometrie* (5), *Diferenciální geometrie* (10), 2 práce nejsou zařazeny. Další údaje o publikační činnosti G. Picka i úplný seznam prací lze nalézt v [12]. Ještě pro zajímavost: V letech 1911 a 1912 uveřejnil G. Pick v Comptes Rendus Acad. Sci. Paris dvě sdělení s názvem *Sur les*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

notions: droites paralléles et translation et sur la géometrie différentielle dans l'espace non-euclidien.

Pickův vzorec a Schwarz-Pickovo lemma

V [9], s. 318, je G. Pick charakterizován jako obětavý učitel s širokým rozhledem, ale nevelkým badatelským přínosem. Každé takové hodnocení je třeba chápat relativně a nemám v úmyslu se pokoušet o kritický rozbor Pickova vědeckého díla. Jakýkoli závěr by nic nezměnil na skutečnosti, že jméno G. Picka není v matematice do dnešních dnů zapomenuto.

Osobně za velmi elegantní považuji *Pickův vzorec* o výpočtu obsahu mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech. Připomeňme, že *mřížové body* v rovině jsou body s oběma celočíselnými souřadnicemi, tedy prvky $\mathbb{Z}^2$. Předpokládejme, že P je (uzavřený) mnohoúhelník (ne nutně konvexní) s vrcholy v množině $\mathbb{Z}^2$, P° je jeho vnitřek, ∂P jeho hranice a $\lambda(P)$ jeho obsah. Počet prvků množiny $\mathbb{Z}^2 \cap P^\circ$ (resp. $\mathbb{Z}^2 \cap \partial P$) označíme $n(P^\circ)$ (resp. $n(\partial P)$). Zde je Pickův vzorec:

$$\lambda(P) = n(P^\circ) + \tfrac{1}{2} n(\partial P) - 1 \ .$$

Stačí tedy spočítat mřížové body na obvodu mnohoúhelníku a mřížové body uvnitř mnohoúhelníku a hned máme jeho obsah. Poněkud obecnější situaci, kdy mřížové body jsou určeny systémy přímek, které na sebe nemusí být kolmé, uvažoval G. Pick v práci [15] vydané před 100 lety.

Za speciální mnohoúhelník budeme považovat nyní tzv. elementární trojúhelník, tedy takový trojúhelník s vrcholy v $\mathbb{Z}^2$, na jehož stranách ani v jeho vnitřku žádné další mřížové body neleží. Uvažujme elementární trojúhelník T s jedním vrcholem v počátku. Potom dvě jeho strany obsahující počátek tvoří bázi vektorového prostoru nad oborem integrity $\mathbb{Z}$. Matice přechodu od této báze k bázi složené z vektorů $(0,1)$ a $(1,0)$ má celočíselný determinant a totéž platí o matici k ní inverzní. Proto tento determinant je v absolutní hodnotě roven jedné. Geometricky to znamená, že rovnoběžník tvořený stranami trojúhelníku T s vrcholy v počátku má obsah roven jedné. Závěr: každý elementární trojúhelník má obsah $\frac{1}{2}$.

Nedávno se mi dostal do ruky krásný důkaz Pickova vzorce; viz [1], s. 61. V mnohoúhelníku P lze provést triangulaci na elementární trojúhelníky. (To je třeba zdůvodnit, neboť obzvláště u nekonvexního mnohoúhelníku to není hned zcela zřejmé.) Po triangulaci vznikne rovinný graf, jehož vrcholy jsou mřížové body obsažené v P a hrany jsou strany elementárních trojúhelníků triangulace. Počet vrcholů označme n a počet hran označme e. Graf rozděluje rovinu na f stěn, z nichž jedna je neomezená (doplněk mnohoúhelníku) a každá z dalších $f-1$ stěn je elementární trojúhelník. Každý z nich, jak víme, má obsah $\frac{1}{2}$, takže $\lambda(P) = \frac{1}{2}(f-1)$. Počet hran grafu, které leží na ∂P, označme $e(\partial P)$, počet ostatních hran (ty mají s P° neprázdný průnik) označme $e(P^\circ)$. Zřejmě je tedy $3(f-1) = 2e(P^\circ) + e(\partial P)$ a ovšem $e = e(P_0) + e(\partial P)$. Odtud dostáváme $f = 2(e-f) - e(\partial P) + 3$.

Nyní vstupuje do hry *Eulerův vzorec*, pocházející z poloviny 18. století:

$$n - e + f = 2 \ .$$

Z rovností $e(\partial P) = n(\partial P)$, $n = n(P^\circ) + n(\partial P)$ a $e - f = n - 2$ dosazením vyjde $f = 2(n-2) - n(\partial P) + 3 = 2n(P^\circ) + n(\partial P) - 1$. Protože $\lambda(P) = \frac{1}{2}(f-1)$, dokázali jsme Pickův vzorec

$$\lambda(P) = n(P^\circ) + \tfrac{1}{2} n(\partial P) - 1 \ .$$

Pickovo jméno se zapsalo prostřednictvím názvu *Schwarz–Pickovo lemma* do analýzy v komplexním oboru. Nejprve připomeneme tradiční znění Schwarzova lemmatu o odhadu modulu holomorfního zobrazení jednotkového kruhu U do sebe:

Schwarzovo lemma. *Nechť $f : U \to U$ je holomorfní funkce, $f(0) = 0$. Potom $|f(z)| \le |z|$, $z \in U$, a $|f'(0)| \le 1$.*

Většinou se formuluje tento dodatek: pokud v jedné z nerovností platí znamení rovnosti (pro $z \neq 0$), potom f je otočení okolo počátku. H.A. Schwarz publikoval podobnou větu v r. 1869, na význam tvrzení pro teorii funkcí upozornil C. Carathéodory v r. 1912; srv. [17], s. 214. Standardní užití tvrzení lze nalézt v učebnicích komplexní analýzy, např. [5].

Dříve než přejdeme k Pickově zobecnění Schwarzova lemmatu, poukáži na jednu jeho málo známou aplikaci. Důkaz následující věty, jejímž autorem je německý matematik E. Study, pochází od T. Radó z r. 1929 (viz komentář v [17], s. 216). Domluvme se, že pro $0 < r < 1$ označíme U_r otevřený kruh o středu v počátku a poloměru r.

Věta. *Nechť G je konvexní množina v komplexní rovině a f je prosté holomorfní zobrazení U na G. Potom je pro každé $r \in (0,1)$ množina $f(U_r)$ konvexní.*

Naznačíme *důkaz* této věty. Lze předpokládat, že $f(0) = 0$. Zvolme $0 < r < 1$ a p, q dva různé body množiny $f(U_r)$. Máme dokázat, že každý bod na úsečce spojující body p a q patří do $f(U_r)$. Zvolme tedy $t \in [0,1]$ a označme $v := (1-t)p + tq$, $a := f^{-1}(p)$, $b := f^{-1}(q)$. Můžeme předpokládat, že $|a| \le |b|$ a tudíž $b \neq 0$. Potom pro každé $z \in U$ platí $zab^{-1} \in U$. Definujeme

$$g(z) := (1-t)f(zab^{-1}) + tf(z) \ , \quad z \in U \ .$$

Protože G je konvexní, je $g(U) \subset G$ a tedy má smysl definovat zobrazení $h := f^{-1} \circ g$ na U. Potom h je holomorfní zobrazení U do U splňující $h(0) = 0$, neboť $g(0) = 0$ a $f(0) = 0$. Podle Schwarzova lemmatu je $|h(z)| \le |z|$, kdykoli $z \in U$, speciálně $|f^{-1}(g(b))| \le |b|$. Ovšem $g(b) = (1-t)f(a) + tf(b) = v$ a $|b| < r$. Tudíž $f^{-1}(v) \in U_r$, neboli $v \in f(U_r)$.

Schwarzovo lemma samozřejmě říká, že holomorfní zobrazení jednotkového kruhu do sebe zachovávající počátek nezvětšuje vzdálenosti od počátku. G. Pick si uvědomil, že role počátku není významná, pokud v jednotkovém kruhu uvažujeme hyperbolickou vzdálenost $\Delta(w,z) := |z-w|/|\overline{w}z - 1|$, $w, z \in U$, a dokázal v [16] toto tvrzení:

Schwarz-Pickovo lemma. *Nechť $f : U \to U$ je holomorfní funkce. Potom platí nerovnost $\Delta(f(w), f(z)) \le \Delta(w,z)$, $w, z \in U$.*

V analogii se Schwarzovým lemmatem platí, že pokud nastává v nerovnosti znamení rovnosti pro dvojici různých bodů, pak f je lineární lomená transformace zobrazující U na U (a rovnost pak nastává pro všechny dvojice bodů).

G. Pick a A. Einstein

Studium dostupných materiálů nás nenechává na pochybách, že Georg Pick byl v průběhu Einsteinova pobytu v Praze v letech 1911–1912 jeho velmi blízkým kolegou. Shodují se na tom autoři knih o A. Einsteinovi i další prameny. V dopise z 12. 6. 1912 (viz dokument 408 z Collected papers of Albert Einstein) A. Einstein např. píše L. Hopfovi: (. . .) *Vede se nám velmi dobře a všichni se těšíme na Curych. Mrzí mě pouze* *rozloučení s kolegou Pickem, s nimž jsem se velice spřátelil. Ital by řekl: Sangue non è aque*!

O vztahu Picka a Einsteina píše také M. Brdička v [3]: *Einsteinův duchovní život se v té době skládal hlavně z vědy a hudby. Spřátelil se s G. Pickem, který byl nejen výborným geometrem ochotným pomoci při nejasnostech absolutního diferenciálního počtu a při jeho aplikacích na geometrizaci fyziky, resp. v položení základů obecné relativity, ale i nevšedním komorním hudebníkem, jenž zprostředkoval Einsteinovi místo ve smyčcovém kvartetu. Přátelské kontakty mezi Pickem a o 20 let mladším Einsteinem nebyly přerušeny ani po Einsteinově odchodu z Prahy, poslední Pickův dopis Einsteinovi do Princetonu je z r. 1939, z doby po okupaci Čech a nedlouho před Pickovým transportem do koncentračního tábora v Terezíně, z něhož se již nevrátil.* V témže článku lze nalézt dokonce úvahu, že odborné zaměření G. Picka mohlo hrát roli při Einsteinově rozhodování o přijetí místa: *Možná však, že hlavním důvodem Einsteinova pobytu v Praze byly zájmy odborné. Již od r. 1907 Einstein „viděl“ cestu k obecné relativitě, tj. způsob, jak se oprostit od inerciálních systémů, a jako osamělý poutník nastoupil tuto gigantickou pouť. Brzy mu bylo jasné, že jedním z nezbytných cestovních prostředků je Riemannova geometrie. Aby mohl řešit složité fyzikálně geometrické stránky budované teorie, potřeboval mít zřejmě jistotu o řadě moderních aspektů čtyř- a vícerozměrných geometrií. V Evropě přicházeli v úvahu dva geometři, T. Levi-Civita v Itálii a G. Pick v Praze. Jak z jazykových důvodů, tak i celkovým životním prostředím se Einsteinovi zřejmě více zamlouvala Praha, a proto mu Lampova nabídka mohla přijít vhod.*

Není žádných pochyb o tom, že Pick a Einstein vedli odborné diskuse. Svědčí o tom např. závěrečná poznámka v rozšířeném textu Einsteinovy přednášky z 28. 2. 1914; viz dokument 30 v [10], s. 607: *Na závěr vyslovuji poděkování mému dřívějšímu kolegovi G. Pickovi za jeho poznámky, které výklad věci zásadně zjednodušily.*

Často se v literatuře setkáváme s názorem, že G. Pick přivedl Einsteina k matematickému aparátu potřebnému k dotvoření obecné teorie relativity. Bez komentáře zde uvedeme několik úryvků z různých pramenů: *Během dlouhých procházek se Einstein Pickovi svěřil s matematickými potížemi, s nimiž se setkával při pokusech zobecnit teorii relativity. Již tehdy navrhl Pick jako vhodný matematický nástroj k dalšímu rozvíjení Einsteinovy myšlenky „absolutní diferenciální počet“ italských matematiků Ricciho a Levi-Civity*; viz [8], překlad [2], s. 49.

(. . .) *A v Praze byl Einstein přiveden k matematickému aparátu, který mu pomohl vyřešit problémy obecné relativity. K tomuto rozšíření jeho znalostí došlo zásluhou o dvacet let staršího Georga Picka, kdysi asistenta Ernsta Macha. Picka a Einsteina spojoval zájem o hudbu. Vytvořilo se mezi nimi silné přátelství, a když Einstein hovořil o svých těžkostech, Pick mu navrhl užít Ricciho a Levi-Civitův absolutní diferenciální počet*; viz [4], s. 143. Stejné konstatování je uvedeno v [11], s. 113, 114.

Sám Einstein však v předmluvě k [6] píše toto: *Rozhodující myšlenku o obdobě mezi Gaussovou theorií ploch a matematickým problémem svojí theorie pojal jsem ovšem teprve r. 1912 po svém návratu do Curychu, aniž jsem zprvu znal bádání, jež v tom směru vykonali Riemann, Ricci a Levi-Civita. Na ně byl jsem upozorněn teprve svým přítelem Grossmannem v Curychu.*

Podrobně se k otázce matematického aparátu potřebného k obecné teorii relativity vyjadřuje A. País v [14], s. 211. (. . .) *Ve své přednášce proslovené v Kyotu v prosinci 1922 A. Einstein řekl: „Jestliže všechny* [*zrychlené*] *systémy jsou ekvivalentní, pak ve všech z nich nemůže euklidovská geometrie platit. Vzdát se geometrie a pone-*

chat [fyzikální] zákony je totéž, jako popisovat myšlenky beze slov. Co tedy je potřeba hledat? Řešení tohoto problému jsem neznal do roku 1912, kdy jsem si uvědomil, že Gaussova teorie ploch poskytuje klíč k rozluštění této záhady. Uvědomil jsem si, že Gaussovy souřadnice na ploše mají hluboký význam. Avšak v té době jsem nevěděl, že Riemann studoval základy geometrie dokonce mnohem zevrubněji. Najednou jsem si vzpomněl, že Gaussova teorie byla součástí přednášek z geometrie, které jsme jako studenti měli s Geiserem. Uvědomil jsem si, že základy geometrie mají fyzikální podstatu. Můj milý matematický přítel Grossmann byl na místě, když jsem se vrátil z Prahy do Curychu. Od něho jsem se poprvé dozvěděl o Riccim a později o Riemannovi. Tak jsem se svého přítele zeptal, zda by se moje problémy daly řešit pomocí Riemannovy teorie, totiž zda by invarianty elementů křivek mohly úplně určovat veličiny, které jsem hledal". Dále A. País říká: *Věřím, že toto první setkání s diferenciální geometrií sehrálo druhotnou roli v Einsteinových úvahách z r. 1912. Během dlouhých rozhovorů s Einsteinem vyjádřil v Praze matematik Georg Pick domněnku, že potřebný matematický nástroj pro další rozvoj Einsteinových myšlenek by se mohl najít v článcích Ricciho a Levi-Civity* [8]. *Pochybuji, že by tato poznámka v oné době učinila na Einsteina jakýkoli dojem. Určitě se v průběhu svého pražského pobytu neobtěžoval studiem těchto důležitých prací.* V [2], s. 11, je vyjádřen tento názor: *Není podstatné, že Philipp Frank (a po něm mnoho biografií) vyzdvihuje, jak již v Praze matematik Georg Pick Einsteinovi navrhl, aby v teorii gravitace používal aparátu Riemannovy geometrie („Ricciho a Levi-Civitův absolutní počet"), zatímco Einstein v předmluvě uvádí, že na tuto myšlenku přišel v roce 1912, až po odjezdu z Prahy do Curychu. Hésiodos napsal, že „cenou velkého díla je lopota, a bohové stanovili, že musíš platit předem".* Einstein platil mnoho v Praze. Alespoň myšlenkově, v hledání pojmů a ve formulování principů.

Pro vývoj fyziky je skutečně nevýznamné, že úlohu Georga Picka v matematické inspiraci Alberta Einsteina obklopuje přece jen určité tajemno. Skončíme tím, co o pocitu tajemna A. Einstein říká ve své knize [7]: *Nejkrásnější, co můžeme prožívat, je tajemno. To je základní pocit, který stojí u kolébky pravého umění a vědy. Komu to není známo, kdo se už neumí divit, neumí žasnout, ten je takříkajíc mrtev a jeho oko vyhaslé.*

Poděkování. Při přípravě přednášky mi byly užitečné materiály, které mi poskytli tito kolegové: doc. RNDr. J. Bečvář, CSc., Mgr. M. Bečvářová, Dr., prof. RNDr. J. Bičák, DrSc., RNDr. J. Folta, CSc., Mgr. J. Ludvíková a RNDr. A. Šolcová. Za pomoc při vyhledávání pramenů děkuji také Archivu Univerzity Karlovy a knihovně Matematicko-fyzikální fakulty UK.

Literatura:

[1] Aigner, M., Ziegler, G.M., *Proofs from THE BOOK*, Springer, Berlin, 1998.

[2] Bičák, J., *Einstein a Praha*, JČSMF, Praha, 1979.

[3] Brdička, M., *Einstein a Praha, Česká einsteinovská pohlednice*, Čs. čas. fyz. A **29** (1979), 269-275.

[4] Clark, R.W., *Einstein, The life and times*, Hodder and Stoughton, London, 1983.

[5] Černý, I., *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[6] Einstein, A., *Theorie relativity speciální a obecné*, Praha, 1923.

[7] Einstein, A., *Jak vidím svět*, Československý spisovatel, Praha, 1961.

[8] Frank, Ph., *Einstein – His life and times*, Alfred A. Knopf, New York, 1947.

[9] Havránek, J., Pousta, Z. (Eds.), *Dějiny Univerzity Karlovy IV (1918-1990)*, Univerzita Karlova, Praha, 1998.

[10] Klein, M.J., Kox, A.J., Schulmann, R. (Eds.), *The collected papers of Albert Einstein, Vol.5*, Princeton University Press, Princeton, 1993.

[11] Kuzněcov, B.G., *Einstein – život, smrt, nesmrtelnost*, SPN, Praha, 1984.

[12] Ludvíková, J., *Georg Pick (1859-1942): Život a hlavní směry jeho činnosti* (diplomová práce), Pedagogická fakulta UK, Praha, 1997.

[13] Netuka, I., *Karel Löwner a Loewnerův elipsoid*, Pokroky Mat.Fyz.Astronom. **38** (1993), 212-218.

[14] País, A., *Subtle is the Lord … The science and the life of Albert Einstein*, Clarendon Press, Oxford, 1982.

[15] Pick G., *Geometriches zur Zahlenlehre*, Lotos, NF **19** (1899), 311-319.

[16] Pick, G., *Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche*, Math.Ann. **77** (1916), 1-6.

[17] Remmert, R., *Funktionentheorie 1*, Springer, Berlin, 1995.