Sekvenční testy - úvod

Funková, Garaj

7. března 2024

Statistický seminář

Nesekvenční vs. sekvenční přístup

Nesekvenční test:

- Zvolíme velikost chyby 1. druhu a rozsah výběru
- Použijeme nejsilnejší test (N-P lemma)

Sekvenční test:

- Zvolíme velikost chyby 1. a 2. druhu
- N - rozsah výběru je náhodná veličina

Příklad

Náhodný výběr: $X_1, X_2, ..., X_n$
H_0: $X \sim \mathcal{N}(\mu_0, 1)$
H_1: $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, 1)$
$\mu_0 < \mu_1$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} = exp\{\sum_{i=1}^{n} X_i(\mu_1 - \mu_0) + n\frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{2}\}$$

Nesekvenční přístup:

- Zvolíme velikost chyby 1. a 2. druhu (α, β) a z N-P lemma dopočítame n.
- Přijímáme H_1: $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0) \geq u_{1-\alpha}$
- Přijímáme H_0: $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0) \leq u_{1-\alpha}$

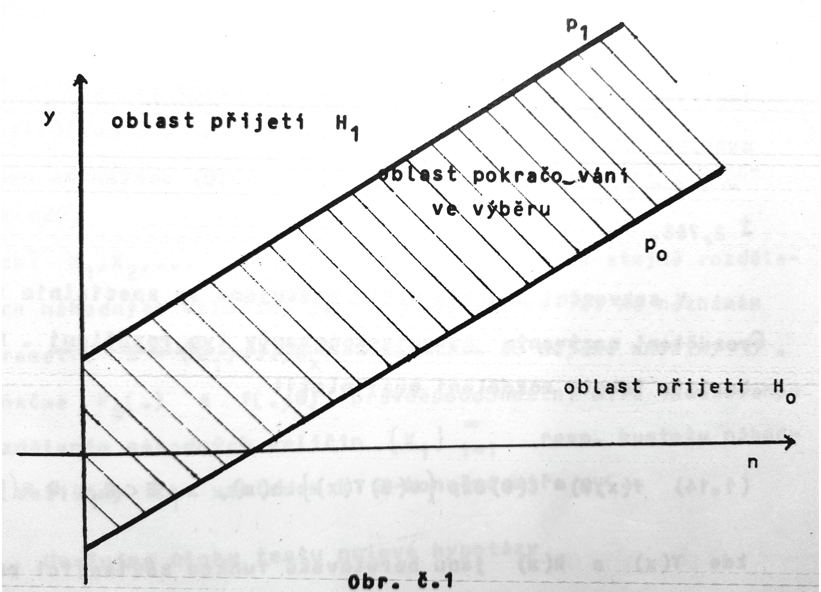
Příklad

Sekvenční přístup:

- Přijímáme H_0: $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \leq B$
- Přijímáme H_1: $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \geq A$
- Jestliže $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \in (B, A)$, tak $n \to n+1$

A, B volíme v závislosti na zvolené chybě 1. a 2. druhu (α, β).
V praxi je obvykle aproximujeme:

$$A^* = \frac{1-\beta}{\alpha} \qquad B^* = \frac{\beta}{1-\alpha}$$


p1
y
oblast přijetí H1
oblast pokračo_vání
ve výběru
p0
oblast přijetí H0
n

Obr. č.1

Obecný sekvenční test

Uvažujme parametrický prostor Θ a posloupnost $X_1, X_2, \ldots$ iid náhodných veličin s rozdělením P_θ (hustotou $f(x,\theta)$) pro $\theta \in \Theta$.

Buďte $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}, \{B_i^0\}_{i=1}^{\infty}, \{B_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnosti borelovských množin takové, že:

- B_i, B_i^0, B_i^1 jsou navzájem disjunktní pro každé $i \in \mathbb{N}$,
- $B_1 \cup B_1^0 \cup B_1^1 = \mathbb{R}$,
  $B_{i-1} \times \mathbb{R} = B_i \cup B_i^0 \cup B_i^1 \subset \mathbb{R}^i$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.

Obecný sekvenční test

Def.

Mějme $(X_1, ..., X_n)$ náhodný výběr z rozdělení P_θ. Testem S hypotézy H_0 proti alternativě H_1 rozumíme následující pravidlo:

- Jestliže $(X_1, ..., X_n) \in B_n^1$, zamítáme H_0 ve prospěch H_1, náhodný výběr končí,
- jestliže $(X_1, ..., X_n) \in B_n^0$, hypotézu H_0 přijímáme, náhodný výběr končí,
- jestliže $(X_1, ..., X_n) \in B_n$, pokračujeme v náhodném výběru.

Def.

Jestliže pro posloupnosti množin $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}, \{B_i^0\}_{i=1}^{\infty}, \{B_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ existuje přirozené číslo n takové, že

$$B_i = \mathbb{R}^1, i = 1, ..., n-1, \quad B_i^0 \cup B_i^1 = \mathbb{R}^n,$$

mluvíme o testu s pevným rozsahem výběru. Ostatní testy nazýváme sekvenční.

Operační charakteristika, rozsah výběru

Def.

Řekneme, že výše popsaný test skončí s pravděpodobností 1, jestliže

$$\lim_{n \to \infty} P((X_1, ..., X_n) \in B_n; \theta) = 0$$

pro každé $\theta \in \Theta$.

Def.

Rozsahem výběru nazveme náhodnou veličinu N definovanou jako

$$N = \min\{n \in \mathbb{N}; (X_1, ..., X_n) \in B_n^0 \cup B_n^1\}.$$

Její střední hodnotu nazveme středním rozsahem výběru a označíme $E_S(N; \theta)$.

Operační charakteristika a silofunkce

Def.

Operační charakteristikou testu S hypotézy H_0 proti H_1 rozumíme

$$L_S(\theta) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(X_1, ..., X_n) \in B_n^0\}; \theta)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P((X_1, ..., X_n) \in B_n^0; \theta).$$

Silofunkci testu S definujeme jako

$$P_S(\theta) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(X_1, ..., X_n) \in B_n^1\}; \theta)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P((X_1, ..., X_n) \in B_n^1; \theta).$$

Vlastnosti obecných sekvenčních testů

Lemma

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- *test skončí s pravděpodobností 1 pro každé* $\theta \in \Theta$,
- $\lim_{n \to \infty} P(N > n; \theta) = 0$ *pro každé* $\theta \in \Theta$,
- $P_S(\theta) + L_S(\theta) = 1$ *pro každé* $\theta \in \Theta$.

Vlastnosti obecných sekvenčních testů

Pro $\theta_1, \theta_2 \in \Theta, i \in \mathbb{N}$ definujeme

$$
\begin{aligned}
Z_i(\theta_1, \theta_2) &= \log \frac{f(X_i, \theta_2)}{f(X_i, \theta_1)}, \quad f(X_i, \theta_1) \neq 0, f(X_i, \theta_2) \neq 0, \\
&= 1, \qquad f(X_i, \theta_1) = 0, f(X_i, \theta_2) = 0, \\
&= -\infty, \quad f(X_i, \theta_1) \neq 0, f(X_i, \theta_2) = 0, \\
&= +\infty, \quad f(X_i, \theta_1) = 0, f(X_i, \theta_2) \neq 0.
\end{aligned}
$$

Dále definujeme $Q_n(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(\theta_1, \theta_2)$.

Vlastnosti obecných sekvenčních testů

Lemma

Pro test S a libovolné $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ platí

$$E(\exp\{Q_N(\theta_1,\theta_2)\}|\ \textit{přijímáme}\ H_0;\theta_1) = \frac{L_S(\theta_2)}{L_S(\theta_1)}, \quad L_S(\theta_1) \neq 0,$$

$$E(\exp\{Q_N(\theta_1,\theta_2)\}|\ \textit{zamítáme}\ H_0;\theta_1) = \frac{P_S(\theta_2)}{P_S(\theta_1)}, \quad P_S(\theta_1) \neq 0.$$

Vlastnosti obecných sekvenčních testů

Lemma

$X_1, X_2, \ldots$ iid s rozdělením P_θ a t měřitelná funkce.

- *Jestliže $E(|t(X_1)|;\theta) < \infty, E(N;\theta) < \infty$ a $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou omezené, potom*

$$E(N;\theta)E(t(X_1);\theta) = E(\sum_{n=1}^{N} t(X_n);\theta).$$

- *Jestliže navíc $var(t(X_1);\theta) < \infty$ a $E(t(X_1);\theta) = 0$, potom*

$$E(N;\theta)E(t^2(X_1);\theta) = E((\sum_{n=1}^{N} t(X_n))^2;\theta).$$

Vlastnosti obecných sekvenčních testů

Věta

Mějme test S, který skončí s pravděpodobností 1,
$\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $E(|Z_i(\theta_1, \theta_2)|; \theta_1) < \infty$, $E(N; \theta_1) < \infty$.
Potom platí

$$-E(N; \theta_1)E(Z_i(\theta_1, \theta_2); \theta_1) \geq L_S(\theta_1) \log \frac{L_S(\theta_1)}{L_S(\theta_2)} + \\ + (1 - L_S(\theta_1)) \log \frac{1 - L_S(\theta_1)}{1 - L_S(\theta_2)}.$$

Vlastnosti obecných sekvenčních testů

Důsledek

Mějme $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ a nechť platí $0 < |E(Z_1(\theta_0, \theta_1); \theta_i)| < \infty$ pro $i = 0, 1$. Potom pro test S hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta = \theta_1$ s pravděpodobnostmi chyb nejvýše α resp. β, který splňuje $E(N; \theta_i) < \infty$ pro $i = 0, 1$, platí

$$E(N; \theta_0) \geq \frac{(1-\alpha)\log\frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{E(Z_1(\theta_0, \theta_1); \theta_0)}$$

$$E(N; \theta_1) \geq \frac{\beta\log\frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta)\log\frac{1-\beta}{\alpha}}{E(Z_1(\theta_0, \theta_1); \theta_1)}$$

Kritérium optimality

Def.

Označme $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ třídu testů pro úlohu $H_0 : \theta \in \Theta_0$ proti $H_1 : \theta \in \Theta_1$ splňujících:

- test skončí s pravděpodobností 1,
- $1 - L_S(\theta) \leq \alpha$ pro všechna $\theta \in \Theta_0$,
- $L_S(\theta) \leq \beta$ pro všechna $\theta \in \Theta_1$.

Kritérium optimality

Def.

Test $S^* \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nazveme eficientnejší než test $S \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ na množině $\Theta_1 \subset \Theta$, jestliže

$$E_{S^*}(N; \theta) < E_S(N; \theta)$$

pro všechna $\theta \in \Theta_1$. Test $S^* \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nazveme stejnoměrně eficientním testem na množině $\Theta_1 \subset \Theta$, jestliže

$$E_{S^*}(N; \theta) \leq E_S(N; \theta)$$

pro všechna $\theta \in \Theta_1$, kde alespoň pro jedno $\theta \in \Theta_1$ platí nerovnost ostrá.

Kritérium optimality

Věta

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *je posloupnost iid náhodných veličin s hustotou* $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$ *(obsahující alespoň 2 body). Pak mezi všemi testy* S *(sekvenčními i nesekvenčními)* $H_0 : \theta = \theta_0$ *proti* $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$, $\theta_0 \neq \theta_1$, *které náleží do* $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ *a pro které* $E_S(N; \theta_i) < +\infty$, $i = 0, 1$ *je Waldův sekvenční test* $S(b, a)$ *stejnoměrně eficientní v bodech* θ_0 *a* θ_1, *tedy*

$$E_{S(b,a)}(N; \theta_i) = \min_{S \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)} E_S(N; \theta_i)$$

$i = 0, 1$. *Konstanty b,a jsou určeny tak, aby pravděpodobnosti chyb byly* α, β.