

DOMÁCÍ ÚKOL Č. 2

Termín odevzdání: 12.12.2017

Příklad 1. Náhodný vektor $(X, Y)'$ odpovídá souřadnicím náhodně vybraného bodu z jednotkového kruhu, tj. má rovnoměrné rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete konstantu $c > 0$ tak, aby f byla hustota.
- (b) Určete marginální rozdělení x -ové souřadnice (tj. veličiny X) a její střední hodnotu.
- (c) Rozhodněte, zda jsou souřadnice X a Y nezávislé.
- (d) Spočítejte korelaci X a Y .

Pozor na meze v integrálech, např. při výpočtu marginálních hustot. Hustota je nenulová jen uvnitř jednotkového kruhu a z toho nám plyne omezení na dolní i horní mez.

Příklad 2. V šuplíku je 6 ponožek: 2 bílé, 2 černé a 2 oranžové. Potmě náhodně vytáhneme z šuplíku 3 ponožky. Označme jako X počet vytažených bílých ponožek a Y je počet vytažených oranžových ponožek.

- (a) Napište tabulku rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)'$.
- (b) Jsou X a Y nezávislé?
- (c) Spočítejte kovarianci X a Y .
- (d) Z tabulky pravděpodobnostního rozdělení určete, s jakou pravděpodobností jsou mezi třemi vytaženými ponožkami alespoň dvě stejné.

Příklad 3. Uvažujte náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p}{x^{p+1}} & x \geq 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $p > 2$ je neznámý parametr.

- (a) Odhadněte parametr p momentovou metodou. Zdá sa Vám tento odhad rozumný?
- (b) Zvolte si nějaké $p > 2$ a nagenertejte $n = 100$ hodnot z tohoto rozdělení. Spočítejte odhad z bodu (a) na základě prvních k hodnot jako funkci $k \in \{10, \dots, n\}$, a graf této funkce vykreslete. Jaké chování očekáváme pro rostoucí n ?
Jako součást řešení bodu (b) uveďte v jakém programu jste prováděli simulaci, a přiložte její zdrojový kód.

K nagenování náhodného výběru z tohoto rozdělení využijte nějaký generátor pseudonáhodných čísel z $[0, 1]$ a postup, který jsme měli na cvičení.