

## NĚKOLIK PŘÍKLADŮ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

**1. Separované proměnné.** Hledáme všechna maximální řešení  $y = y(x)$  rovnice

$$(1) \quad y' = \frac{y^2 + 1}{x}.$$

Ze zadání je zřejmé, že funkce  $y$  nebude definována v bodě  $x = 0$ , tj. grafy řešení neprotnou osu  $y$ .

Protože  $y^2 + 1 \neq 0$ , můžeme dělit:

$$\frac{y'}{y^2 + 1} = \frac{1}{x},$$

odkud

$$\int \frac{y'(x) dx}{y^2(x) + 1} = \int \frac{dx}{x}$$

a po integraci (vzhledem k proměnné  $x$ )

$$\operatorname{arctg}(y(x)) = \ln|x| + C, \text{ kde } C \in \mathbb{R}.$$

Chceme vyjádřit funkci  $y$ . Inverzní funkce k  $\operatorname{arctg} x$  je  $\operatorname{tg} x$  pro  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Tedy

$$y(x) = \operatorname{tg}(\ln|x| + C), \text{ přičemž } \ln|x| + C \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Odtud pro  $x$  z definičního oboru řešení:  $|x| \in (e^{-\pi/2-C}, e^{\pi/2-C})$ .

Tedy maximálním řešením rovnice (1) je každá funkce tvaru

$$y(x) = \operatorname{tg}(\ln|x| + C), \quad x \in (e^{-\pi/2-C}, e^{\pi/2-C}),$$

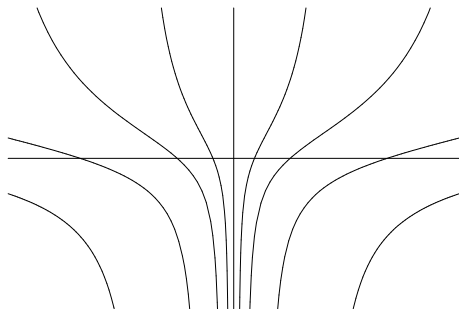
kde  $C \in \mathbb{R}$ , a rovněž každá z funkcí

$$y(x) = \operatorname{tg}(\ln|x| + D), \quad x \in (-e^{\pi/2-D}, -e^{-\pi/2-D}),$$

kde  $D \in \mathbb{R}$ .

Vidíme, že ačkoli grafy všech řešení vyplní množinu  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y); x = 0\}$ , nejsou to funkce definované na celých poloosách.

2



**2. Separované proměnné – navazování.** Hledáme všechna maximální řešení rovnice

$$(2) \quad y' = \sqrt{|y|}.$$

Protože  $y' = \sqrt{|y|} \geq 0$ , bude každé řešení neklesající funkcí na svém definičním oboru. Triviálním řešením je konstantní funkce  $y(x) \equiv 0$ .

Předpokládejme nyní, že  $y(x) \neq 0$  a vydělme obě strany výrazem  $\sqrt{|y(x)|}$ . Hledáme tedy řešení, která mají graf celý buď nad osou  $x$ , nebo pod osou  $x$  a splňují

$$\frac{y'}{\sqrt{|y|}} = 1.$$

V prvním případě ( $y > 0$ ) odtud plyne

$$\int \frac{y'(x) dx}{\sqrt{y(x)}} = \int dx,$$

tedy

$$\begin{aligned} 2\sqrt{y(x)} &= x - C, \\ y(x) &= \frac{(x - C)^2}{4}, \end{aligned}$$

kde  $C \in \mathbb{R}$  a definiční obor funkce  $y$  je takový, aby zůstala neklesající (dokonce rostoucí) kladnou funkcí. Tedy  $x \in (C, +\infty)$ .

Podobně záporná řešení

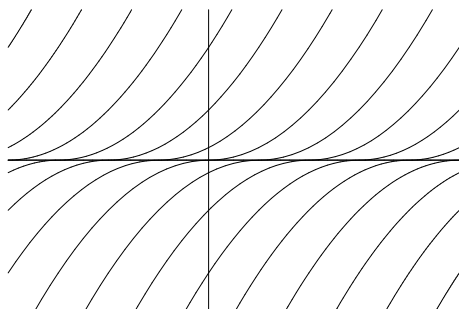
$$\int \frac{y'(x) dx}{\sqrt{-y(x)}} = \int dx,$$

jsou rostoucí části parabol

$$y(x) = -\frac{(x-D)^2}{4}, \quad x \in (-\infty, D), \quad D \in \mathbb{R}.$$

Řešení za předpokladu  $y \neq 0$  ovšem nejsou maximální: můžeme je – jednou nebo dvakrát – navázat na triviální řešení. Každé maximální řešení rovnice (2) je pak jednoho z následujících typů.

- $y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R};$
- $y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, C), \\ \frac{(x-C)^2}{4}, & x \in (C, +\infty), \end{cases}$  kde  $C \in \mathbb{R};$
- $y(x) = \begin{cases} -\frac{(x-D)^2}{4}, & x \in (-\infty, D), \\ 0, & x \in \langle D, +\infty \rangle, \end{cases}$  kde  $D \in \mathbb{R};$
- $y(x) = \begin{cases} -\frac{(x-D)^2}{4}, & x \in (-\infty, D), \\ 0, & x \in \langle D, C \rangle, \\ \frac{(x-C)^2}{4}, & x \in (C, +\infty), \end{cases}$  kde  $C, D \in \mathbb{R}, \quad D \leq C.$



**3. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu – nulová pravá strana.** Řešme rovnici

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0,$$

kde  $p(x)$  je funkce spojitá na intervalu  $(a, b)$ .

Je to vlastně diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y'(x) = -p(x)y(x),$$

která má triviální řešení  $y \equiv 0$  na  $(a, b)$ , a pro  $y \neq 0$  ji lze převést na

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x),$$

odkud po integraci obou stran

$$\ln |y(x)| = -P(x) + C_0,$$

kde  $P(x)$  je primitivní funkce k  $p(x)$  na  $(a, b)$  a  $C_0 \in \mathbb{R}$ . Odtud

$$|y(x)| = e^{C_0} \cdot e^{-P(x)} = C \cdot e^{-P(x)}, \text{ kde } C > 0,$$

tedy obecně

$$y(x) = D \cdot e^{-P(x)}, \text{ kde } D \in \mathbb{R}, x \in (a, b).$$

Pomocí volby  $D = 0$  jsme sem zahrnuli i triviální řešení.

**4. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu – variace konstant.** Hledáme všechna řešení rovnice

$$(4) \quad y'(x) + y(x) \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Rovnice má smysl, pokud  $x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$  pro některé  $k \in \mathbb{Z}$ . Budeme tedy hledat řešení na těchto intervalech.

Obecné řešení rovnice (4) bude tvaru

$$y(x) = y_1(x) + C \cdot y_0(x),$$

kde  $y_0$  je nějaké nenulové řešení odpovídající homogenní rovnice

$$(4') \quad y'(x) + y(x) \operatorname{tg} x = 0,$$

$y_1$  je nějaké (pevně zvolené) řešení rovnice (4) a  $C \in \mathbb{R}$ .

Problém nalezení všech řešení rovnice (4) se tedy redukuje na vyřešení homogenní rovnice (4') a na nalezení jednoho řešení původní rovnice (4). Podle příkladu 3 můžeme položit

$$y_0(x) = \cos x = \operatorname{sgn}(\cos x) \cdot e^{\ln |\cos x|}$$

( $\operatorname{sgn}(\cos x)$  je konstantní na každém z intervalů  $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ ).

Hledejme nyní jedno řešení rovnice (4) a hledejme ho ve tvaru

$$y_1(x) = c(x)y_0(x) = c(x) \cos x,$$

kde  $c(x)$  je funkce diferencovatelná na intervalu  $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$  pro zvolené  $k \in \mathbb{Z}$ . Stačí tedy najít jednu takovou funkci  $c(x)$ . Po derivování a dosazení:

$$\begin{aligned} c'(x) \cos x - c(x) \sin x + c(x) \cos x \operatorname{tg} x &= \frac{1}{\cos x}, \\ c'(x) \cos x &= \frac{1}{\cos x}, \\ c'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy položit  $c(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $y_1(x) = \sin x$ . Dostáváme obecné řešení

$$y(x) = \sin x + C \cos x, \text{ kde } C \in \mathbb{R},$$

rovnice (4) na intervalu  $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ .

### 5. Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů – homogenní případ.

Podobně jako u rovnic 1. řádu bude obecné řešení rovnice

$$(5) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

kde  $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$  jsou spojité funkce na intervalu  $(a, b)$ , tvaru

$$y(x) = y_1(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

kde  $y_1$  je jedno řešení rovnice (5),  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  tvoří tzv. *fundamentální systém*, tj. bázi prostoru všech řešení homogenní rovnice

$$(5') \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0,$$

a  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .

Soustředíme se tedy nejprve na hledání fundamentálních systémů, a to v nejjednodušším případě rovnic (5) s konstantními koeficienty. Tedy hledáme bázi prostoru řešení rovnice

$$(5.1) \quad y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0,$$

kde  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Prvky fundamentálního systému lze volit tak, že korespondují s kořeny *charakteristického polynomu* rovnice (5.1), tj. polynomu

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

a to tak, že  $k$ -násobnému kořenu  $\lambda$  polynomu  $\chi$  odpovídají funkce

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

Protože polynom stupně  $n$  má – až na násobnost –  $n$  kořenů nad  $\mathbb{C}$ , dostaneme takto  $n$  lineárně nezávislých řešení rovnice (5.1).

Například rovnice

$$(5.2) \quad y''' - 3y' - 2y = 0$$

má charakteristický polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)^2 \cdot (\lambda - 2)$$

s kořeny  $-1$  a  $2$ , přičemž  $-1$  je kořenem dvojnásobným. Báze prostoru řešení rovnice (5.2) je tedy (např.)

$$\{e^{-x}, xe^{-x}, e^{2x}\}.$$

□

Předpokládejme nyní, že  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  je kořenem charakteristického polynomu  $\chi(\lambda)$  nějaké rovnice. Pak je také  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  kořenem polynomu  $\chi$  a uvedený postup dává **komplexní** prvky fundamentálního systému:

$$(*) \quad \begin{aligned} e^{\lambda x} &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)), \\ e^{\bar{\lambda} x} &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)), \end{aligned}$$

případně  $x e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$  atp.

Zpravidla ovšem hledáme reálná řešení rovnice s reálnými koeficienty. V takovém případě je možné vyjít z dvojic funkcí (\*) a nahradit je dvojicí

$$(**) \quad \begin{aligned} e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), \end{aligned}$$

kteřá (nad  $\mathbb{C}$ ) generuje stejný podprostor řešení jako (\*).

Podobně pro kořeny vyšší násobnosti přejdeme k

$$\begin{aligned} x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \end{aligned}$$

atd.

**Příklad.** Rovnice

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$$

má charakteristický polynom

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2$$

s dvojnásobnými komplexními kořeny  $\lambda = 2i$ ,  $\lambda = -2i$ . Ty dávají řešení  $\cos 2x \pm i \sin 2x$ ,  $x(\cos 2x \pm i \sin 2x)$ , a tedy reálný fundamentální systém

$$\{\cos 2x, \sin 2x, x \cos 2x, x \sin 2x\}.$$

## 6. Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů – variace konstant.

Předpokládejme, že řešíme rovnici

$$(6) \quad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

a že jsme našli fundamentální systém  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  řešení homogenní rovnice

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0.$$

Hledáme jedno řešení (nehomogenní) rovnice (6). Podobně jako v části 4 je budeme hledat ve tvaru

$$y_1(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x),$$

kde  $c_1(x), \dots, c_n(x)$  jsou nějaké diferencovatelné funkce na zkoumaném intervalu. Tedy namísto funkce  $y_1$  hledáme funkce  $c_1, \dots, c_n$ . Dosazením takto vyjádřené funkce  $y_1$  do rovnice (6) dostaneme ovšem jednu rovnici pro  $n \geq 2$  neznámých (funkcí). V dalším postupu přidáváme podmínky pro funkce  $c_i$  tak, abychom eliminovali derivace vyšších řádů.

Postup ukážeme na rovnici

$$(6.1) \quad y'' + y = 4xe^x.$$

Charakteristický polynom rovnice  $\lambda^2 + 1$  má kořeny  $\pm i$ , reálný fundamentální systém je tedy např.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \sin x, \\ \varphi_2(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Nyní hledáme partikulární řešení rovnice (6.1) ve tvaru

$$y_1(x) = c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x,$$

odkud

$$y_1'(x) = c_1'(x) \sin x + c_1(x) \cos x + c_2'(x) \cos x - c_2(x) \sin x.$$

Po dalším derivování a dosazení do (6.1) bychom dostali jednu rovnici o dvou neznámých funkcích  $c_1, c_2$ . Můžeme tedy pro ně stanovit další podmínku:

$$c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = 0,$$

která eliminuje v  $y_1''$  druhé derivace funkcí  $c_1$  a  $c_2$ . Nyní (pro zjednodušení zápisu označíme  $c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x)$ )

$$y_1'' = c_1' \cos x - c_1 \sin x - c_2' \sin x - c_2 \cos x$$

a původní rovnice přejde na

$$c_1' \cos x - c_2' \sin x = 4xe^x.$$

Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1' \sin x + c_2' \cos x &= 0, \\ c_1' \cos x - c_2' \sin x &= 4xe^x, \end{aligned}$$

maticově

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4xe^x \end{pmatrix},$$

odkud

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= 4xe^x \cos x, \\ c_2'(x) &= -4xe^x \sin x, \end{aligned}$$

po integraci

$$\begin{aligned}c_1(x) &= 2e^x(x \sin x + x \cos x - \sin x), \\c_2(x) &= -2e^x(x \sin x - x \cos x + \cos x).\end{aligned}$$

Tedy  $y_1(x) = c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x = 2e^x(x-1)$  řeší rovnici (6.1) a obecné řešení má tvar

$$y(x) = 2e^x(x-1) + c_1 \sin x + c_2 \cos x, \text{ kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

a definiční obor  $\mathbb{R}$ .

### 7. Speciální pravá strana.

V některých případech můžeme řešit rovnici tvaru (5) **mnohem rychleji** pomocí následujícího

**Tvrzení.** *Má-li pravá strana rovnice (5) s konstantními koeficienty tvar*

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

nebo

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

kde  $P_n$  je polynom stupně  $n$  a  $\alpha + i\beta$  je  $k$ -násobný kořen ( $k \geq 0$ ) charakteristického polynomu rovnice (5), pak existuje partikulární řešení ve tvaru

$$y_1(x) = x^k Q_n(x)e^{\alpha x} (a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x)),$$

kde  $Q_n$  je nějaký polynom stupně  $n$  a koeficienty  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Např. rovnice (6.1) má pravou stranu  $P_1(x)e^x \cos 0x$ , kde  $P_1(x) = 4x$ , přičemž  $1 = 1 + 0i$  je 0-násobný kořen charakteristického polynomu. Ihned tedy vidíme, že můžeme najít partikulární řešení ve tvaru  $y_1(x) = (ax + b)e^x$ , a stačí po dosazení do původní rovnice dopočítat koeficienty  $a, b$ .

Rovnice (6.1) přejde na

$$2ae^x + 2(ax + b)e^x = 4xe^x,$$

odkud porovnáním koeficientů u  $e^x$ , resp.  $xe^x$ , dostáváme  $a = 2, b = -2$ .