Relace, zobrazení

kartézský součin (dvou množin), binární relace, doplňková relace, inverzní relace

1. Jsou dány množiny $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, $C = \emptyset$, $D = \{1\}$. Vypište všechny prvky následujících kartézských součinů:
   a) $A \times D$
   b) $D \times B$
   c) $C \times A$

2. Vyjádřete počet prvků množiny $A \times B$ v závislosti na počtech prvků konečných množin A, B.

3. Jsou dány množiny $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{5; 6; 7; 8\}$. Zapište výčtem následující množiny:
   a) $R_1 = \{(a, b) \in A \times B; b \leq 2a\}$
   b) $R_2 = \{(a, b) \in A \times B; a \leq 3 \Rightarrow b = 3a + 2\}$
   c) $R_3 = \{(a, b) \in A \times B; b = a^2\}$
   d) $R_4 = \{(a, b) \in A \times A; b = a^2\}$

4. Relace R mezi množinami $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{a; b\}$ je dána výčtem $R = \{(1; a), (1; b), (2; a), (3; b)\}$. Znázorněte relaci R pomocí a) kartézského grafu, b) šachovnicového grafu, c) uzlového grafu.

5. Relace R na množině $A = \{1; 2; 3\}$ je dána výčtem $R = \{(1; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 3)\}$. Znázorněte relaci R pomocí uzlového grafu a dále zapište výčtem R^{-1} a R'.

vlastnosti relací (relace reflexivní, antireflexivní, symetrická, antisymetrická, slabě antisymetrická, tranzitivní, dichotomická)

6. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků. Své rozhodnutí zdůvodněte.
   a) Existuje binární relace, která je reflexivní a antireflexivní zároveň.
   b) Existuje binární relace, která je symetrická a slabě antisymetrická zároveň.
   c) Existuje binární relace, která je symetrická a antisymetrická zároveň.

7. Určete vlastnosti daných relací nejprve na množině $\mathbb{R}$ a poté na množině $\mathbb{N}$:
   a) $(x; y) \in R_1 \Leftrightarrow x + y = 0$
   b) $(x; y) \in R_2 \Leftrightarrow |x| = |y|$
   c) $(x; y) \in R_3 \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$

8. Je dána relace R na množině všech lidí. Rozhodněte o každé z nich, zda je reflexivní, antireflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní nebo dichotomická, pokud $a\ R\ b$ je definováno následovně:
   a) a je vyšší než b,
   b) a a b se nenarodili ve stejný den,
   c) a a b mají stejné křestní jméno,
   d) a a b mají stejného prarodiče.

9. Na množině $M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ je definována relace $R = \{(x, y) \in M \times M;\ y = x \bmod 3\}$. Sestrojte kartézský graf a určete vlastnosti této relace.

10. U je množina všech úseček, jejichž krajní body jsou vrcholy daného čtverce $ABCD$. Zapište výčtem prvků relaci $R = \{(x, y) \in U \times U;\ x \perp y\}$ a určete její vlastnosti.

ekvivalence na množině, disjunktní množiny, disjunktní rozklad množiny, složená relace

11. Zapište všechny disjunktní rozklady množiny $A = \{a; b; c\}$ a k nim příslušné ekvivalence na množině A.
12. Jaké disjunktní rozklady příslušné množiny jsou určeny danou ekvivalencí:
    a) rovnost na množině $\mathbb{N}$,
    b) $(x, y) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Leftrightarrow x \cdot y > 0$,
    c) rovnoběžnost na množině přímek v dané rovině.
13. Na množině $M = \{a; b; c; d\}$ jsou dány relace $R = \{(a; b), (b; b), (c; d)\}$ a $S = \{(b; a), (b; d), (d; d)\}$. Zapište výčtem:
    a) $R \circ R$
    b) $S \circ S$
    c) $R \circ S$
    d) $S \circ R$
    e) $(R \circ R) \circ (S \circ S)$

zobrazení, vlastnosti (injekce, surjekce, bijekce), inverzní zobrazení

14. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Rozhodněte, které z binárních relací R_1–R_4 jsou zobrazení z A do B.
    a) $R_1 = \{(a, 1), (b, 2), (d, 3)\}$
    b) $R_2 = \{(a, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 3)\}$
    c) $R_3 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 1)\}$
    d) $R_4 = \{(b, 3)\}$
15. Jsou dány množiny $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{a; b; c\}$. Uveďte příklad zobrazení z množiny A do množiny B, které
    a) je injektivní, ale není bijektivní,
    b) není surjektivní ani injektivní,
    c) je bijektivní.
16. Je dána úsečka KL v rovině α. Nechť A je množina všech pravidelných n-úhelníků se stranou KL ležících v rovině α, kde $n < 7$, a nechť $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Rozhodněte, zda předpis
    a) f, který přiřazuje každému n-úhelníku množiny A počet jeho vrcholů,
    b) g, který přiřazuje každému n-úhelníku množiny A počet jeho úhlopříček,

    je zobrazení z množiny A do množiny B. V kladném případě určete, zda se jedná o zobrazení injektivní, surjektivní nebo bijektivní a zda existuje f^{-1}.

Literatura

Bečvář, J. (2005). Lineární algebra. Matfyzpress, Praha. `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/becvar_-_linearni_algebra.pdf`

`https://is.muni.cz/el/1441/podzim2014/ZS1BK_ZMA/um/binarni_relace_zobrazeniCZV.pdf`

`https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/Rel2019.pdf`

`https://iuuk.mff.cuni.cz/~rakdver/dm/lesson2.pdf`

Muzikářová, Z. (2016). Binární relace a jejich využití ve výuce matematiky. Bakalářská práce, MFF UK Praha.