Úvod do moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic

Doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.
Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.
Doc. RNDr. Josef Málek, CSc.
Mgr. Milan Pokorný, Ph.D.
Doc. RNDr. Jana Stará, CSc.

20. dubna 2009

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Proč zavádíme pojem slabého řešení

Úvodní kapitola sleduje několik cílů:

- Na příkladu Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici ukážeme v Sekci 1.1.1, že klasické řešení úlohy vyžaduje *a priori* jistou hladkost dat úlohy. Pokud data tyto požadavky na hladkost nesplňují, je třeba zobecnit pojem řešení. My se vydáme jednou z možných cest, která nás přivede k pojmu slabého řešení, a která nám také vytyčí jak základní problémy, kterým se budeme v texty věnovat, a současně i požadavky na prostory funkcí, v nichž slabé řešení hledáme.

- V Sekcích 1.1.2 a 1.1.3 uvedeme dvě matematické oblasti, kde se (parciální) diferenciální rovnice vyskytují v slabé formulaci přirozeným způsobem. Jinak řečeno, slabé řešení parciální diferenciální rovnice (PDR) je v těchto oblastech prvotní pojem, zatímco klasické řešení je pojem odvozený, tedy spíše druhotný. Prvním příkladem jsou nutné podmínky existence kritických bodů funkcionálů jako jsou délka křivky, obsah plochy, celková energie částice a podobně. V klasické mechanice jsou kritickými body řešení Eulerových-Lagrangeových rovnic. Tyto rovnice jsou však objekt druhotný, neboť jsou odvozeny z podmínky

  > Gateauxovská derivace funkcionálu v kritickém bodě je v libovolném směru nulová.

  což je ekvivalentní výroku, že kritický bod je slabým řešením Eulerových-Lagrangeových rovnic.

  Bilanční rovnice mechaniky kontinua formulovaná na libovolných „kulturních“ podmnožinách oblasti (takzvané kontrolní objemy), kterou těleso vyplňuje, je dalším příkladem problému, kde je slabé řešení prvotní pojem.

Ukážeme totiž, že z bilancí (hmoty, energie, hybnosti) formulovaných na kontrolních objemech lze přímo získat pojem slabého řešení, aniž by bylo nutné formulovat bilanční rovnice klasickým způsobem.

- Stručně také ukážeme, že pojem slabého řešení parciálních diferenciálních rovnic je základem numerické metody zvazné *metoda konečných prvků*. Výhodou této metody, která je vhodná jak k numerickým simulacím, tak k teoretické analýze (například odhad chyb), je skutečnost, že se tato diskrétní metoda opírá o hluboké teoretické výsledky získané pro spojitý problém. Tato kniha by měla sloužit jako úvodní text, kde se lze seznámit s některými teoretickými výsledky pro spojitý problém.

1.1.1 Homogenní Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici

Vezměme omezenou otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s hranicí $\partial\Omega$ a uvažujme následující úlohu[1]

$$-\Delta u = f, \quad \forall x \in \Omega \tag{1.2a}$$

$$u = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{1.2b}$$

kde $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ je daná funkce.

Klasickým řešením úlohy (1.2) rozumíme funkci $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$, která splňuje (1.2a) a (1.2b) bodově. Je-li u klasické řešení (1.2), pak nutně musí být $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Pokud však funkce f na pravé straně rovnice není spojitá (což může nastat při popisu nějakého fyzikálního problému), je zřejmě pojem klasického řešení nedostačující, neboť i úlohy tohoto typu je potřeba matematicky zvládnout. Je tudíž nutné zavést obecnější definici řešení zadané úlohy a získat tak objekt, se kterým můžeme v takovýchto příkladech pracovat.

Předpokládejme, že

$$f \in L^2(\Omega), \tag{1.3}$$

vynásobíme rovnici (1.2a) libovolnou funkcí $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ a zintegrujme výsledný vztah přes Ω. Dostaneme

$$-\int_\Omega \Delta u \, \varphi dx = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

[1]Připomeňme označení: Je-li $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_d)^T$ vektorová veličina (například tok tepla), pak rovnice

$$\operatorname{div} \vec{q} = f, \quad \forall x \in \Omega \tag{1.1}$$

dává do rovnováhy tok veličiny $\vec{q}$ přes hranici $\partial\Omega$ a objemové zdroje veličiny f. Je-li tok $\vec{q}$ úměrný gradientu ∇u (to jest je lineárně závislý na ∇u), kde u je skalární funkce $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (například teplota), pak z (1.1) plyne (1.2a), neboť po dosazení $\vec{q} = \nabla u$ do levé strany rovnice (1.1) dostaneme

$$\operatorname{div} \vec{q} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u.$$

Levou stranu rovnice upravíme pomocí Greenovy věty (přesněji řečeno podle jejího důsledku pojednávajícího o integraci per-partes) a uvědomíme si, že integrál přes hranici $\partial\Omega$ je nulový, protože funkce φ má kompaktní nosič v Ω. Výsledkem je

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla \varphi dx = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \ \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.4}$$

neboli

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)}\,, \quad \forall \varphi \ \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.5}$$

Mohli bychom pokračovat dále a přenést ještě jednu derivaci z u na φ, touto cestou ale nepůjdeme, chceme totiž, aby prostor, ve kterém budeme hledat řešení, byl shodný (nebo alespoň blízký) prostoru, odkud budeme brát funkci φ. Speciálně se ptáme,

Otázka 1.1.1 *Lze v rovnici* (1.5) *položit* $\varphi = u$*?*

Pokud ano, pak z (1.2a) plyne

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = (f, u)_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}\,, \tag{1.6}$$

kde jsme v posledním kroku využili Hölderovu (či Cauchy-Schwartzovu) nerovnost.

Mysleme si, že

$$\exists c > 0, \ \forall u : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,, \tag{1.7}$$

neboli norma funkce je kontrolována normou gradientu. Toto obecně neplatí, jak lze snadno nahlédnout dosazením konstantních funkcí. V našem případě však víme, že platí $u|_{\partial\Omega} = 0$, což vylučuje všechny netriviálně konstantní funkce. Otázka však zůstává

Otázka 1.1.2 *Pro jaké funkce lze očekávat platnost* (1.7)*?*

Pokud platí (1.7), pak z (1.6) vyplývá

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Odsud a z předpokladu (1.3) pak plyne, že $\nabla u \in L^2(\Omega)$, což vede k přirozené definici prostoru

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ v \ \in L^2(\Omega), \forall i =, \dots, d : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Ještě zavedeme prostor

$$W^{1,2}_0(\Omega) = \left\{ v \ \in W^{1,2}(\Omega) \mid \ v \ |_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Připomeňme, že pro funkce $v \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, nemá smysl mluvit o hodnotách funkce na hranici, protože hranice $\partial\Omega$ je množina nulové (d-rozměrné) Lebesgueovy míry. Funkce z $W^{1,2}(\Omega)$ však tvoří podprostor v $L^2(\Omega)$ a kromě hodnot funkce lze něco říci i hodnotách jejích derivací – otázkou je, zda tato informace bude stačit k tomu, abychom mohli mluvit o hodnotách funkce na hranici. Bude tedy nutné vyřešit následující problém.

Otázka 1.1.3 *Lze pro $v \in W^{1,2}(\Omega)$ mluvit o hodnotách na hranici? Pokud ano, v jakém smyslu?*

Vraťme se ještě k otázce 1.1.1. Z (1.5) plyne, že odpověď bude kladná, pokud je kladná odpověď na otázku

Otázka 1.1.4 *Jsou funkce s kompaktním nosičem husté $W_0^{1,2}(\Omega)$?*

Pokud ano, nazveme $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ slabým řešením úlohy (1.2) právě když $\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ platí rovnost

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} .$$

Zavedli jsme tedy pojem řešení, který vyžaduje méně informací o hladkosti funkcí (a to jak daných, tak hledaných). Užitím nové definice řešení okamžitě vyvstávají následující otázky.

1. Jak je to s existencí řešení a s jeho jednoznačností? Lze ukázat spojitou závislost řešení na datech úlohy? Pokud ano, v jaké metrice? Souhrnně se tyto otázky označují jako problém existence jednoznačnosti slabého řešení a jeho spojité závislosti na datech.

2. Lze získat dodatečnou informaci o hladkosti řešení v případech, kdy jsou data úlohy hladší, než je požadováno pro samotnou existenci? Za jakých podmínek na data bude slabé řešení řešením klasickým? Souhrnně se tyto otázky označují jako problém regularity slabého řešení.

Tyto základní problémy budeme v této učebnici zkoumat nejen pro motivační problém (1.2), ale především pro (lineární) eliptické, parabolické a hyperbolické úlohy (viz příslušné kapitoly).

Poznamenejme, že problém existence a jednoznačnosti je lehčí než problém regularity a to proto, že je založen na obecnějších pojmech, funkcích,... a pro lineární eliptické úlohy vše vyřešíme Rieszovou větou o reprezentaci a jejím zobecněním.

Ještě dříve, než se pustíme do otázek zabývajících se řešitelností parciálních diferenciálních rovnic ve slabém smyslu a kvalitativním chováním těchto řešení, zavedeme Sobolevovy prostory $W^{k,p}(\Omega)$ a budeme zkoumat jejich vlastnosti. Speciálně se zaměříme na otázku hustoty hladkých funkcí $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ v Sobolevových prostorech, otázku interpretace hodnot funkcí na hranici (věta o stopách), otázku souvislosti Sobolevových prostorů s jinými prostory funkcí (věty o spojitém a kompaktním vnoření) a konečně také otázku platnosti Poincarého-Friedrichsových nerovností (příkladem je nerovnost (1.7) uvedená výše).

1.1.2 Úlohy variačního počtu – nutné podmínky

Variační počet se zabývá studiem kritických bodů (tzv. extremál) funkcionálů, to jest zobrazení z Banachova[2] prostoru, obvykle nekonečné dimenze, do prostoru

[2] Úplný normovaný lineární prostor.

reálných čísel. Typicky je $\varphi : X \to \mathbb{R}$, kde X je prostor funkcí (například $\mathcal{C}^1(((,a),b))$, $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ a podobně).

Připomeňme několik základních pojmů.

Definice 1.1.5 (lokální maximum (minimum)) *Řekneme, že funkcionál $\varphi : X \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in X$ lokální maximum (resp. minimum) pokud*

$$\exists \delta > 0, \forall x \in U_\delta(x_0) : \varphi(x_0) \geq \varphi(x) \ (resp.\ \varphi(x_0) \leq \varphi(x)),$$

kde $U_\delta(x_0) = \{x \in X | \ \|x - x_0\|_X < \delta\}$.

Definice 1.1.6 (Gateaux derivace) *Řekneme, že funkcionál $\varphi : X \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in X$ Gateaux derivaci, právě když $\forall h \in X$, $\|h\|_X = 1$ existuje limita*

$$\delta\varphi(x_0; h) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + th) - \varphi(x_0)}{t}.$$

Pokud je x_0 lokálním minimem (resp. maximem) funkcionálu φ, aneb x_0 je extremála funkcionálu φ, a pokud limita $\delta\varphi(x_0; h)$ existuje pro nějaké $h \in X$, pak nutně $\delta\varphi(x_0; h) = 0$. Speciálně, je-li φ Gateaux diferencovatelná v bodu $x_0 \in X$, pak nutně

$$\forall h \in X : \delta\varphi(x_0; h) = 0. \tag{1.8}$$

Důkaz předchozího tvrzení je elementární. Označme $g_h(t) = \varphi(x_0 + th)$. Protože $g_h(t)$ má v bodě 0 lokální extrém, z teorie reálných funkcí plyne, že pokud existuje $g'_h(0)$, pak je $g'_h(0) = 0$. Avšak dle definice Gateaux derivace je $g'_h(0) = \delta\varphi(x_0; h)$.

Uveďme několik příkladů úloh klasického variačního počtu.

Příklad 1.1.7 (brachystochrona) *Buď*

$$\gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x \in [0, a],\ y = f(x),\ y(0) = 0,\ y(a) = b\right\}$$

křivka spojující počátek souřadného systému s bodem $[a, b]$, která je zadaná jako graf funkce $y(x)$. Úloha o brachystochroně (úloha o křivce nejrychlejšího spádu) je problém nalézt takovou funkci y z přípustné třídy funkcí

$$Y = \left\{y \in \mathcal{C}^1((a, b)) \cap \mathcal{C}([a, b]) | \ y(0) = 0, y(a) = b\right\},$$

která minimalizuje funkcionál

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{b - y(x)}} dx,$$

který udává čas potřebný k tomu, aby se v homogenním gravitačním poli g dostal hmotný bod samospádem po křivce $y(x)$ z startovní pozice $[a, b]$ do počátku souřadného systému.

Příklad 1.1.8 (délka křivky) *Užijeme-li označení z předchozího příkladu, pak funkcionál*

$$L[y] = \int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx,$$

udává délku křivky zadané jako graf funkce $y(x)$. Úlohou je minimalizovat $L[y]$ na třídě přípustných křivek Y.

Příklad 1.1.9 (minimální plocha) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nějaká (rozumná) množina a buď dána funkce $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Úloha o minimální ploše je problém nalézt takovou funkci $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$, že ω minimalizuje funkcionál*

$$A[u] = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}dx$$

který udává obsah plochy popsané funkcí u, přičemž množina přípustných ploch je určena jako

$$Y = \left\{ u \ \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) | \ u \mid_{\partial\Omega} = g \right\}.$$

Prostory Y zavedené v příkladech 1.1.7 a 1.1.9 ovšem nejsou lineární. V příkladech 1.1.7 a 1.1.8 tedy volíme

$$X = \mathcal{C}^1((a,b)) \cap \mathcal{C}_0([a,b])$$

a kritický bod (extremálu) y hledáme ve tvaru

$$y(x) = y_0(x) + \xi(x), \tag{1.9}$$

kde $\xi \in X$ a $y_0 : [0,a] \to \mathbb{R}$ je nějaká hladká funkce splňující okrajové podmínky $y_0(0) = 0$ a $y_0(a) = b$. Podobně v příkladu 1.1.9 volíme

$$X = \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$$

a kritický bod (extremálu) ω hledáme ve tvaru

$$\omega(x,y) = \omega_0(x,y) + \xi(x,y),$$

kde $\xi \in X$ a $\omega_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ je nějaká hladká funkce splňující okrajové podmínky $\omega_0|_{\partial\Omega} = g$.

Na příkladu 1.1.8 ukážeme, že požadavek na nulovost Gateaux derivace (1.8) odpovídá požadavku na nalezení slabého řešení Eulerových-Lagrangeových rovnic, samotné Eulerovy-Lagrangeovy rovnice jsou však v tomto případě druhotným pojmem, neboť jsou odvozeny za předpokladu vyšší hladkosti uvažovaných funkcí.

Pro libovolné $\varphi \in X$ platí

$$\delta L(y_0 + \xi; \varphi) = \frac{d}{dt} \int_0^a \sqrt{1 + ((y_0(x) + \xi(x))' + t\varphi'(x))^2}dx \Bigg|_{t=0} =$$
$$= \int_0^a \frac{(y'(x) + t\varphi'(x))\,\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x) + t\varphi'(x))^2}}dx \Bigg|_{t=0} = \int_0^a \frac{y'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}dx.$$

Podmínku (1.8) v tomto konkrétním případě tedy přepíšeme jako

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1((a,b)) \cap \mathcal{C}_0([a,b]) : \int_0^a \frac{y'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} dx = 0. \tag{1.10}$$

Teprve za dalšího předpokladu na hladkost uvažovaných funkcí, například $\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\right)' \in \mathcal{C}((a,b))$, dostáváme (po provedení integrace per partes) z předchozí rovnice vztah

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0([a,b]) : -\int_0^a \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\right)' \varphi(x) dx = 0, \tag{1.11}$$

který již implikuje bodovou platnost Eulerovy-Lagrangeovy rovnice[3]

$$-\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}\right)' = 0, \tag{1.12}$$

Je na místě se ptát, proč nenazveme slabým řešením rovnice (1.12) funkci $y \in \mathcal{C}^1((a,b)) \cap \mathcal{C}_0([a,b])$ splňující rovnost (1.10), a proč raději pracujeme s obecnějšími funkcemi[4].Velice vážnou námitkou proti této konstrukci je skutečnost, že prostor $\mathcal{C}^1(\Omega)$ není úplný vzhledem k integrální normě $\|u\|_{\mathcal{C}^1(\Omega),\int} = \int_\Omega |u'(x)| dx$, přičemž integrální norma je pro danou úlohu přirozená.

Je-li y ve tvaru (1.9), pak je funkce ξ ze zmíněného rozkladu vhodná testovací funkce v rovnosti (1.10). Položíme-li skutečně $\xi = \varphi$, dostaneme

$$\int_0^a \frac{y'(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} dx = 0 \Leftrightarrow \frac{(y'(x))^2}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} dx = \frac{y'(x)y_0'(x)}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} dx.$$

Tuto rovnost a skutečnost, že $\frac{|y'(x)|}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} \leq 1$, využijeme k odhadu

$$\begin{aligned}
\int_0^a |y'| dx = \int_0^a \frac{|y'|}{(1+|y'|^2)^{\frac{1}{4}}} (1+|y'|^2)^{\frac{1}{4}} dx &\leq \\
\leq \frac{1}{2}\int_0^a \frac{|y'|^2}{\sqrt{1+|y'|^2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{1+|y'|^2} dx &\leq \\
\leq \frac{1}{2}\int_0^a \frac{|y'|}{\sqrt{1+|y'|^2}} |y_0'| dx + \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{1+|y'|^2} dx &\leq \\
\leq \frac{1}{2}\int_0^a |y_0'| dx + \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\int_0^a |y'| dx.
\end{aligned}$$

[3] Zde jsme využili platnost tvrzení: Je-li $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ a platí-li pro každé $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ rovnost $\int_\Omega u(x)\varphi(x) dx = 0$, pak je $u = 0$ pro všechna $x \in \Omega$.

[4] Prvním kandidátem na vhodný prostor funkcí by mohl být Sobolevův prostor $W^{1,1}((=,0)a) = \left\{u \in L^1\left((0,a), u' \in L^1((0,a))\right)\right\}$ nebo spíše prostor funkcí s omezenou variací.

Celkově tedy dostáváme

$$\int_0^a |y'|dx \le \int_0^a |y_0'|dx + a, \tag{1.13}$$

což ukazuje, že L^1-norma derivace je norma přirozená pro danou úlohu.

Na závěr ještě uvedeme tvrzení spojující tuto a předchozí sekci.

Lemma 1.1.10 (variační formulace Laplaceovy rovnice) *Funkce* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *je extremálou (lokálním minimem funkcionálu)*

$$\phi[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx,$$

právě když u *je slabým řešením úlohy* (1.2)*, to jest splňuje rovnost* (1.4)*.*

Důkaz. i) Je-li $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ extremálou funkcionálu ϕ, pak nutně $\delta\phi(u;\varphi) = 0$ pro všechna $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Avšak

$$\begin{aligned}\phi[u + t\varphi] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx + t\left\{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi - f\varphi dx\right\}\\ + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Odsud snadno plyne, že

$$\delta\phi(u;\varphi) = (\nabla u, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} - (f,\varphi)_{L^2(\Omega)},$$

čímž je jedna implikace dokázána.

ii) Naopak, použitím (1.14) s $t = 1$, snadno nahlédneme, že (1.4) implikuje

$$\phi[u + \varphi] \ge \phi[u] \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

□

1.1.3 Bilanční rovnice mechaniky kontinua

Rovnice, které popisují pohyb tělesa v rámci termodynamiky kontinua, vychází z bilančních zákonů, jejichž platnost je požadována pro každou otevřenou podmnožinu $\mathcal{B}$ oblasti Ω vyplněné materiálem. Obecná formulace těchto bilančních vztahů má pak tvar

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} D(t,x)dx + \int_{\partial\mathcal{B}} \vec{F}(t,x) \bullet \vec{n} dS = \int_{\mathcal{B}} P(t,x)dx, \tag{1.15}$$

kde D značí hustotu fyzikální veličiny (hmoty, složek vektoru hybnosti, složek vektoru momentu hybnosti, entropie, celkové energie), $\vec{F}$ je odpovídající tok této veličiny hranicí a P je objemová produkce příslušné veličiny.

Ze všech bilančních vztahů si pro lepší představu o tvaru funkcí D, $\vec{F}$ a P uveďme bilanci hmoty

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} \rho(t,x)dx + \int_{\partial\mathcal{B}} \rho(t,x)\vec{v}(t,x) \bullet \vec{n} dS = 0, \tag{1.16}$$

bilanci hybnosti

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} \rho(t,x)\vec{v}(t,x)dx + \int_{\partial\mathcal{B}} \left(\rho(t,x)\vec{v}(t,x) \otimes \vec{v}(t,x) - T\right)\vec{n} dS = \int_{\Omega} \rho(t,x)\vec{b}(t,x)dx, \tag{1.17}$$

a bilanci celkové energie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}} \rho(t,x)\left(\frac{|\vec{v}(t,x)|^2}{2} + e(t,x)\right)dx+ \\ + \int_{\partial\mathcal{B}} \left(\rho(t,x)\left(\frac{|\vec{v}(t,x)|^2}{2} + e(t,x)\right)\vec{v}(t,x) - \vec{q} - T\vec{v}(t,x)\right) \bullet \vec{n} dS = \\ = \int_{\Omega} \rho(t,x)\vec{b}(t,x) \bullet \vec{v}(t,x) + \rho(t,x)r(t,x)dx.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Standardní postup odvození rovnic termomechaniky kontinua je založen na přepisu (1.15) pomocí Greenovy věty a záměny derivace a integrálu do tvaru

$$\int_{\mathcal{B}} \left(D_{,t} + \operatorname{div}\vec{F} - P\right)(t,x)dx = 0,$$

kde $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}} \subset \Omega$ je libovolný kontrolní objem. Za předpokladu, že integrand je spojitý pak z předchozí rovnosti plyne, že $\forall x \in \Omega$, $\forall t \in (0,T)$ platí

$$D_{,t}(t,x) + \operatorname{div}\vec{F}(t,x) = P(t,x). \tag{1.19}$$

Je zřejmé, že (1.19) vyžaduje diferencovatelnost funkcí, která není v (1.15) potřeba. Slabá formulace bilančních zákonů se pak „obvykle“ odvozuje z (1.19) a okrajových podmínek.

Naším cílem je ukázat, že obecná forma bilančního zákona (1.15) přímo implikuje slabou formulaci. K tomu budeme potřebovat následující tvrzení, jehož důkaz lze nalézt například v Evans and Gariepy [1992] či Lukeš and Malý [1995].

Věta 1.1.11 *Buď $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lipschitzovská funkce a buď $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pak platí*

- $v|_{\{x\in\mathbb{R}^n|\ \eta(x)=r\}}$ *je integrovatelná ve smyslu $(n-1)$ rozměrné plošné (Hausdorffovy) míry,*

- $\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\,|\nabla\eta(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n|\ \eta(x)=r\}} v(x)dS\right) dr.$

Nyní sledujeme postup navržený v Feireisl [2004]. Buď η nezáporná nekonečně spojitě diferencovatelná funkce s kompaktním nosičem, tedy $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\eta \geq 0$. Pak množina $\{x \in \Omega|\ \eta(x) > r\}$ má pro skoro všechna $r \in [0, +\infty)$ hladkou hranici $\{x \in \Omega|\ \eta(x) = r\}$. Uvažujme nyní obecnou formu bilančního zákona (1.15) s kontrolním objemem $\mathcal{B} = \{x \in \Omega|\ \eta(x) > r\}$ pro $r \in (0, +\infty)$ a zintegrujme bilanční zákon s takto zvoleným objemem od 0 k $+\infty$. Máme

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{B}=\{x\in\Omega|\ \eta(x)>r\}} D(t,x)dxdr+ \\ +\int_0^{+\infty}\int_{\partial\mathcal{B}=\{x\in\Omega|\ \eta(x)=r\}} \vec{F}(t,x)\bullet\frac{\nabla\eta(x)}{|\nabla\eta(x)|}dSdr = \\ =\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{B}=\{x\in\Omega|\ \eta(x)>r\}} P(t,x)dxdr.\end{aligned}$$

Využijeme-li nyní k úpravě druhého členu tvrzení 1.1.11 a první a třetí člen přepíšeme s pomocí následujícího mezivýpočtu ($h(t,x) = D(t,x)$ popřípadě $h(t,x) = P(t,x)$)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{B}=\{x\in\Omega|\ \eta(x)>r\}} h(t,x)dxdr = \int_0^{+\infty}\int_{\Omega} \operatorname{sign}\left(\eta(x)-r\right)^+ h(t,x)dxdr = \\ = \int_\Omega h(t,x)\int_0^{+\infty} \operatorname{sign}\left(\eta(x)-r\right)^+ drdx = \int_\Omega h(t,x)\eta(x)dx,\end{aligned}$$

dostaneme pro libovolné η

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega D(t,x)\eta(x)dx + \int \vec{F}(t,x)\bullet\nabla\eta(x)dx = \int_\Omega P(t,x)\eta(x)dx,$$

což implikuje platnost (1.19) ve smyslu distribucí.

Kapitola 2

Teorie parciálních diferenciálních rovnic

2.1 Eliptické parcální diferenciální rovnice 2. řádu

2.1.1 Existence slabého řešení, jednoznačnost a spojitá závislost na datech pro jednu třídu eliptických operátorů

Lawrence C. Evans: "Neexistuje žádná obecná teorie zaměřená na řešitelnost všech PDR. Vzhledem k obrovské různorodosti jevů (geometrických, fyzikálních, stochastických), které jsou modelovány PDR–emi, takováto teorie těžko bude nalezena. Místo toho je výzkum zaměřen spíše na různé speciální typy PDR, které jsou důležité z pohledu aplikací, s nadějí, že náhled na původ těchto rovnic může dát cit pro jejich řešení."

"V moderní teorii PDR je velké úsilí věnováno matematickým důkazům existence řešení různých PDR, a nikoliv odvozování vzorečků pro tato řešení. To se může zdát zbytečné až bláznivé, leč matematici jsou jako teologové: považujeme existenci za základní vlastnost toho co studujeme. Avšak nemusíme, jako většina teologů, spoléhat vždy jen na víru samotnou."

První třída eliptických úloh 2. řádu bude vedena dvěma směry
(a) Vlastní operátor nebude zcela obecný, spíše uvažujeme jen příznivé členy.
(b) Soustředíme se na různé typy okrajových podmínek.

(OBLAST) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($\Omega \in C^{0,1}$ tj. Ω je omezená, otevřená s lipschitzovskou hranicí). Nechť hranice $\partial\Omega$ je složena ze čtyř částí

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup N$$

kde Γ_i je otevřená v $\partial\Omega$ pro $i = 1, 2, 3$ a $(d-1)$–rozměrná Lebesgueova míra množiny N je nulová.

Buď dány funkce: (DATA)

$$\begin{array}{lll} f:\Omega\to\mathbb{R} & g:\Gamma_2\cup\Gamma_3\to\mathbb{R} & \mathbb{A}:=(a_{ij})_{i,j=1}^d:\Omega\to\mathbb{R}^{d\times d} \\ b:\Omega\to\mathbb{R} & u_0:\Gamma_1\to\mathbb{R} & \\ & \sigma:\Gamma_3\to\mathbb{R} & \end{array}$$

Cílem je vyřešit úlohu: hledáme $u:\Omega\to\mathbb{R}$ tak, že

$$-\mathrm{div}\,(\mathbb{A}\nabla u\ )+bu=f\ \text{ v } \Omega \tag{2.1}$$

$$\left(\text{podrobněji}\qquad -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)+b(x)u(x)=f(x)\right)$$

$$\begin{array}{ll} \text{(Dirichlet)} & u=u_0 \ \text{ na } \Gamma_1 \\ \text{(Neumann)} & \dfrac{\partial u}{\partial n}=g \quad \text{na } \Gamma_2 \\ \text{(Newton)} & \dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=g \quad \text{na } \Gamma_3 \end{array}$$

$\frac{\partial u}{\partial n}=\nabla u\cdot n$, kde $n=(n_1,\dots,n_d)=n(x)$ je takzvaná *konormála* definovaná vztahem $n_i\equiv a_{ij}\nu_j$, kde $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_d)=\nu(x)$ je *vnější normála* k $\partial\Omega$ v bodě $x\in\partial\Omega$

Příklad 2.1.1 *Je–li $\mathbb{A}(x)=I$ ($\Leftrightarrow a_{ij}(x)=\delta_{ij}\ \forall x\in\Omega$) a $b\equiv 0$, pak úloha (2.1) přejde ve tvar:*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \ \text{ v } \Omega \\ u &= u_0 \ \text{ v } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} &= g \ \text{ v } \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma u &= g \ \text{ v } \Gamma_3 \end{aligned} \tag{2.1'}$$

Tato úloha popisuje například rovnovážné rozdělení teploty v homogenním a izotropním materiálu za podmínek, kdy na Γ_1 je daná teplota u_0, na Γ_2 je předepsán tok tepla hranicí a na Γ_3 je tento tok úměrný rozdílu vnější (dané) a vnitřní (neznámé) teploty.
Obecněji: pro $u=$ teplota se získá z energetické rovnice v termodynamickém ekvilibriu: $-\mathrm{div}\,q=r$, kde r je zdroj tepla a q je tok tepla daný zobecněným Fourierovým zákonem $q_i(x)=k_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}$.

Předpoklady:

(A0) $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$

(A1) Existuje $C_1 > 0$ tak, že pro s.v. $x \in \Omega$ a pro každé $\xi \in \mathbb{R}^d$ platí

$$\xi^T \cdot \mathbb{A}\xi = (\mathbb{A}\xi, \xi) = a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C_1|\xi|^2$$

(A2) $a_{ij}, b \in L^\infty(\Omega), \sigma \in L^\infty(\Gamma_3)$

(A3) $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma_2 \cup \Gamma_3)$

(A3*) $f \in V^\star$ a $g \in (W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2 \cup \Gamma_3))^\star$

(A4) $b, \sigma \geq 0$

(A5) existuje $\tilde{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ tak, že $T\tilde{u}_0|_{\Gamma_1} = u_0$

Pozorování 2.1.2 *Všimněme si, že vektor konormály* $n(x) = (n_1, \ldots, n_d)$ *směřuje v každém bodě* $x \in \partial\Omega$ *ven z oblasti:* $n(x) \cdot \nu(x) = a_{ij}(x)\nu_j(x)\nu_i(x) \geq C_1|\nu(x)|^2 = C_1 > 0$.

Věta 2.1.3 (Lax–Milgramova) *Buď* X *reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem* $(\cdot,\cdot)_X$ *a normou* $|\cdot|_X = (\cdot,\cdot)^{1/2}$. *Buď* $B : X \times X \to \mathbb{R}$ *bilineární forma na* X, *která je*
(a) X*–eliptická (tzn.* $\exists m > 0$ *tak, že* $\forall u \in X : B(u,u) \geq m\|u\|_X^2$*)*
(b) omezená (tzn. $\exists M > 0$ *tak, že* $\forall u, v \in X : |B(u,v)| \leq M\|u\|_X\|v\|_X$
Pak pro každé $F \in X^\star$ *existuje právě jedno* $u \in X$ *tak, že*

$$B(u,v) = \langle F, v\rangle \quad \textit{pro } \forall v \in X \tag{2.2}$$

a

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{m}\|F\|_{X^\star}. \tag{2.3}$$

Důkaz. (a) Nechť navíc B je symetrická (což je častý případ v aplikacích) ($B(u,v) = B(v,u)\ \forall u, v \in X$). Pak $B(u,v)$ je skalární součin na X (a díky podmínkám (a) a (b) generuje normu ekvivalentní původní normě na X). Existenci a jednoznačnost řešení úlohy (2.2) pak dostaneme přímo z Rieszovy věty o reprezentaci. Dosadíme–li do (2.2) za $v = u$, pak

$$m\|u\|_X^2 \leq B(u,u) = \langle F, u\rangle \leq \|F\|_X\|u\|_X$$

implikuje (2.3) a důkaz je hotov.
(b) B není symetrická. Pro $u \in X$ pevné $B(u,\cdot) \in X^\star$. Dle Rieszovy věty existuje tedy prvek, označme jej $Au \in X$, tak, že

$$B(u,v) = (Au, v)_X \quad \forall v \in X$$

Z vlastností B plyne:

(i) A je lineární, neboť B je bilineární

(ii) A je prostý a $\mathbb{R}(A)$ je uzavřený, což plyne z

$$m\|u\|_X^2 \leq B(u,u) = (Au,u)_X \leq \|Au\|_X\|u\|_X \Rightarrow \|u\|_X \leq \frac{1}{m}\|Au\|_X$$

(iii) A je omezený, neboť

$$\|Au\|_X = \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|\leq 1}} |(Au,v)| \leq \sup|B(u,v)| \leq M\|u\|_X\,\|v\|_X \leq M\|u\|_X$$

$$\Rightarrow \|Au\|_X \leq M\|u\|_X$$

Tedy $A : X \to X$ je lineární, omezený a prostý operátor. Ukážeme, že A je zobrazení na. Kdyby $A(X) \subsetneqq X$, pak existuje $v \in X \setminus A(X)$, který lze zvolit tak, že $\|v\|_X = 1$, $v \perp A(X)$. Pak ale $0 = (v, Av) = B(v,v) \geq m\|v\|_X^2 = m$, což je spor.
Protože $F \in X^\star$, existuje $w \in X$ tak, že $\langle F, v\rangle = (w,v)_X$ $\forall v \in X$. K w tedy existuje $u \in X$ tak, že

$$B(u,v) = (Au,v) = (w,v) = \langle F,v\rangle_{X^\star,X} \;\forall v \in X.$$

□

Odvození slabé formulace
Definuj $\mathcal{V} \equiv \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}); \varphi|_{\Gamma_1} = 0\}$ jako prostor testovacích funkcí.

Mysleme si, že u je řešením (klasickým) úlohy (2.1). Násobme základní rovnici z (2.1) libovolným prvkem $\varphi \in \mathcal{V}$ a integrujme přes Ω. Dostaneme

$$\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{dx} = \int_\Omega bu\varphi\,\mathrm{dx} - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi\,\mathrm{dx} =$$
$$= \int_\Omega bu\varphi\,\mathrm{dx} + \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{dx} - \int_{\partial\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j\varphi\,\mathrm{ds}.$$

Protože $a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j = \frac{\partial u}{\partial n}$ a $\varphi = 0$ na Γ_1, dostáváme z hraničních podmínek

$$\int_\Omega f\varphi\,\mathrm{dx} = \int_\Omega \left(bu\varphi + a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\mathrm{dx} - \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} g\varphi\,\mathrm{ds} + \int_{\Gamma_3}\sigma u\varphi\,\mathrm{ds}. \tag{2.4}$$

Označíme-li

$$B(u,\varphi) \equiv \int_\Omega \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + bu\varphi\right)\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_3}\sigma u\varphi\,\mathrm{ds}, \tag{2.5}$$

přejde rovnost (2.4) na tvar:

$$B(u,\varphi) = \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} g\varphi\,\mathrm{ds}.$$

Nyní do této rovnice dosadíme za u ze vztahu

$$v \equiv u - \tilde{u}_0, \tag{2.6}$$

kde $\tilde{u}_0$ je definováno v (A5) a zavedeme ještě

$$\langle F, \varphi \rangle \equiv \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} g\varphi \,\mathrm{ds} - B(\tilde{u}_0, \varphi). \tag{2.7}$$

Snadno nahlédneme, že v je řešením úlohy

$$\begin{aligned} v|_{\Gamma_1} &= 0 \\ B(v, \varphi) &= \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

Pozorování 2.1.4 *Všimněme si, že platí*

$$B(u,u) = \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega bu^2 + \int_{\Gamma_3} \sigma u^2 \geq C_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = C_1 \|\nabla u\|_2^2$$

To nám naznačuje, ve kterém prostoru bychom měli $\mathcal{V}$ uzavřít. Definujeme proto

$$V \equiv \text{ uzávěr } \mathcal{V} \text{ ve } W^{1,2}\text{–normě.}$$

Definice 2.1.5 *(Slabého řešení úlohy (2.1)) Řekneme, že u je slabým řešením (2.1), pokud*

$$\begin{aligned} & u - \tilde{u}_0 \in V \\ & B(u, \varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} g\varphi \, ds \quad \text{je splněno pro } \forall \varphi \in V \\ & v \in V \\ & B(v, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V \quad \text{kde } v := u - \tilde{u}_0 \end{aligned}$$

Abychom mohli aplikovat Lax–Milgramovu větu, potřebujeme ukázat, že

[1]	V	je Hilbertův
[2]	$B(\cdot,\cdot)$	je bilineární forma na V
[3]	$B(\cdot,\cdot)$	je V–eliptická
[4]	$B(\cdot,\cdot)$	je omezená
[5]	$F \in V^\star$	spojitý lineární funkcionál na V

ad [1] V je Hilbertův

V je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $W^{1,2}(\Omega)$. Tedy V je také Hilbertův.

ad [2] $B(\cdot,\cdot)$ je bilineární forma na V

Elementární, plyne z linearity integrálu.

ad [3] $B(\cdot,\cdot)$ je V–eliptická

Lemma 2.1.6 *Nechť platí (A1) — (A4). Pak $B(\cdot,\cdot)$ je V–eliptická, pokud je splněna alespoň jedna z následujících čtyř podmínek*

$$(A6)\quad \begin{cases} (\alpha) & \textit{míra } \Gamma_1 > 0, \\ (\beta) & b > 0 \textit{ na podmnožině množiny } \Omega \textit{ kladné } d\textit{–míry} \\ (\gamma) & \sigma > 0 \textit{ na podmnožině množiny } \Gamma_3 \textit{ kladné } (d-1)\textit{–míry} \end{cases}$$

$$(A7)\qquad (\delta)\qquad \fint_\Omega u\,dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx = 0.$$

<u>Důkaz</u>. Tvrzení: $\exists C > 0$ tak, že $B(v,v) \geq C\,\|v\|_{1,2}^2\ \ \forall v \in V$

Sporem: Nechť tvrzení neplatí. Pak $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ v^n \in V$ tak, že $\|v^n\|_{1,2}^2 > nB(v^n,v^n)$. Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit $\|v^n\|_{1,2} = 1$. Prostor $W^{1,2}$ je Hilbertův a tedy reflexivní a posloupnost v^n je omezená. Z funkcionální analýzy víme, že v reflexivním prostoru lze z každé omezené posloupnosti vybrat slabě konvergentní podposloupnost. Existuje tedy $v \in V$ tak, že pro jistou vybranou posloupnost platí

$$v^{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{ve } V, \quad \text{tj. ve } W^{1,2}.$$

Z věty o kompaktním vnoření (po případném přechodu na další posloupnost) plyne

$$v^{n_k} \to v \quad \text{v } L^2.$$

Z pozorování 2.1.4 víme, že

$$C_1\,\|\nabla v^{n_k}\|_2^2 \leq B(v^{n_k},v^{n_k}) < 1/n_k$$

a limitním přechodem v nerovnosti pro $k \to \infty$ dostáváme (za použití slabé zdola polospojitosti normy) rovnost

$$\|\nabla v\|_2 = \lim_{k\to\infty}\|\nabla v^{n_k}\|_2 = 0,$$

z čehož vyplývá

$$\nabla v^{n_k} \to \nabla v = 0 \quad \text{v } L^2.$$

Zjistili jsme tedy, že $v^{n_k} \to v$ ve $W^{1,2}$ a že $v \equiv$ const. Dále

$$1 = \lim_{k\to\infty}\|v^{n_k}\|_{1,2} = \|v\|_{1,2}\,.$$

Funkce v je konstantní $v = C$ a má jednotkovou normu. Ale:

(α) je–li míra $\Gamma_1 > 0$, pak musí být $C = 0$. Jedině při této volbě má v nulovou stopu na Γ_1 a tedy leží ve V. Jenže $\|0\|_{1,2} = 0$. (spor)

(β), (γ) $B(v,v) = \lim B(v^{n_k},v^{n_k}) = 0$. Z definice ovšem plyne (při $\nabla v = 0$)

$$B(v,v) = \int_\Omega b|v|^2 + \int_{\Gamma_3}\sigma|v|^2 = |C|^2\left(\int_\Omega b + \int_{\Gamma_3}\sigma\right)$$

Výraz v závorce je kladný, tudíž $B(v,v) = 0$ jedině při $C = 0$ (spor).

(δ) $\oint_\Omega v = 0$, tedy nutně $C = 0$ (spor). □

ad [4] $B(\cdot,\cdot)$ je omezená

Lemma 2.1.7 *Nechť (A2) platí. Pak* $\exists M > 0 |B(u,\varphi)| \leq M \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}$.

Důkaz. Cvičení č. 9. (užij Hölderovu nerovnost, (A2), ale i větu o stopách). □

ad [5] $F \in V^\star$ spojitý lineární funkcionál na V

Lemma 2.1.8 *Nechť (A2), (A3), (nebo (A3*)) a (A5) platí. Pak* $F \in V^\star$ *a* $\exists C_F > 0$ *tak, že*

$$\|F\|_{V^\star} \leq C_F \left[\|f\|_2 + \|g\|_{L^2(\Gamma_2\cup\Gamma_3)} + \|\tilde{u}_0\|_{1,2}\right] \tag{2.8}$$

$$\left(\text{nebo } C_F \left[\|f\|_{V^\star} + \|g\|_{(W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3))^\star} + \|\tilde{u}_0\|_{1,2}\right]\right)$$

Důkaz. Cvičení č. 10. □

Věta 2.1.9 *Buď* $\Omega \in C^{0,1}$. *Nechť* (A1) — (A5) *platí. Nechť dále jedna z podmínek* (A6) *je splněna. Pak existuje právě jedno slabé řešení u úlohy (2.1), které splňuje*

$$\|u\|_{1,2} \leq C \left[\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_2\cup\Gamma_3} + \|\tilde{u}_0\|_{1,2}\right] \tag{2.9}$$

Důkaz. Polož $v = u - \tilde{u}_0 \in V$. Dle Lax–Milgramova lemmatu $\exists! v \in V$ jakožto řešení úlohy $B(v,\varphi) = \langle F, \varphi\rangle$ a navíc $\|v\|_V \leq \frac{M}{m}\|F\|_{V^\star}$. Odsud

$$\begin{aligned}\|u\|_{1,2} = \|u - \tilde{u}_0 + \tilde{u}_0\|_{1,2} \leq \|v\|_{1,2} + \|\tilde{u}_0\|_{1,2} \leq \\ \leq C\left[\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\Gamma_2\cup\Gamma_3} + \|\tilde{u}_0\|_{1,2}\right]\end{aligned}$$

Samozřejmě jsme využili lemmat 2.1.6, 2.1.7 a 2.1.8. □

Důsledek 2.1.10 *Protože úloha je lineární, tak zobrazení* $\mathcal{F} : [f, g, \tilde{u}_0] \longmapsto u$ *jakožto zobrazení z* $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_2 \cup \Gamma_3) \times W^{1,2}(\Omega)$ *do* V *je omezené a spojité.*

Není–li splněna ani jedna z podmínek (A6) pak řešíme Neumannovu úlohu

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) &= f \quad \text{v } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.10}$$

Slabým řešením této úlohy nazveme $u \in W^{1,2}(\Omega)$ splňující

$$\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{dx} = \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g\varphi\,\mathrm{ds} \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega) \tag{2.11}$$

Příklad 2.1.11 *Jednodimenzionální prototyp našich úloh jsou rovnice*

- $u'' = 0$ *na* (a, b)
- $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$ — *Dirichlet*
- $u'(a) = \alpha$ *a* $u(b) = \beta$ — *smíšená úloha*
- $u'(a) = \alpha$ *a* $u'(b) = \beta$ — *Neumann*

Obecné řešení má tvar $Ax + b$.

Lemma 2.1.12 *Nutná podmínka existence slabého řešení Neumannovy úlohy:*

$$\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,ds = 0 \tag{A8}$$

<u>*Důkaz*</u>. Vezmi $\varphi \equiv 1$ v (2.11). □

Věta 2.1.13 *Nechť platí* (A1) — (A3), $\Omega \in C^{0,1}$. *Nechť navíc* f, g *splňují* (A8). *Pak existuje právě jedno slabé řešení* $u \in W := \{v \in W^{1,2}(\Omega); \oint_\Omega v = 0\}$ *Neumannovy úlohy. Platí pro něj*

$$\|u\|_{1,2} \leq C\left[\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\partial\Omega}\right] \tag{2.12}$$

Ostatní řešení jsou ve tvaru

$$u + \textit{ konstanta}$$

<u>*Důkaz*</u>. $B(u, v)$ je dána vztahem $\int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{dx}$. Tato forma je bilineární, omezená a dle lemmatu 2.1.8 (podmínka (A7)) také W–eliptická. Funkcionál F definovaný vztahem $\langle F, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g\varphi\,\mathrm{ds}$ je spojitý, lineární funkcionál na $W^{1,2}(\Omega)$, tedy $F \in W^\star$ (i $F \in (W^{1,2}(\Omega))^\star$). Dle Lax–Milgramovy věty dostáváme tvrzení i odhad (2.12). Je jasné, že $u +$ const. je také slabé řešení. Opačně, jsou-li u a v dvě slabá řešení (2.10), pak $B(u - v, \varphi) = 0\ \forall\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Volbou $\varphi = u - v$ dostaneme $\|\nabla(u - v)\|_2 = 0$. Tedy $\nabla(u - v) = 0$ skoro všude. Odsud $u = v +$ const. □

2.1.2 Existence slabého řešení pro úlohy s obecnými lineárními eliptickými operátory − Fredholmova alternativa

Uvažujme nyní obecnější formu na $W_0^{1,2}(\Omega)$ než $B(u, \varphi)$, a to:

$$a(u, \varphi) \stackrel{df.}{\equiv} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} + \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\,\mathrm{dx} + \int_\Omega c_i u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega bu\varphi\,\mathrm{dx} \tag{2.13}$$

To odpovídá operátoru

$$Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(c_i u) + bu$$

s okrajovou podmínkou $u = 0$ nebo $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ na $\partial\Omega$ ale i operátoru

$$L^\star \varphi \equiv -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\varphi) + c_i\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + b\varphi$$

s okrajovou podmínkou $\varphi = 0$ nebo $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ na $\partial\Omega$.
Opět předpokládáme podmínku elipticity (A1). Dále

$$a_{ij}, b_i, c_i, b \in L^\infty(\Omega) \quad \text{(žádný předpoklad na znaménko } b\text{!!)} \tag{A}$$

Platí

Lemma 2.1.14 *Existují $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$, a $\gamma > 0$ tak, že pro $\forall u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ platí*

$$|a(u,\varphi)| \le \tilde{C}_1 \|u\|_{1,2} \|\varphi\|_{1,2} \tag{2.14}$$

$$\tilde{C}_2 \|u\|_{1,2}^2 \le a(u,u) + \gamma \|u\|_2^2 \tag{2.15}$$

<u>*Důkaz*</u>. (2.14) zřejmý (ověřte si)
(2.15)

$$\begin{aligned}
\alpha \|\nabla u\|_2^2 \le \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} = \\
= a(u,u) - \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u\,\mathrm{dx} + \int_\Omega c_i u \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} + \int_\Omega b u^2\,\mathrm{dx} \le \\
\le a(u,u) + \left(\max_{i=1,\dots,d}\|b_i\|_\infty + \max_{i=1,\dots,d}\|c_i\|_\infty\right)\|u\|_2\|\nabla u\|_2 + \|b\|_\infty\|u\|_2^2 \le \\
\le a(u,u) + \frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \left[\frac{1}{2\alpha}\left(\max_{i=1,\dots,d}\|b_i\|_\infty + \max_{i=1,\dots,d}\|c_i\|_\infty\right)^2 + \|b\|_\infty\right]\|u\|_2^2
\end{aligned}$$

kde jsme využili nerovnost $2ab \le a^2 + b^2$. Přičteme-li ke vzniklé nerovnosti $\frac{\alpha}{2}(\|u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2)$, dostáváme požadovanou nerovnost. □

Věta 2.1.15 (1. existenční) *Existuje $\gamma \ge 0$ tak, že pro každé*

$$\nu \ge \gamma$$

a pro $\forall f \in L^2(\Omega)$ (mohlo by být $(W_0^{1,2}(\Omega)^\star)$ $\exists!$ slabé řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ úlohy

$$\begin{aligned} Lu + \nu u &= f \quad v\ \Omega \\ u &= 0 \ \ na\ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.16}$$

<u>*Důkaz*</u>. Vezmi γ z (2.14) v Lemmatu 2.1.14. Pak $a_\nu(u,\varphi) = a(u,\varphi) + \nu(u,\varphi)$ splňuje předpoklady Lax–Milgramovy věty, což dává tvrzení. □

Bez důkazu uvádíme následující důležitou větu z funkcionální analýzy:

Věta 2.1.16 (Fredholmova alternativa) *Buď H Hilbertův, a $K : H \to H$ lineární, kompaktní, omezený. Pak*

$$\begin{array}{ll} (i) & N(I-K) \quad \text{je konečnědimenzionální} \\ (ii) & \mathbb{R}(I-K) \quad \text{je uzavřený} \\ (iii) & \mathbb{R}(I-K) = N(I-K^\star)^\perp \\ (iv) & N(I-K) = \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{R}(I-K) = H \\ (v) & \dim N(I-K) = \dim N(I-K^\star) \end{array}$$

Fredholmova alternativa: Buď $Kh - h = f$ v H má řešení pro každé $f \in H$ nebo $\exists$ netriviální řešení $Kh = h$.

Věta 2.1.17 (2. existenční) (i) *Buď $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists!$ (slabé) řešení*

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad v\ \Omega \\ u &= 0 \quad na\ \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.17}$$

nebo existuje netriviální (slabé) řešení úlohy

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \quad v\ \Omega \\ u &= 0 \quad na\ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.18}$$

(ii) *Existuje-li netriviální (slabé) řešení úlohy (2.18), označíme $N \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ množinu jejích řešení a dále $N^\star \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ množinu řešení adjungované úlohy*

$$\begin{aligned} L^\star v &= 0 \quad v\ \Omega \\ v &= 0 \quad na\ \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.19}$$

Platí: dimenze N je konečná a rovná se dimenzi $N^\star$.
(iii) *Pro dané $f \in L^2(\Omega)$ má úloha (2.17) řešení $\Leftrightarrow (f, v)_2 = 0\ \forall v \in N^\star$.*

<u>*Důkaz*</u>. (i) Volme γ jako v Lemmatu 2.1.14. Definujme

$$a_\gamma(u,\varphi) \equiv a(u,\varphi) + \gamma(u,\varphi)$$

odpovídající operátoru

$$L_\gamma u = Lu + \gamma u.$$

Dle věty 2.1.15. $\Rightarrow \forall g \in L^2(\Omega)$ $\exists!$ slabé řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ splňující

$$a_\gamma(u,\varphi) = (g,\varphi)_2 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{2.20}$$

Označme $u = L_\gamma^{-1} g$, platí-li mezi u a g vztah (2.20).
(ii) Platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned} & u \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad \text{řeší (2.17)} \\ \Leftrightarrow\quad & a_\gamma(u,\varphi) = (\gamma u + f, \varphi) \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \Leftrightarrow\quad & u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f) \\ \Leftrightarrow\quad & u - Ku = h, \quad \text{kde } Ku \equiv \gamma L_\gamma^{-1} u \text{ a } h \equiv L_\gamma^{-1} f \end{aligned}$$

(iii) Tvrdíme: $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ je omezený, lineární, kompaktní (K je γ–násobek L_γ^{-1}, a L_γ^{-1} řeší (2.20)). Víme:

$$\frac{\alpha}{2}\left\|u\right\|_{1,2}^2 \leq a_\gamma(u,u) = (g,u) \leq \left\|g\right\|_2 \left\|u\right\|_2 \leq c\left\|g\right\|_2 \left\|\nabla u\right\|_2 ,$$

což dává

$$\left\|u\right\|_{1,2} \leq \tilde{c}\left\|g\right\|_2 ,$$

tedy $L_\gamma^{-1} : L^2 \to W_0^{1,2}(\Omega)$, což je prostor, který je kompaktně vnořen do $L^2 \Rightarrow K$ je omezený, kompaktní.
(iv) Aplikuj obecné výsledky z FA. Mimo jiné víme:

$$u - Ku = h \quad \text{má řešení } \Leftrightarrow (h,v)_2 = 0 \ \forall \text{ řešení } v \text{ úlohy } K^\star v = v.$$

Počítejme

$$(h,v)_2 = \left(L_\gamma^{-1} f, c\right) = \frac{1}{\gamma}(Kf,v) = \frac{1}{\gamma}(f,K^\star v) = \frac{1}{\gamma}(f,v),$$

což dává (iii). □

Věta 2.1.18 (3. existenční věta) (i) *Existuje nejvýše spočetná množina* $\Sigma \subset \mathbb{R}$ *tak, že je ekvivalentní*

$$\lambda \notin \Sigma \Leftrightarrow \forall f \in L^2(\Omega)\ \exists! u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

řešící

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u + f \quad v\ \Omega \\ u &= 0 \quad na\ \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.21}$$

(ii) *Je–li* Σ *nekonečná, pak se* Σ *skládá z* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *s* $\lambda_k \to \infty$.

Definice 2.1.19 Σ *se nazývá (reálné) spektrum operátoru* L. *Poznamenejme: speciálně úloha*

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u \quad v\ \Omega \\ u &= 0 \quad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

má netriviální řešení $w \not\equiv 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Sigma$. *Pak* λ *je vlastní číslo* L *a* w *odpovídající vlastní vektor.*

Důkaz. (i) Volme γ jako v Lemmatu 2.1.14. Dle věty 2.1.15 lze předpokládat $\lambda > -\gamma$ (jinak víme, že (2.21) má jednoznačné řešení). Lze též předpokládat, že $\gamma > 0$.

(ii) Dle Fredholmovy alternativy máme následující ekvivalence:

$$
\begin{aligned}
u \text{ řeší (2.21)} &\Leftrightarrow \exists \text{ jen triviální slabé řešení} \\
&\qquad \begin{cases} Lu &= \lambda u \text{ v } \Omega \\ u &= 0 \text{ v } \partial\Omega \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \text{ jen triviální slabé řešení} \\
&\qquad \begin{cases} L\gamma &= (\lambda+\gamma)u \text{ v } \Omega \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \ \text{ úloha } u = L_\gamma^{-1}((\lambda+\gamma)u) = \frac{\gamma+\lambda}{\gamma} Ku \text{ má jen nulové řešení} \\
&\Leftrightarrow \frac{\gamma}{\gamma+\lambda} \text{ není vlastním číslem operátoru } K
\end{aligned}
$$

(iii) Nyní FA $\Rightarrow$ K má nejvýš spočetně mnoho vlastních čísel hromadících se k $\{0\}$, avšak $\frac{\gamma}{\gamma+\lambda_k} \to 0 \Leftrightarrow \lambda_K \to \infty$ □

Věta 2.1.20 (omezenost inverze) *Jestliže $\lambda \notin \Sigma$, pak existuje C tak, že*

$$\|u\|_2 \leq C \|f\|_2 \tag{2.22}$$

kdykoliv $f \in L^2(\Omega)$ a u je jediné slabé řešení úlohy (2.21).

Důkaz. Sporem: Pokud (2.22) neplatí, pak

$$\exists f_k \in L^2(\Omega) \text{ a } u_k \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ tak, že} \begin{cases} Lu_k &= \lambda u_k + f_k \text{ v } \Omega \\ u &= 0 \text{v} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

a

$$\left.\begin{aligned} \|u_k\|_2 > k\|f_k\|_2 \\ \|u_k\|_2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad f_k \to 0 \text{ silně v } L^2(\Omega)$$

$$\left.\begin{aligned} \{u_k\} \text{ omezená ve } W_0^{1,2}(\Omega) \\ \text{(z apriorních odhadů)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \quad \text{ve } W^{1,2} \\ u_k &\to u \quad \text{silně v } L^2 \end{aligned}$$

Pak u řeší

$$
\begin{aligned}
Lu &= \lambda u \quad \text{v } \Omega \\
u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Protože $\lambda \notin \Sigma \Rightarrow u \equiv 0$ ale $\|u\|_2 = 1$. □

2.1.3 Regularita slabého řešení

Uvědomme si nejdříve, že věta o existenci jediného slabého řešení úlohy

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+bu &= f && \text{v } \Omega\subseteq\mathbb{R}^d\\
u &= u_0 && \text{na } \Gamma_1\\
\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma u &= g && \text{na } \Gamma_2\cup\Gamma_3\\
a_{ij}, b\in L^\infty(\Omega), \sigma\in L^\infty(\Gamma_3)&\\
b\geq 0 \text{ v } \Omega, \sigma\geq 0 \text{ na } \Gamma_3, \sigma=0 \text{ na } \Gamma_2&\\
\exists\alpha>0: a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\alpha|\xi|^2 \quad \forall x\in\Omega \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^d&
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

platí za slabších předpokladů na data z úlohy, tj. na u_0, f, g.
Připomeň:

$$
\begin{aligned}
V &\equiv \text{ uzávěr } \{\varphi\in C^1(\bar{\Omega}); \varphi=0 \text{ na } \Gamma_1\} \text{ ve } W^{1,2}(\Omega),\\
W &\equiv \left\{\varphi\in W^{1,2}(\Omega); \oint_\Omega \varphi\,\mathrm{dx}=0\right\}.
\end{aligned}
$$

Uvaž podmínky:

(i) $\Gamma_1\ldots$ neprázdná množina

(ii) $b>0$ na $H\subset\Omega, |H|_d>0$

(iii) $\sigma>0$ na $\Gamma_H\subset\Gamma_3, |\Gamma_H|_{d-1}>0.$

Zobecněním věty 2.1.9 je následující věta

Věta 2.1.21 (α) *Nechť*

$$g\in\left(W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)\right)^\star, f\in V^\star, u_0\in W^{\frac12,2}(\Gamma_1).$$

a nechť jedna z podmínek (i) — (iii) *platí. Pak* $\exists! u\in W^{1,2}(\Omega)$ *tak, že*

$$
\begin{aligned}
&u-\tilde{u}_0\in V \quad (\tilde{u}_0 \textit{ je rozšíření } u_0 \textit{ na } \Omega)\\
&((u,\varphi)) = \langle f,\varphi\rangle_{V^\star,V}+\langle g,\varphi\rangle_{(W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3))^\star} \quad \forall\varphi\in V.
\end{aligned}
$$

(β) *Je–li* Γ_1 *prázdná,* $b_1\equiv 0$ *v* Ω *a* $\sigma\equiv 0$ *na* $\partial\Omega$ *a pokud*

$$\langle f,1\rangle_{(W^{1,2}(\Omega))^\star}+\langle g,1\rangle_{(W^{\frac12,2}(\partial\Omega))^\star}=0,$$

pak $\exists! u\in W$ *splňující*

$$((u,\varphi)) = \langle f,\varphi\rangle_{(W^{1,2}(\Omega))^\star}+\langle g,\varphi\rangle_{(W^{\frac12,2}(\partial\Omega))^\star} \quad \forall\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$$

<u>*Důkaz*</u>. Je–li $u_0 \in W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_1)$, pak existuje právě jedno rozšíření $\tilde{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ tak, že $\tilde{u}_0 = u_0$ na Γ_1 ve smyslu stop. Nalezení u je (srovnej s důkazem věty 2.1.9.) ekvivalentní nalezení $\omega \in V$ tak, že

$$((\omega, \varphi)) = ((-\tilde{u}_0, \varphi)) + \langle f, \varphi \rangle_{V^\star} + \langle g, \varphi \rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2 \cup \Gamma_3)} \equiv \langle F, \varphi \rangle$$

Protože

$$((\omega, \varphi)) \overset{df.}{\equiv} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \,\mathrm{dx} + \int_\Omega b \omega \varphi \,\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_3} \sigma \omega \varphi \,\mathrm{ds}$$

je omezená, bilineární, V–eliptická forma a $F \in V^\star$ (ověř!), Lax–Milgramova věta dává tvrzení (α). V případě Neumanovy úlohy (viz. (β)) postupujeme podobně (srovnej s větou 2.1.13.). □

Teorie regularit slabého řešení hledá odpověď na následující otázku: Nechť jsou data úlohy hladší (lepší) než požaduje existenční věta, je pak slabé řešení také hladší?

Pro lineární eliptické (a také parabolické) úlohy je odpověď *kladná*, teorie je však technicky komplikovaná. Proto se omezíme na jednodušší situaci, kdy $\Omega = \mathbb{R}^d$. Tzn., studujeme úlohu "bez hranice":

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu = f \quad \text{v } \mathbb{R}^d \tag{2.24}$$

Dokažte si větu (použijte větu 2.1.21):

Věta 2.1.22 *Nechť* $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^d), b \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \geq 0,\ a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$. *Je–li* $f \in (W^{1,2}(\mathbb{R}^d))^\star$, *pak* $\exists! u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ *takové, že*

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} bu\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle_{(W^{1,2}(\Omega))^\star} \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d). \tag{2.25}$$

Nyní předpokládejme, že data jsou hladší, tj.

$$a_{ij} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d), b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d) \quad \text{a } f \in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{2.26}$$

Je pak slabé řešení $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$?

Věta 2.1.23 *Nechť* a_{ij}, b *a* f *splňují (2.26). Pak jednoznačně definované slabé řešení* $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ *úlohy (2.24) patří do* $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ *a platí*

$$\|u\|_{2,2} \leq C\,\|f\|_2\,. \tag{2.27}$$

<u>*Důkaz*</u>. 1. Formální. Označ pro pevné $l \in \{1, 2, \ldots, d\} : Z' \equiv \frac{\partial Z}{\partial x_l}$ pro funkci Z. Derivujme rovnici (2.24) dle $x_l : \left(\frac{\partial}{\partial x_l}(2.24)\right) \Rightarrow$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u'}{\partial x_j}\right) + bu' = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a'_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - b'u + f'. \tag{2.28}$$

Násob (2.28) u', integruj přes $\mathbb{R}^d$ a užij integraci per–partes (Greenova věta). Dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}\frac{\partial u'}{\partial x_j}\frac{\partial u'}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} + \int_{\mathbb{R}^d} b(u')^2\,\mathrm{dx} = \\ = -\int_{\mathbb{R}^d} a'_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u'}{\partial x_i} - \int_{\mathbb{R}^d} b'uu'\,\mathrm{dx} + \int_{\mathbb{R}^d} f'u'\,\mathrm{dx} \tag{2.29}$$

Protože u je slabé řešení, tak

$$\|u\|_{1,2} \le C\,\|f\|_2\,. \tag{2.30}$$

Levá strana (2.29): podmínka elipticity $+b \ge 0 \Rightarrow$ LS(2.29)$\ge \alpha\,\|\nabla u'\|_2^2$
Pravou stranu (2.29) nejdříve upravíme: $\int f'u'\,\mathrm{dx} = -\int fu''\,\mathrm{dx}$ a pak odhadujeme

$$|\text{PS }(2.29)| \le \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ i,j=1,\dots,d}} |a'_{ij}(x)|\,\|\nabla u\|_2\,\|\nabla u'\|_2 + \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|b'|\,\|u\|_2\,\|u'\|_2 + \\ + \|f\|_2\,\|u''\|_2 \le C\,\|f\|_2\,\|\nabla u'\|_2 + C\,\|f\|_2^2 + \|f\|_2\,\|\nabla u'\|_2 \le \tilde{C}\,\|f\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\,\|\nabla u'\|_2^2\,. \tag{2.31}$$

Dáme–li dolní odhad LS (2.29) dohromady s horním odhadem PS (2.29) obdržíme

$$\alpha\,\|\nabla u'\|_2^2 \le C\,\|f\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\,\|\nabla u'\|_2^2\,,\text{což implikuje (2.27).}$$

□

Tento důkaz je formální (nesprávný), neboť vycházel z klasické formulace úlohy. My však nevíme, že slabé řešení $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ splňuje rovnici (2.24) skoro všude (či bodově) v $\mathbb{R}^d$. Musíme tedy k důkazu vyjít ze slabé formulace (2.25).

Důkaz. 2. Rigorózní. Věta A.3.92 říká

$$u \in W^{1,2} \equiv u \in L^2 \& \frac{1}{|h|}\,\|r_h u - u\|_2 \le C < \infty \quad \forall |h| \le h_0.$$

Chceme ukázat, že $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$. K tomu stačí (neboť $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla u(x+he^i) - \nabla u(x)|^2}{|h|^2}\,\mathrm{dx} \le C\,\|f\|_2^2 \quad \forall i = 1,2,\dots,d, \tag{2.32}$$

kde vektor $e^i = (0,\dots,1,0\dots)$ je i-tý vektor Euklidovské báze v $\mathbb{R}^d$.

Tvrzení (2.27) pak plyne z věty A.3.92 a ze skutečnosti, že

$$v_K \rightharpoonup v \text{ v } X \text{ (reflexivní, Banach) } \Rightarrow \|v\|_X \le \liminf_{K\to\infty}\|v_K\|_X\,.$$

Označme $\Delta^h u(x) = u(x+he^i) - u(x)$, kde i je pevné. Protože $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, tak $\Delta^h u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$.

Označ $r_{-h}\varphi = \varphi(x - he^i)$. Je–li $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow r_{-h}\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ a můžeme ji použít jak testovací funkci v (2.25). Po substituci dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}(x + he^i)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x + he^i)\,\mathrm{dx} + \int_{\mathbb{R}^d} b(x + he^i)u(x + he^i)\varphi(x)\,\mathrm{dx} = \\ = \int_{\mathbb{R}^d} f(x + he^i)\varphi(x). \quad (2.33)$$

Nyní od (2.33) odečteme (2.25) a do výsledku dosadíme za $\varphi := \Delta^h u$. Po úpravách dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}\frac{\partial\Delta^h u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\Delta^h u(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} + \int_{\mathbb{R}^d} b(x)|\Delta^h u(x)|^2\,\mathrm{dx} = \\ = -\int_{\mathbb{R}^d}[a_{ij}(x + he^i) - a_{ij}(x)]\frac{\partial u(x + he^i)}{\partial x_j}\frac{\partial\Delta^h u(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} - \\ - \int_{\mathbb{R}^d}(b(x + he^i) - b(x))u(x + he^i)\Delta^h u(x)\,\mathrm{dx} + \\ + \int_{\mathbb{R}^d}[f(x + he^i) - f(x)]\Delta^h u(x)\,\mathrm{dx}. \quad (2.34)$$

Substitucí upravme poslední člen na tvar

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\Delta^{-h}(\Delta^{+h}u(x))\,\mathrm{dx} = \\ = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)[u(x + he^i) - 2u(x) + u(x - he^i)]\,\mathrm{dx}.$$

Podělme výslednou rovnici h^2. Protože $\frac{\Delta^h u}{h} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)\ \forall h$, plyne z věty A.3.92, že $(g = 1/h\Delta^h u)$

$$\frac{1}{h}\left\|\Delta^{-h}\left(\frac{\Delta^h u}{h}\right)\right\|_2 = \frac{1}{h}\left\|\Delta^{-h}g\right\|_2 \le c\left\|\nabla g\right\|_2 = c\left\|\nabla\frac{\Delta^h u}{h}\right\|_2.$$

Tak poslední člen v (2.34) je odhadnut shora členem

$$c\left\|f\right\|_2\left\|\nabla\frac{\Delta^h u}{h}\right\|_2.$$

Ostatní členy v (2.34) jsou odhadnuty podobně (= stejně) jako ve formálním důkazu. Např. levá strana (2.34):

$$\mathrm{LS}(2.34) \ge \alpha\left\|\nabla\frac{\Delta^h u}{h}\right\|_2 \quad \text{atd.}$$

Nerovnost (2.32) je dokázána. □

Máme–li úlohu v omezené oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, pak postupujeme podobně (nikoliv stejně): *musíme však dávat pozor, aby hodnoty $u(x + he^i)$ byly definovány.* To vede k rozdělení úlohy na zkoumání regularity

1. Vnitřní. Necítí hraniční podmínky, citlivá jen na koeficienty rovnice a f. Odhady se provádí na podoblasti množiny Ω a závisí na vzdálenosti této podoblasti od $\partial\Omega$.
2. Hraniční. Ta se dále dělí na regularitu derivací v tečných směrech (podél hranice) a regularitu derivací v normálových směrech.

Příkladem věty o vnitřní regularitě je následující tvrzení:

Věta 2.1.24 *Buď Ω omezená oblast. Nechť $u \in W^{1,2}(\Omega)$ splňuje*

$$\int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega bu\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.35}$$

Nechť $f \in L^2(\Omega), a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega), b \in W^{1,\infty}(\Omega), b \geq 0$. Pak $\forall \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$

$$\|u\|_{2,2,\Omega'} \leq C(\Omega')\, \|f\|_{2,\Omega}$$

__Důkaz__. Buď $\xi \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \equiv 1$ na $\Omega', 0 \leq \xi \leq 1$. Polož místo φ v (2.35) $\varphi\xi^2$ a přepiš (2.35) pro veličinu $w = u\xi$, pak w rozšiř 0 vně Ω a vše lze chápat na $\mathbb{R}^d$ a užít větu 2.1.23. Přesněji, pokud $u \in W^{1,2}(\Omega)$ řeší

$$\int_\Omega \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + bu\varphi \right) \mathrm{dx} = \int_\Omega f\varphi\, \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g\varphi\, \mathrm{ds}, \tag{2.36}$$

pak vezmeme–li za φ v (2.36) $\varphi\xi^2$, kde $\xi \equiv 1$ v Ω', $\xi \in \mathcal{D}(\Omega), \xi(x) \in \langle 0, 1\rangle$, dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[a_{ij} \frac{\partial(u\xi)}{\partial x_j} \frac{\partial(\varphi\xi)}{\partial x_i} + b(u\xi)(\varphi\xi) \right] \mathrm{dx} = \\ &= \int_\Omega (f\xi)(\varphi\xi)\, \mathrm{dx} - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} u \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right) \varphi\xi\, \mathrm{dx} - \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \varphi\xi \end{aligned} \tag{2.37}$$

Dodefinujeme–li $a_{ij}, b, f, \varphi\xi, u\xi$ vně Ω nulou a označíme–li $w = u\xi, \psi = \varphi\xi$ a $g \equiv f\xi - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} u \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right) - a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_i}$, dostáváme z (2.36)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + bw\psi \right] = \int_{\mathbb{R}^d} g\psi\, \mathrm{dx} \quad \forall \psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d),\ \mathrm{supp}\ \psi \subseteq \overline{\Omega}_0.$$

Nyní lze s úspěchem využít větu 2.1.23. □

Mluvíme–li o globální regularitě (tj. vnitřní i hraniční dohromady), pak platí následující tvrzení:

Věta 2.1.25 *Nechť Ω je třídy $C^{k-1,1}, k \geq 2$. Buď $a_{ij} \in W^{k-1,\infty}(\bar{\Omega}), b \geq 0, a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$. Buď $u_0 \in W^{k-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ a $f \in W^{k-2,2}(\Omega)$. Pak u, jediné slabé řešení Dirichletovy úlohy*

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + bu &= f \quad v\ \Omega \\ u &= u_0 \quad na\ \partial\Omega, \end{aligned}$$

patří do $W^{k,2}(\Omega)$ *a platí*

$$\|u\|_{k,2\Omega} \le C\left(\|f\|_{k-2,2,\Omega} + \|u_0\|_{k-\frac{1}{2},2,(\partial\Omega)}\right)$$

Bez důkazu.

Poznámka 2.1.26

- *Je–li* $d = 3$ *pak z věty A.3.59 o spojitém vnoření dostáváme* $u \in C^{2,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$ *(pro* $k = 4$*). Tedy* u *je klasickým řešením původní úlohy.*
- *Pro Neumannův problém platí podobná věta:*

$$g \in W^{k-\frac{3}{2},2}(\partial\Omega) \Rightarrow u \in W^{k,2}(\Omega), \quad k \ge 2$$

- *Pro smíšenou úlohu: pozor!! Singularita může vzniknout na přechodu mezi* Γ_2 *a* Γ_1 *apod.*

2.1.4 Spektrum symetrického lineárního operátoru

Motivace: Fourierova metoda pro smíšený parabolický problém. Formálně: hledejme řešení úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu = 0 \quad \text{v } Q_T = (0,T)\times\Omega,$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \exists\alpha > 0 : a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha|\varphi|^2$$

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{na } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) &= u_0(x) && x\in\Omega \end{aligned} \tag{2.38}$$

ve tvaru $u(t,x) = v(x)h(t)$. Po dosazení dostaneme (hledáme netriviální řešení)

$$\frac{\dot{h}}{h} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - bv}{v}$$

Rovnost je možná jen jsou–li obě strany rovny konstantě $\Rightarrow$

$$\dot{h} = -\delta h \quad u_0(x) = h(0)v(x) \tag{2.39}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + bv = \delta v \quad \text{v } \Omega \quad v = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \tag{2.40}$$

(2.40) je úloha na spektrum. Dle věty 2.1.27 níže (viz též FA) existuje báze vlastních funkcí $\{v_i\}, v_i \in W_0^{1,2}$, odpovídajících vlastním číslům $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \quad \lambda_k \to \infty$.

Uvažujme úlohu (2.40) ve slabé formě: Hledáme $w^r \in W_0^{1,2}$ a $\lambda_r \in \mathbb{R}$ tak, že $(a_{ij} = a_{ji}, \exists\alpha > 0 : a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha|\xi|^2, b \ge 0)$

$$((w^r,\varphi)) = \lambda_r(w^r,\varphi) \quad \forall\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{2.41}$$

Věta 2.1.27 *Existuje spočetná množina* $\{\lambda_r\}_{r=1}^{\infty}$ *a vlastní vektory* $\{w^r\}_{r=1}^{\infty}$ *splňující (2.41) tak, že*

- $(w^r, w^s)_2 = \delta \quad \forall r, s \in N.$ *Také* $\left(\left(\frac{w^r}{\sqrt{\lambda_r}}, \frac{w^s}{\sqrt{\lambda_s}}\right)\right) = \delta_{rs}$
- $1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \dots$ *a* $\lambda_r \to \infty$ *pro* $r \to \infty$
- $\{w^r\}_{r=1}^{\infty}$ *tvoří bázi ve* $W_0^{1,2}(\Omega)$

Navíc, definujeme–li $H^N \equiv$ *lin. obal* $\{w^1, \dots, w^N\}$ *a* $P^N v \equiv \sum_{r=1}^{N}(v, w^r)w^r$ *dostáváme*

$$\left\|P^N\right\|_{\mathcal{L}(W^{1,2},W^{1,2})} \leq C \quad \left\|P^N\right\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq C.$$

2.1.5 Princip maxima pro slabá řešení

Tato část se týká výlučně skalárních rovnic. Víme–li, že řešení naší úlohy je hladké = regulární, pak lze využít vět o slabém a silném principu maxima zavedené v klasické teorii PDR. Cílem této části je ukázat, že slabý princip maxima platí i pro slabá řešení.

Uveďme si nejdříve tvrzení o složení hladkého zobrazení s funkcí ze Sobolevova prostoru a zajímavých důsledcích tohoto tvrzení.

Věta 2.1.28 *(i) Buď* $F \in C^1(\mathbb{R})$ *taková, že* $F' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$. *Je–li* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *pak* $F \circ w \in W^{1,p}(\Omega)$ *a platí*

$$\frac{\partial(F \circ u)}{\partial x_i} = (F' \circ u)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad s.v.\ v\ \Omega \tag{2.42}$$

(ii) Je–li $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *pak také* u^+, u^- *a* $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ *a platí*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & s.v.\ na\ \{u > 0\} \\ 0 & s.v.\ na\ \{u \leq 0\} \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & s.v.\ na\ \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & s.v.\ na\ \{u < 0\} \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u & s.v.\ na\ \{u > 0\} \\ 0 & s.v.\ na\ \{u = 0\} \\ -\nabla u & s.v.\ na\ \{u < 0\} \end{cases}$$

(iii) $\nabla u = 0 \quad s.v.\ na\ \{u = 0\}$

Důkaz. (i) Chceme ukázat že slabá derivace $F \circ u$ je L^p–integrovatelná a splňuje (2.42), tedy

$$-\int_{\Omega}(F \circ u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{\Omega}(F' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,\mathrm{dx} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.43}$$

$$\int_\Omega (F\circ u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (F\circ u_\varepsilon)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \tag{2.44}$$

kde $u_\varepsilon = u\star\mu_\varepsilon$ je regularizace. Užijeme–li skutečnosti, že $\frac{\partial(u_\varepsilon)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_\varepsilon$, tak máme

$$-\int_\Omega (F\circ u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (F\circ u_\varepsilon)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (F'\circ u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\varphi\,\mathrm{dx} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (F'\circ u_\varepsilon)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_\varepsilon\varphi\,\mathrm{dx} = \int_\Omega (F'\circ u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi\,\mathrm{dx}.$$

(ii) Aproximujeme nyní funkci u^+ funkcemi $F_\varepsilon\circ u$, kde

$$F_\varepsilon(r)\begin{cases}(\varepsilon^2+r^2)^{\frac12}-\varepsilon^2 & \text{pro } r>0\\ 0 & \text{pro } r\le 0.\end{cases}$$

Zřejmě $F_\varepsilon\circ u\to u^+$, $F'_\varepsilon(r) = \frac{r}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac12}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$ pro $r>0$, a $F'_\varepsilon\circ u\to 1$ na množině $\{x\in\Omega; u(x)>0\}$.
Dle části (i)

$$-\int_\Omega u^+\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (F_\varepsilon\circ u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\cap\{u>0\}}(F'_\varepsilon\circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,\mathrm{dx} = \int_{\Omega\cap\{u>0\}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,\mathrm{dx}.$$

Ostatní tvrzení jsou důsledkem vztahů

$$u^- = (-u)^+ \quad \text{a } |u| = u^+ + u^-.$$

(iii) $u = u^+ - u^-$ a $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$. Na množině $\{u=0\}$ jsou jak ∇u^+, tak ∇u^- rovny nule skoro všude. Tedy i $\nabla u = 0$ s.v. na $\{u=0\}$. □

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) &= 0 \quad \text{v } \Omega\\ u &= u_0 \quad \text{na } \partial\Omega.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Víme, že (za příslušných předpokladů) existuje právě jedno slabé řešení $u\in W^{1,2}(\Omega)$ této úlohy tak, že

$$u-\tilde u_0\in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{2.46}$$
$$\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} = 0 \quad \text{pro každé } \varphi\in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.47}$$

Zformulujme nyní hlavní tvrzení.

Věta 2.1.29 *Je–li u slabé řešení úlohy (2.45). Pak*

$$\|u\|_{\infty,\Omega} \le \|u_0\|_{\infty,\partial\Omega}\,. \tag{2.48}$$

<u>*Důkaz*</u>. Pokud $\|u_0\|_{\infty,\partial\Omega} = \infty$, tvrzení zřejmě platí. V opačném případě označme $M := \|u_0\|_{\infty,\partial\Omega}$. Chceme ukázat, že

$$-M \le u(x) \le M \quad \text{s.v. v } \Omega. \tag{2.49}$$

Protože $(u-M)^+$ je dle věty 2.1.28 prvkem $W^{1,2}(\Omega)$ a stopa této funkce je nulová vidíme, že $(u-M)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Lze ji tedy použít jako testovací funkci v (2.47). S pomocí (2.47) a (ii) ve větě 2.1.28 dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial (u-M)^+}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} = \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial (u-M)^+}{\partial x_j}\frac{\partial (u-M)^+}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} \ge \\ \ge \alpha\left\|\nabla(u-M)^+\right\|_2^2 \ge \tilde{\alpha}\left\|(u-M)^+\right\|_{1,2}^2, \end{aligned}$$

kde jsme využili eliptičnost a ekvivalenci norem na $W_0^{1,2}(\Omega)$. Odsud,

$$(u-M)^+ = 0 \quad \text{s.v. v } \Omega; \quad \text{neboli } u \le M \quad \text{s.v. v } \Omega.$$

Protože $-u$ řeší stejnou rovnici s okrajovou podmínkou $-u_0$, plyne z právě dokázaného

$$(-u-M)^+ = 0 \quad \text{s.v. v } \Omega; \quad \text{neboli } u \ge -M \quad \text{s.v. v } \Omega.$$

Nerovnosti v (2.49) jsou tedy dokázány. □

2.1.6 Souvislost s variačním počtem

V této sekci si nejdříve ukážeme, že slabé řešení úlohy (2.1) je zároveň minimizér jistého kvadratického funkcionálu za předpokladu, že matice $\mathbb{A}(\cdot)$ je symetrická, tj.

$$a_{ij} = a_{ji} \quad i,j = 1,\dots,d. \tag{2.50}$$

Poté zformulujeme základní větu variačního počtu a ukážeme několik dalších příkladů, jak lze tuto větu využít k důkazu existence slabého řešení nelineárních (eliptických) diferenciálních rovnic.

Definujeme funkcionál $\phi : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\phi(u) \equiv \frac{1}{2}B(u,u) - \langle F, u\rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} B(u,\varphi) &= \int_\Omega \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + bu\varphi\right)\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega}\sigma u\varphi\,\mathrm{ds} \\ \langle F,\varphi\rangle &= \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g\varphi\,\mathrm{ds} \end{aligned}$$

s úmluvou $g = 0$ na Γ_1 a $\sigma = 0$ na $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Věta 2.1.30 *Následující dva výroky jsou ekvivalentní:*

$$\begin{array}{llll} (1) & u - \tilde{u}_0 \in V & a\ B(u,\varphi) = \langle F, \varphi\rangle & \textit{pro každé } \varphi \in V \\ (2) & u - \tilde{u}_0 \in V & a\ \phi(u) \le \phi(u+h) & \textit{pro každé } h \in V. \end{array}$$

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Protože $B(u,h) = B(h,u)$ díky (2.50) a $B(h,h) \ge 0$ pro každé $h \in V$, přímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} \phi(u+h) &= \frac{1}{2}B(u+h, u+h) - \langle F, u+h\rangle = \\ &= \frac{1}{2}B(u,u) - \langle F, u\rangle + \frac{1}{2}(B(u,h) + B(h,u)) - \langle F, h\rangle + \frac{1}{2}B(h,h) = \\ &= \phi(u) + \frac{1}{2}B(h,h) \ge \\ &\ge \phi(u). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Protože u je minimizér, nutně

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(u+th)|_{t=0} = 0 \quad \text{pro každé } h \in V. \tag{2.51}$$

Přímý výpočet dává

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(u+th)|_{t=0} = B(u,h) - \langle F, h\rangle$$

a (1) je ověřeno. □

Definice 2.1.31 *Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachův (nebo normovaný vektorový) prostor. Řekneme, že funkcionál $\phi : X \to \mathbb{R}$ je* koercivní*, právě když*

$$\phi(u) \to \infty \quad \textit{pokud } \|u\|_X \to \infty. \tag{2.52}$$

Definice 2.1.32 *Buď X reflexivní Banachův prostor. Řekněme, že funkcionál $\phi : X \to \mathbb{R}$ je* slabě zdola polospojitý*, právě když*

$$\textit{Jestliže } u_n \rightharpoonup u \textit{ slabě v } X (n \to \infty), \textit{ pak } \phi(u) \le \liminf_{n\to\infty} \phi(u_n). \tag{2.53}$$

Následující věta je často nazývána základní věta variačního počtu. Je příkladem přísloví "Těžko v definici, lehce ve větě".

Věta 2.1.33 *Buď X reflexivní Banachův prostor. Nechť funkcionál $\phi : X \to \mathbb{R}$ je koercivní, slabě zdola polospojitý a zdola omezený. Pak existuje $u \in X$ tak, že*

$$\phi(u) \le \phi(v) \quad \forall v \in X \quad (\textit{u je minimizér}). \tag{2.54}$$

Důkaz. Označme

$$m := \inf_{v \in X} \phi(v). \tag{2.55}$$

Protože ϕ je zdola omezený, je $m > -\infty$. Z definice m plyne existence posloupnosti $\{v^n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tak, že

$$\lim_{n \to \infty} \phi(v^n) = m. \tag{2.56}$$

Protože ϕ je koercivní, existuje $R > 0$ (dostatečně velké) tak. že

$$(\forall n \in \mathbb{N})\, \|v^n\|_X \le R. \tag{2.57}$$

Z reflexivity X a z (2.57) plyne existence $u \in X$ tak, že

$$v^{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{slabě v } X \quad (k \to \infty) \tag{2.58}$$

alespoň pro vybranou podposloupnost $\{v^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{v^n\}_{n=1}^{\infty}$. Z výše uvedeného a ze slabé zdola polospojitosti funkcionálu ϕ vyplývá

$$m \le \phi(u) \le \liminf_{k \to \infty} \phi(v^{n_k}) = \lim_{k \to \infty} \phi(v^{n_k}) = m.$$

Odsud

$$m = \phi(u)$$

a u je minimizér. □

Příklad 2.1.34 *Z funkcionální analýzy víme (viz též poznámka 2.1.35 níže), že norma $\|\cdot\|_X$ v úplném normovaném prostoru je slabě zdola polospojitá. Speciálně tedy pro $p \in (1, \infty)$ je*

$$\phi(v) = \frac{1}{p} \|\nabla v\|_p^p - \int_\Omega fv\, dx = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla v|^p\, dx - \int_\Omega fv$$

slabě zdola polospojitý funkcionál na $W_0^{1,p}(\Omega)$. Protože

$$\begin{aligned}\int_\Omega fv \le \left| \int_\Omega fv \right| &\le \int_\Omega |fv|\, dx \le \|f\|_{p'} \|v\|_p \le \\ &\le c \|f\|_{p'} \|\nabla v\|_p \le \\ &\le \frac{1}{2p} \|\nabla v\|_p^p + \tilde{c} \|f\|_{p'}^{p'}, \quad \left(p' = \frac{p}{p-1}\right)\end{aligned}$$

je

$$\phi(v) \ge \frac{1}{2p} \|\nabla v\|_p^2 - \tilde{c} \|f\|_{p'}^{p'}$$

a ϕ je koercivní ve $W_0^{1,p}$ i zdola omezený. Dle věty 2.1.33, existuje $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tak, že

$$\phi(u) \le \phi(v) \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Nutně tedy

$$0 = \frac{d}{dt}\phi(u+th)|_{t=0} \quad \forall h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Přímým výpočtem zjišťujeme, že u *splňuje*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Tedy, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *je slabým řešením úlohy*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f \quad v\ \Omega \\ u &= 0 \quad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

Operátor $-\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ *se nazývá* p*–Laplaceův operátor; pro* $p = 2$ *se redukuje na lineární Laplaceův operátor* $-\Delta u$.

Poznámka 2.1.35 *Připomeňme následující tvrzení o oddělitelnosti:*
Buď $Y \subset\subset X$, X *Banachův. Nechť* $X_0 \in X - Y$. *Pak existuje jediný* $F \in X^\star$ *tak, že* $\|F\|_{X^\star} = 1, F = 0$ *na* Y *a* $F(X_0) =$ *dist* (X_0, Y). *Pomocí tohoto tvrzení ukážeme, že*

$$\textit{Jestliže } X_n \rightharpoonup X \textit{ slabě v } X, \textit{ pak } \|X\|_X \le \liminf_{n\to\infty} \|X_n\|_X . \tag{2.59}$$

<u>*Důkaz*</u>. Protože $X_n \rightharpoonup X$ slabě v X, tak pro každé $F \in X^\star$

$$\langle F, X_n\rangle \to \langle F, X\rangle \text{ a také } |\langle F, X_n\rangle| \to |\langle F, X\rangle|. \tag{2.60}$$

Také víme, že

$$|\langle F, X_n\rangle| \le \|F\|_{X^\star} \|X_n\|_X .$$

Odsud a z (2.60) dostáváme přechodem k lim inf

$$|\langle F, X\rangle| \le \|F\|_{X^\star} \liminf_{n\to\infty} \|X_n\|_X .$$

Dle tvrzení o oddělitelnosti, aplikované pro $Y = \{0\}$ a $X_0 = X$, víme, že existuje $F \in X^\star$ tak, že $\|F\|_{X^\star} = 1$ a $\langle F, X\rangle = \|X\|$. Dosazením do poslední nerovnosti dostáváme (2.59). □

2.1.7 Nelineární verze Lax–Milgramovy věty

Uvažujme obecnější nelineární diferenciální rovnici 2. řádu s pravou stranou $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(\cdot, u, \nabla u)) + a_0(\cdot, u, \nabla u) &= f \quad \text{v } \Omega \\ u &= u_0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.61}$$

kde sčítáme přes $i = 1, \dots, d$. Rovnici lze například získat z rovnováhy energie v klidu, kdy rychlost je nulová, vyjádřenou vztahem

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{q} + r = 0, \tag{2.62}$$

kde $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_d)$ reprezentuje tok tepla a r je zdroj tepla. Připouštíme zcela obecnou závislost q_i a r na poloze $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, teplotě u a jejím gradientu, tzn.

$$\begin{aligned} q_i(x) &= a_i(x, u(x), \nabla u(x)), \\ r(x) &= a_0(x, u(x), \nabla u(x)). \end{aligned}$$

Dosazením těchto konstitutivních vztahů do (2.62) získáme (2.61) s pravou stranou $f = 0$. Předpokládejme:

Pro $i = 0, 1, \dots, d$ jsou funkce $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
Carathéodoryho funkce tzn. (A1)

- pro všechno $z \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{R}^d$ jsou $a_i(\cdot, z, p)$ měřitelné v Ω,
- pro s.v. $x \in \Omega$ jsou $a_i(x, \cdot, \cdot)$ spojité v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

a

Existují $C_i > 0, i = 0, 1, \dots, d,$ tak, že pro s.v $x \in \Omega$
a pro všechna $x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^d |a_i(x, z, p)| \leq C_i(1 + |z| + |p|)$. (A2)

Zatímco předpoklad (A1) je dostatečně obecný, předpoklad (A2) výrazně omezil uvažovanou třídu nelinearit: všechny mají tzv. lineární růsty jak v u tak v ∇u. Předpoklad (A2) tak připouští nelineární funkce, ty však mají stejné růsty jako operátory studované v předchozím sekcích. Snadno si však čtenář vymyslí nelinearity s polynomiálními, logaritmickými, exponenciálními růsty.

Definice 2.1.36 (slabého řešení úlohy (2.61)) *Řekneme, že $u \in W^{1,2}$ je slabé řešení úlohy (2.61) jestliže*

- $u - \tilde{u}_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$
- $$\int_\Omega \left(a_i(x, u, \nabla u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x, u, \nabla u) \varphi \right) dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{2.63}$$

Předpokládáme, že (A1) a (A2) platí a $f \in L^2(\Omega)$.

Cvičení 2.1.37 *Ukažte, že za předpokladu (A1) a (A2) je*

$$\int_\Omega \left[a_i(x, u, \nabla u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x, u, \nabla u) \varphi \right] dx < \infty \quad \textit{pokud } u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Nyní je přirozeně zavést (nelineární!) $\tilde{T} : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ předpisem

$$\langle \tilde{T}u, \varphi \rangle = \left[a_i(\cdot, u, \nabla u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(\cdot, u, \nabla u)\varphi \right] \mathrm{dx} \tag{2.64}$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označuje dualitu mezi $\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^\star$ a $W_0^{1,2}(\Omega)$. Z cvičení plyne, že $\tilde{T} : W_0^{1,2}(\Omega) \to \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^\star$ je omezený.

Nyní zformulujeme nelineární variantu Lax–Milgramovy věty.

Věta 2.1.38 *Buď X Hilbertův a $T : X \to X$ je lipschitzovsky spojitý, tzn.*

$$(\exists M > 0)(\forall u, v \in X) \quad \|Tu - Tv\|_X \le M \|u - v\|_X , \tag{2.65}$$

a silně monotónní, tzn.

$$(\exists m > 0)(\forall u, v \in X) \quad (Tu - Tv, u - v)_X \ge m \|u - v\|_X^2 . \tag{2.66}$$

Pak pro každé $F \in X$ existuje právě jeden $u \in X$ tak, že

$$Tu = F. \tag{2.67}$$

Důkaz. Pozorujme nejdříve, že

$$m \|u - v\|_X^2 \le (Tu - Tv, u - v)_X \le \|Tu - Tv\|_X \|u - v\|_X \le M \|u - v\|_X^2$$

a tak $m \le M$. Bez újmy na obecnosti, lze předpokládat, že $m < M$. (Jinak M zvětšíme.) Pro $\varepsilon > 0$ a $F \in X$ libovolné definujme operátor $A : X \to X$ předpisem

$$Au \equiv u - \varepsilon(Tu - F). \tag{2.68}$$

Ukážeme–li, že A je kontrakce v X pak důkaz věty plyne z Banachovy věty o pevném bodu. Pro každé $u, v \in X$ však máme

$$\begin{aligned}
\|Au - Av\|_X^2 =& (u - v - \varepsilon(Tu - Tv), u - v - \varepsilon(Tu - Tv))_X = \\
=& (u - v, u - v)_X - 2\varepsilon(u - v, Tu - Tv)_X + \\
&+ \varepsilon^2 (Tu - tv, Tu - Tv)_X = \\
=& \|u - v\|_X^2 - 2\varepsilon(Tu - Tv, u - v)_X + \varepsilon^2 \|Tu - Tv\|_X^2 .
\end{aligned}$$

Využijeme–li lipschitzovskosti a silné monotonie T, dostaneme

$$\|Au - Av\|_X^2 \le (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 M^2) \|u - v\|_X^2$$

Funkce $g(\varepsilon) := 1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 M^2$ nabývá minima pro $\varepsilon = \frac{m}{M^2}$ a $g\left(\frac{m}{M^2}\right) = 1 - \frac{m}{M^2} < 1$. Zobrazení A je tedy kontraktivní a tvrzení věty 2.1.38 je dokázáno. □

Vraťme se k naší úloze (2.61). Větu 2.1.38 nelze využít přímo na operátor $\tilde{T}$, neboť ten nezobrazuje $W_0^{1,2}(\Omega)$ do sebe. Můžeme však využít Rieszovu větu a k $\tilde{T} \in \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^\star$ přiřadit $T(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tak, že

$$\langle \tilde{T}u, \varphi \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} = (Tu, \varphi)_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \tag{2.69}$$

a

$$\|Tu\|_{1,2} = \left\|\tilde{T}u\right\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star}. \tag{2.70}$$

K tomu, abychom ověřili, že $T : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ je lipschitzovský a silně monotónní, tedy stačí ukázat, že $\tilde{T} : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ je lipschitzovský a silně monotónní, tzn.

$$(\exists \tilde{M} > 0)(\forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)) \left\|\tilde{T}u - \tilde{T}v\right\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} \leq \tilde{M} \left\|u - v\right\|_{1,2,\Omega} \tag{2.71}$$

a

$$(\exists \tilde{m} > 0)(\forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)) \langle \tilde{T}u - \tilde{T}v, u - v \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} \geq \tilde{m} \left\|u - v\right\|_{1,2}^2. \tag{2.72}$$

Následující lemma dává postačující podmínky, kdy (2.71) a (2.72) platí.

Lemma 2.1.39 *(1) Jestliže*

$$\frac{\partial a_i}{\partial z} \text{ a } \frac{\partial a_i}{\partial p} \text{ jsou omezené v } \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \text{ pro } i = 0, 1, \dots, d, \tag{A3}$$

pak $\tilde{T}$ je lipschitzovsky spojitý.
(2) Jestliže platí

$$(\exists \alpha > 0)(s.v.\ x \in \Omega) \left(\forall \xi = (\xi_0, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}\right)$$
$$\sum_{\substack{i=0\\ j=1}}^{d} \left(\frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j + \frac{\partial a_i}{\partial z} \xi_i \xi_0 \right) \geq \alpha |\xi|^2, \tag{A4}$$

pak $\tilde{T}$ je silně monotónní.

Důkaz. Základem důkazu obou tvrzení je následující identita

$$
\begin{aligned}
\langle \tilde{T}u - \tilde{T}v, \varphi\rangle = &\int_\Omega \Big(\, [a_i(\cdot, u, \nabla u) - a_i(\cdot, v, \nabla v)] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right] + \\
&+ [a_0(\cdot, u, \nabla u) - a_0(\cdot, v, \nabla v)]\varphi \, \Big) \,\mathrm{dx} = \\
= &\int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}} a_i(\cdot, v + s(u-v), \nabla v + s\nabla(u-v)) \,\mathrm{ds}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \right.\\
&+ \left. \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}} a_0(\cdot, v + s(u-v), \nabla v + s\nabla(u-v)) \,\mathrm{ds}\, \varphi \right] \mathrm{dx} = \\
= &\int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial Z}(\dots)(u-v) \,\mathrm{ds}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \right.\\
&+ \left. \int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial p_l}(\dots) \frac{\partial (u_l - v)}{\partial x_l} \,\mathrm{ds}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] \mathrm{dx} + \\
&+ \int_\Omega \varphi \int_0^1 \left[\frac{\partial a_0}{\partial z}(\dots)(u-v) + \frac{\partial a_0}{\partial p_l}(\dots) \frac{\partial (u-v)}{\partial x_l} \right] \mathrm{ds}\,\mathrm{dx}.
\end{aligned}
$$

Zbytek důkazu je ponechán čtenáři. □

Věta 2.1.40 (existence, jednoznačnost a spojitá závislost na datech) *Nechť $f \in (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ a rozšíření $\tilde{u}_0$ hraniční podmínky u_0 splňuje*

$$\tilde{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega) \text{ a stopa } \tilde{u}_0 = u_0.$$

Nechť koeficienty $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňují (A1) — (A4)*. Pak existuje právě jedno slabé řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ úlohy (2.61), které splňuje (2.63). Navíc, existuje $C > 0$ tak, že*

$$\|u\|_{1,2} \le C \left[\|f\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} + \|\tilde{u}_0\|_{1,2,\Omega} \right]. \tag{2.73}$$

Důkaz. Nejdříve zavedeme operátor $\tilde{T} : W^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ vztahem (2.64). Cílem je ukázat existenci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tak, že

$$
\begin{aligned}
u - \tilde{u}_0 &\in W_0^{1,2}(\Omega) \\
\langle \tilde{T}(u), \varphi\rangle &= \langle f, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.74}
$$

Hledejme u ve tvaru $u = \tilde{u}_0 + w$, kde $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Definujme operátor $\tilde{S} : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ předpisem

$$\tilde{S}w = \tilde{T}(\tilde{u}_0 + w).$$

Ztotožníme–li $\tilde{S}$ s operátorem $S : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ a s $f \in (W^{1,2}(\Omega))^\star$ pomocí Rieszovy věty (viz. (2.69) — (2.70)) a užijeme–li lemma 2.1.39 a větu 2.1.38 dostáváme existenci a jednoznačnost úlohy

$$Sw = g \quad \text{v } (W^{1,2}(\Omega))^\star,$$

což dává tvrzení. Abychom dokázali (2.73), bereme nejdříve v (2.74) za $\varphi = u - \tilde{u}_0$ a pak k této rovnici přičteme $-\langle \tilde{T}(\tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0 \rangle$. Dostaneme

$$\langle \tilde{T}(u) - \tilde{T}(\tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0 \rangle = \langle f, u - \tilde{u}_0 \rangle - \langle \tilde{T}(\tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0 \rangle.$$

S využitím silné monotónie $\tilde{T}$ a lineárního růstu $a_i, i = 0, \ldots, d$, dostaneme

$$\|u - \tilde{u}_0\|_{1,2}^2 \leq C \left[\|f\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^*} + \|\tilde{u}_0\|_{1,2} \right] \|u - \tilde{u}_0\|_{1,2}.$$

Protože $u = u - \tilde{u}_0 + \tilde{u}_0$, (2.73) je dokázáno. □

2.2 Evoluční rovnice

V této části se budeme zabývat rovnicemi parabolického a hyperbolického typu. Protože tyto rovnice často popisují vývoj nějaké veličiny v čase, říká se jim též rovnice evoluční.

Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^d$ s hranicí $\partial\Omega$. Pro $T > 0$ označme časový interval $I \equiv (0, T)$ a množinu $Q_T \equiv I \times \Omega$ nazveme časoprostorový válec.

Pro dané funkce $a_{ij}, b_i, c : Q_T \to \mathbb{R} (i, j \in \{1, \ldots, d\})$ označíme symbolem $\mathcal{L}$ obecný lineární operátor 2. řádu

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{2.75}$$

Jestliže

$$(\exists C_1 > 0) \left(\forall \xi \in \mathbb{R}^d\right) (\text{s.v. } (t, x) \in Q_T) \left(a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \geq C_1|\xi|^2 \right) \tag{A1}$$

pak operátor $\mathcal{L}$ daný vzorcem (2.75) je eliptický (v souladu s předchozí kapitolou). Podmínka eliptičnosti může být zapsána i vektorovým způsobem (označíme $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^d$):

> Existuje $C_1 > 0$ tak, že pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^d$ a skoro všechna $(t, x) \in Q_T$ platí $\quad \xi^T \cdot \mathbb{A}(t, x)\xi \geq C_1|\xi|^2.$ (A1*)

Zaměříme se na dvě důležité úlohy.
(1) Pro dané funkce $f : Q_T \to \mathbb{R}, a_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ a $u_0 : (0, T) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ hledejme řešení $u : Q_T \to \mathbb{R}$ parabolické úlohy

$$\begin{aligned} \partial_t u + \mathcal{L}u &= f && \text{v } Q_T, && \text{(parabolická rovnice)} \\ u(0, \cdot) &= a_0 && \text{v } \Omega, && \text{(počáteční hodnota)} \\ u &= u_0 && \text{na } I \times \partial\Omega. && \text{(nehomogenní Dirichletova okrajová podmínka)} \end{aligned} \tag{P1}$$

(2) Pro dané funkce $f : Q_T \to \mathbb{R}$, $a_0, a_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ a $u_0 : (0,T) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ hledejme řešení $u : Q_T \to \mathbb{R}$ hyperbolické úlohy

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u + \mathcal{L}u &= f && \text{v } Q_T, && \text{(hyperbolická rovnice)} \\ u(0,\cdot) &= a_0 && \text{v } \Omega, && \text{(počáteční výchylka)} \\ u_t(0,\cdot) &= a_1 && \text{v } \Omega, && \text{(počáteční rychlost)} \\ u &= u_0 && \text{na } I \times \partial\Omega. && \text{(nehomogenní Dirichletova)} \\ &&&&& \text{okrajová podmínka)} \end{aligned} \tag{H1}$$

Při studiu evolučních rovnic má proměnná t postavení odlišné od prostorové proměnné x. Je–li totiž $v : Q_T \to \mathbb{R}$ a $t \in [0,T]$ pak symbol $v(t)$ označuje zobrazení

$$x \longmapsto v(t,x).$$

Tak pro (skoro) každé t je $v(t)$ prvkem nějakého prostoru funkcí (např. $L^p, \mathcal{C}^{k,\alpha}, W^{k,p}, \dots$). Zobrazení

$$t \longmapsto v(t)$$

pak zobrazuje I do tohoto prostoru funkcí. Prostory funkcí definovaných na I s hodnotami v nějakém Banachovu prostoru se nazývají *Bochnerovy prostory.* Základům této matematické teorie se věnujeme v appendixu (Sekce A.4).

Abychom dosáhli větší přehlednosti zápisu, zavedli jsme v (P1) a (H1) značení $\partial_t u \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$ a $\partial_{tt}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Existuje několik přístupů k vybudování matematických základů evolučních rovnic. Zde se zaměříme na tzv. metodu energetickou.

Energetické metodě budeme věnovat pozornost z několika důvodů: (i) metoda je založena na apriorních odhadech, které vycházejí v některých případech (např. pro rovnice pohybu kontinua) z bilance mechanické energie; (ii) jde o metodu konstruktivní, která tvoří vhodný základ pro numerické metody; (iii) klíčovým pojmem metody je pojem slabého řešení, je zde tedy přímá návaznost na výsledky předchozí kapitoly; (iv) myšlenky metody lze rozšířit i na nelineární úlohy.

V Sekci 2.2.1 aplikujeme energetickou metodu k řešení parabolického problému (P1), Sekce 2.2.2 je pak věnována hyperbolickému problému (H1). Kromě otázek existence, jednoznačnosti a spojité závislosti na datech se zaměříme na některé další kvalitativní vlastnosti řešení obou problémů. Pro (P1) uvedeme slabý princip maxima. U obou úloh budeme zkoumat otázku hladkosti řešení za předpokladu, že data jsou hladká. Uvidíme, že řešení parabolických úloh má zhlazující efekt (smoothing property). Ten pro (H1) neplatí, slabý princip maxima také ne.

2.2.1 Energetická metoda pro parabolické úlohy

Cílem této části je ukázat, že pro vhodně zvolená data existuje právě jedno slabé řešení úlohy (P1), které spojitě závisí na datech, splňuje slabý princip maxima, má navíc zhlazující vlastnost a pro řešení platí podobné výsledky o regularitě jako pro eliptické úlohy.

Zaveďme označení potřebné k definici slabého řešení. K operátoru $\mathcal{L}$ z (2.75) přiřadíme pro $t \in I$ operátor $A(t) : W^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ předpisem

$$\langle A(t)u, \varphi \rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)} \equiv \int_\Omega \left[a_{ij}(t,\cdot) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + b_i(t,\cdot) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi + c(t,\cdot) u \varphi \right] \mathrm{dx},$$

kde $u \in W^{1,2}(\Omega)$ a $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Na data úlohy (P1) klademe, kromě předpokladu elipticity (A1), následující požadavky:

(A2) $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(Q_T)$,

(A3) $f \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right)$,

(A3*) $f \in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)$,

(A4) $a_0 \in L^2(\Omega)$,

(A5) Existuje $\tilde{u}_0 \in L^2\left(I; W^{1,2}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right)$ s $\tilde{u}_0' \in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)$ tak, že pro s.v. $t \in I$ je stopa $\tilde{u}_0(t)$ shodná se stopou $u_0(t)$.

Lemma 2.2.1
Nechť jsou splněny předpoklady (A1) *a* (A2). *Pak existují $C_1, C_2, C_3 > 0$ tak, že pro každé $\varphi, u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \in W^{1,2}(\Omega)$ a pro skoro všechna $t \in I$ platí*

$$\langle A(t)u, u \rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)} \geq \frac{C_1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - \frac{C_2}{2} \|u\|_2^2, \tag{2.76}$$

$$\left| \langle A(t)v, \varphi \rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)} \right| \leq C_3 \|v\|_{1,2} \|\varphi\|_{1,2}. \tag{2.77}$$

<u>Důkaz</u>. Dle (A1)

$$\begin{aligned} C_1 \|\nabla u\|_2^2 \leq& \int_\Omega a_{ij}(t,\cdot) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{dx} = \\ &= \langle A(t)u, u \rangle - \int_\Omega \left[b_i(t,\cdot) \frac{\partial u}{\partial x_i} u + c(t,\cdot) u^2 \right] \mathrm{dx} \leq \\ &\leq \langle A(t)u, u \rangle + \max_i (\|b_i\|_\infty + \|c\|_\infty) \left[\|\nabla u\|_2 \|u\|_2 + \|u\|_2^2 \right] \leq \\ &\leq \langle A(t)u, u \rangle + \frac{C_1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{C_2}{2} \|u\|_2^2, \end{aligned}$$

kde pro zjednodušení nepíšeme indexy u dualit a díky Youngově nerovnosti máme

$$C_2 \equiv \left(2 \max_i (\|b_i\|_\infty + \|c\|_\infty) + \frac{1}{C_1} \max_i{}^2 (\|b_i\|_\infty + \|c\|_\infty) \right).$$

Odečtením $\frac{C_1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{C_2}{2} \|u\|_2^2$ od obou stran nerovnosti dostáváme (2.76). Nerovnost (2.77) je snadným důsledkem (A2) a Hölderovy nerovnosti. $\square$

Definice 2.2.2 *Nechť platí* (A1) — (A5)*. Funkce u je slabým řešením úlohy* (P1) *jestliže*

$$u - \tilde{u}_0 \in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), \tag{2.78}$$

$$u' \in L^2\left(I; W_0^{-1,2}(\Omega)\right), \tag{2.79}$$

$$u(0) = a_0, \tag{2.80}$$

a

$$\langle u'(t), \varphi\rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)} + \langle A(t)u(t), \varphi\rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)} = \\ = \langle f(t), \varphi\rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)} \\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \ \text{ a s.v. } t \in I. \tag{2.81}$$

Pozorujeme, že z (2.78) a (2.79) plyne dle Lemmatu A.4.4 (i), že

$$u \in \mathcal{C}\left(I; L^2(\Omega)\right).$$

Požadavek (2.80) spolu s předpokladem (A4) je tedy smysluplný. Rovnost (2.80) je však třeba pro slabé řešení dokázat spolu s jeho existencí a dalšími vlastnostmi.

Věta 2.2.3
Nechť platí (A1) — (A5) *a* $T \in (0, \infty)$ *je libovolné. Pak existuje právě jedno slabé řešení u úlohy* (P1)*, které navíc splňuje*

$$\sup_{t\in I} \|u(t)\|_2^2 + \int_0^T \|\nabla u(s)\|_2^2 \,\mathrm{ds} \leq C(T) \Bigg(\|a_0\|_2^2 + \int_0^T \|f(s)\|_{W^{-1,2}}^2 \,\mathrm{ds} + \\ + \sup_{t\in I} \|\tilde{u}_0(t)\|_2^2 + \int_0^T \left(\|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}^2 + \|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}^2 \right) \mathrm{ds} \Bigg). \tag{2.82}$$

Protože úloha (P1) je lineární, nerovnost (2.82) implikuje nejen jednoznačnost (jen nulová fce je řešením úlohy s nulovými daty), ale i spojitou závislost na datech ve vhodných normách.

Důkaz. Dokažme nejdříve nerovnost (2.82) za předpokladu, že u je slabé řešení. Zvolíme–li $\varphi = (u - \tilde{u}_0)(t)$ v (2.81) a přičteme–li k oběma stranám člen $- \langle \tilde{u}_0'(t), (u - \tilde{u}_0)(t)\rangle - \langle A(t)\mathbf{u}(t), (u - \tilde{u}_0)(t)\rangle$ dostáváme

$$\langle u' - \tilde{u}_0', u - \tilde{u}_0\rangle + \langle A(u - \tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0\rangle = \\ = \langle f, u - \tilde{u}_0\rangle - \langle \tilde{u}_0', u - \tilde{u}_0\rangle - \langle A\tilde{u}_0, u - \tilde{u}_0\rangle \tag{2.83}$$

Integrujeme–li (2.83) od 0 do t, užijeme–li (A.54) na první člen, (2.76) na druhý člen a odhadneme–li pravou stranu pomocí vztahu (2.77) a Poincarého nerovnosti, dostáváme

$$\frac{1}{2}\left\|u(t)-\tilde{u}_0(t)\right\|_2^2-\frac{1}{2}\left\|u(0)-\tilde{u}_0(0)\right\|_2^2+\frac{C_1}{2}\int_0^t\left\|\nabla(u-\tilde{u}_0)(s)\right\|_2^2\,\mathrm{ds}\leq$$
$$\leq\frac{C_2}{2}\int_0^t\left\|u(s)-\tilde{u}_0(s)\right\|_2^2\,\mathrm{ds}+$$
$$+\int_0^t\left(\|f(s)\|_{W^{-1,2}}+\|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}\right)\|\nabla(u-\tilde{u}_0)(s)\|_2\,\mathrm{ds}+$$
$$+C_3\int_0^t\|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}\,\|\nabla(u-\tilde{u}_0)(s)\|_2\,\mathrm{ds}. \quad (2.84)$$

Youngova nerovnost aplikovaná na členy s $\|\nabla(u-\tilde{u}_0)\|_2$ pak dává

$$\|u(t)-\tilde{u}_0(t)\|_2^2+\tilde{C}_1\int_0^t\|\nabla(u-\tilde{u}_0)(s)\|_2^2\,\mathrm{ds}\leq$$
$$\leq\|a_0-\tilde{u}_0(0)\|_2^2+C_2\int_0^t\|(u-\tilde{u}_0)(s)\|_2^2\,\mathrm{ds}+$$
$$+C\int_0^T\Big(\|f(s)\|_{W^{-1,2}}^2+\|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}^2+\|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}^2\Big)\,\mathrm{ds}. \quad (2.85)$$

Gronwallovo lemma A.4.6 (viz. appendix) použité pro $y(t)=\|u(t)-\tilde{u}_0(t)\|_2^2$ na nerovnost (2.85), kde vynecháme 2. člen, pak dává

$$\sup_{t\in I}\|u(t)-\tilde{u}_0(t)\|_2^2\leq e^{C_2T}\Bigg(\|a_0\|_2^2+\|\tilde{u}_0(0)\|_2^2+$$
$$+C\int_0^T\|f(s)\|_{W^{-1,2}}^2+\|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}^2+\|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}^2\,\mathrm{ds}\Bigg). \quad (2.86)$$

Podobný odhad dostaneme na člen $\int_0^T\|\nabla(u-\tilde{u}_0)\|_2^2\,\mathrm{ds}$ s tím, že vezmeme $t=T$ v (2.85) a první člen na pravé straně nerovnosti odhadneme pomocí (2.86)

$$\int_0^T\|\nabla(u-\tilde{u}_0)(s)\|_2^2\,\mathrm{ds}\leq C(T)\Bigg(\|a_0\|_2^2+\|\tilde{u}_0(0)\|_2^2+\int_0^T\|(u-\tilde{u}_0)(s)\|_2^2\,\mathrm{ds}+$$
$$+C\int_0^T\|f(s)\|_{W^{-1,2}}^2+\|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}^2+\|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}^2\,\mathrm{ds}\Bigg). \quad (2.87)$$

Nerovnost (2.82) pak dostaneme tak, že $\|u(t)\|_2^2=\|u(t)-\tilde{u}_0(t)+\tilde{u}_0(t)\|_2^2$ (totéž pro $\|\nabla u(s)\|_2^2$), užijeme $\triangle$–nerovnost, vztah (2.86), (2.87) a spojité vnoření $W\hookrightarrow\mathcal{C}\left(I;L^2(\Omega)\right)$, což umožňuje odhadnout $\|\tilde{u}_0(0)\|_2^2$ pomocí $\int_0^T(\|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}^2+$ $+\|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}^2)\,\mathrm{ds}$. Podrobnosti přenecháváme čtenáři.

Nyní se zaměříme na existenci řešení. Důkaz provedeme v několika krocích.

Krok 1. Galerkinův systém a jeho řešitelnost
Prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je separabilní. Existuje tedy spočetná báze $\{\omega^r\}_{r=1}^N$, kterou můžeme generovat prvky z $W_0^{1,2}(\Omega)$. Galerkinovy aproximace u^N jsou definovány vztahem

$$u^N(t,x) = \sum_{r=1}^{N} C_r^N(t)\omega^r(x) + \tilde{u}_0(t,x) \tag{2.88}$$

kde koeficienty $\mathbb{C}^N = (C_1^N, \ldots, C_r^N, \ldots, C_N^N)$ najdeme řešením systému N–obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\mathrm{d}u^N}{\mathrm{d}t}, \omega^r\right) + \left(A(t)u^N, \omega^r\right) = (f(t), \omega^r), \quad r = 1, \ldots, N, \\ &u^N(0) = \mathbb{P}^N a_0, \end{aligned} \tag{2.89}$$

kde $\mathbb{P}^N$ je ortogonální projektor z $L^2(\Omega)$ do $lin\{\omega^1, \ldots, \omega^N\}$. Závorky $(\cdot,\cdot)$ označují v (2.89) skalární součin v $L^2(\Omega)$. (Pokud předpokládáme (A3*) a ne (A3), pak je člen $(f(t), \omega^r)$ nahrazen členem $\langle f(t), \omega^r\rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)}$.)

Ačkoliv některé části důkazu lze provést pro obecnou bázi $\{\omega^r\}_{r=1}^N$, je výhodnější uvažovat bázi s lepšími vlastnostmi. Uvažujme nadále tedy bázi $\{\omega^r\}_{r=1}^N$, která je tvořena vlastními funkcemi Laplaceova operátoru s homogenní Dirichletovou podmínkou, tzn ω^r řeší

$$\begin{aligned} \Delta\omega^r &= \lambda_r\omega^r \quad && \text{v } \Omega, \\ \omega^r &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Takto lze sestrojit bázi, která je dle výsledků Sekce 2.4. ortonormální v $L^2(\Omega)$, ortogonální v $W_0^{1,2}(\Omega)$ a z výsledků o regularitě plyne hladkost funkcí ω^r v závislosti na hladkosti hranice $\partial\Omega$. (Je–li např. $\Omega = \mathcal{B}_R(0)$, pak $\omega^r \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.) Užijeme–li ortonormality $\{\omega^r\}_{r=1}^N$ a označíme–li $\mathbb{G} = (G_1, \ldots, G_N), \mathbb{C}_0 = (C_{01}, \ldots, C_{0N})$ a $\mathbb{A}(\mathbb{C}^N) = (A_1(\mathbb{C}^N), \ldots A_N(\mathbb{C}^N))$, kde

$$G_r := (f(t), \omega^r), C_{0r} := (a_0, \omega^r) \text{ a } A_r(\mathbb{C}^N) := (A(t)u^N(t), \omega^r),$$

pak (2.89) lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{C}}^N + \mathbb{A}(\mathbb{C}^N) &= \mathbb{G} \\ \mathbb{C}^N(0) &= \mathbb{C}_0 \end{aligned} \tag{2.91}$$

Samozřejmě závislost $\mathbb{A}$ na $\mathbb{C}^N$ je lineární, koeficienty matice však také závisejí na t.

Systém (2.91) resp. (2.89) splňuje Carathéodoryho podmínky a lokální existence jediného řešení je zřejmá. Existence globálního řešení plyne buď z linearity nebo z apriorních odhadů jak objasníme níže v Kroku 2.

Krok 2. Globální apriorní (energetické) odhady
Vynásobme r–tou rovnici v (2.89) koeficientem $C_r^N(t)$ a sečteme tyto rovnice

přes $r = 1, \ldots, N$. Dostaneme

$$\left(\frac{du^N}{dt}, u^N - \tilde{u}_0\right) + \left(Au^N, u^N - \tilde{u}_0\right) = \left(f, u^N - \tilde{u}_0\right). \tag{2.92}$$

Nechť nadále $\tilde{u}_0 \equiv 0$. Čtenář si může sám doplnit modifikace vzniklé přidáním členu $\tilde{u}_0$ (viz. též první část důkazu). Využijeme–li Lemma 2.2.1, pak (2.92) implikuje pro $f \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^N\right\|_2^2 + \frac{C_1}{2}\left\|\nabla u^N\right\|_2^2 &\leq \frac{C_2}{2}\left\|u^N\right\|_2^2 + \|f\|_2\left\|u^N\right\|_2 \leq \\ &\leq \frac{C_2+1}{2}\left\|u^N\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\|f\|_2^2\end{aligned} \tag{2.93}$$

S pomocí Gronwallova lemmatu pak dostaneme

$$\begin{aligned}\sup_{t\in I}\left\|u^N(t)\right\|_2^2 &\leq \left\|u^N(0)\right\|_2^2 e^{(C_2+1)T}\left(\int_0^T \|f(s)\|_2^2 e^{-(C_2+1)s}\,\mathrm{ds} + 1\right) \leq \\ &\leq \|a_0\|_2^2 e^{(C_2+1)T}\left(\int_0^T \|f(s)\|_2^2 e^{-(C_2+1)s}\,\mathrm{ds} + 1\right) =: K_1(a_0, f).\end{aligned} \tag{2.94}$$

Integrujeme–li (2.93) od 0 do T a užijeme–li (2.94) dostaneme

$$\int_0^T \left\|\nabla u^N(t)\right\|_2^2 \,\mathrm{dt} \leq \frac{C_2+1}{C_1}K_1(a_0,f)T + \frac{1}{C_1}\int_0^T \|f(s)\|_2^2\,\mathrm{ds} =: K_2(a_0,f). \tag{2.95}$$

Spočítejme odhad časové derivace. Nechť je $\varphi \in L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$. Pak platí

$$\begin{aligned}\left(\frac{du^N}{dt}, \varphi\right) &= \left(\frac{d}{dt}\mathbb{P}^N u^N, \varphi\right) = \left(\mathbb{P}^N \frac{du^N}{dt}, \varphi\right) = \left(\frac{du^N}{dt}, \mathbb{P}^N\varphi\right) = \\ &= \left(f, \mathbb{P}^N\varphi\right) - \left(Au^N, \mathbb{P}^N\varphi\right).\end{aligned}$$

Odtud a z (2.77) plyne

$$\left|\left(\frac{du^N}{dt}, \varphi\right)\right| \leq \|f\|_2\left\|\mathbb{P}^N\varphi\right\|_2 + C_3\left\|\nabla u^N\right\|_2\left\|\nabla(\mathbb{P}^N\varphi)\right\|_2. \tag{2.96}$$

Využijeme–li vlastnosti spojitého operátoru (projekce) $\mathbb{P}^N$ v $L^2(\Omega)$ i ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ a integrujeme–li (2.96) podle proměnné t od 0 do T, dostaneme

$$\int_0^T \left|\left(\frac{du^N}{dt}, \varphi\right)\right| \mathrm{dt} \leq C\int_0^T \|f\|_2\|\varphi\|_2\,\mathrm{dt} + \tilde{C}_3\int_0^T \left\|\nabla u^N\right\|_2\|\nabla\varphi\|_2\,\mathrm{dt}. \tag{2.97}$$

Užijeme–li nyní Hölderovu nerovnost s $p = p' = 2$ v čase na integrály napravo v (2.97), pak (2.95) implikuje

$$\int_0^T \left| \left(\frac{du^N}{dt}, \varphi \right) \right| \mathrm{dt} \le \left\{ C \left(\int_0^T \|f\|_2^2 \, \mathrm{dt} \right)^{\frac{1}{2}} + \tilde{C}_3 \sqrt{K_2(a_0, f)} \right\} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{1,2}^2 \, \mathrm{ds} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.98}$$

Uvědomíme-li si nyní, že platí $\left((L^p(I;X))^\star = L^{p'}(I;X^\star) \quad \text{kde} \quad p' = \frac{p}{p-1} \right)$, pak přechodem k sup přes φ z jednotkové koule v $L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ odvodíme

$$\left\| \frac{du^N}{dt} \right\|_{L^2(I;W^{-1,2}(\Omega))} = \left\| \frac{du^N}{dt} \right\|_{\left(L^2\left(I;W_0^{1,2}(\Omega)\right)\right)^\star} =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_{L^2\left(I;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \le 1} \frac{\left| \left\langle \frac{du^N}{dt}, \varphi \right\rangle_{L^2(I;W^{-1,2}(\Omega)), L^2\left(I;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \right|}{\|\varphi\|_{L^2\left(I;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}} \le K_3(a_0, f), \tag{2.99}$$

kde K_3 jsme označili složenou závorku ve výrazu (2.98).

Označíme–li $K = \max(K_1, K_2, K_3^2)$, pak můžeme shrnout získané stejnoměrné odhady do následující tabulky:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I} \left\| u^N(t) \right\|_2^2 &\le K, \\ \int_0^T \left\| \nabla u^N(t) \right\|_2^2 \mathrm{dt} &\le K, \\ \int_0^T \left\| \frac{du^N(t)}{dt} \right\|_{W^{-1,2}(\Omega)}^2 \mathrm{dt} &\le K. \end{aligned} \tag{2.100}$$

kde K buď závisí na $\|a_0\|_2$ a $\int_0^T \|f(t)\|_2^2 \, \mathrm{dt}$ nebo na $\|a_0\|_2$ a $\int_0^T \|f(t)\|_{W^{-1,2}}^2 \, \mathrm{dt}$ podle toho, zda předpokládáme (A3) či (A3*).

Speciálně, z (2.92) dostáváme, že pro všechna $t \in I$

$$\left| \mathbb{C}^N(t) \right|^2 \le K.$$

Není tedy možné, aby řešení vykázalo singularitu v čase dřívějším než T. Víme, tedy že systém (2.89) má pro každé N globálně (tj. na $(0, T)$ definované) jednoznačné řešení $\mathbb{C}^N$ (respektive u^N). Tato řešení navíc splňují stejnoměrné odhady (2.100).

Krok 3. Limitní přechod
Z (2.100) plyne existence podposloupnosti (kterou je zvykem označovat stejně jako původní posloupnost) vybrané z $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ a existence $u \in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right) \cap$

$L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ s $u' \in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)$ tak, že

$$\begin{aligned} u^N &\rightharpoonup u \quad \star\text{–slabě v} \quad L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right), \\ u^N &\rightharpoonup u \quad \text{slabě v} \quad L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), \quad \tilde{u}_0 \equiv 0 \\ \frac{du^N}{dt} &\rightharpoonup u' \quad \text{slabě v} \quad L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{2.101}$$

Vynásobme (2.89) uvažovanou v čase t hodnotou $h(t)$ funkce $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a integrujeme takto získanou identitu od 0 do T. Dostaneme nejen

$$\int_0^T \left\{ \left\langle \frac{du^N(t)}{dt}, \omega^r \right\rangle h(t) + \left\langle A(t)u^N(t), \omega^r \right\rangle h(t) - \langle f(t), \omega^r \rangle h(t) \right\} \mathrm{dt} \; = 0, \tag{2.102}$$

ale volbou $h \in \mathcal{D}((-\infty, T))$ také

$$\int_0^T \left\{ -(u^N(t), \omega^r) h'(t) + \left\langle A(t)u^N(t), \omega^r \right\rangle h(t) - \langle f(t), \omega^r \rangle h(t) \right\} \mathrm{dt} = \\ = (\mathbb{P}^N a_0, \omega^r) h(0). \tag{2.103}$$

Využijeme–li (2.101) lze snadno provést limitní přechod v (2.102) a (2.103) pro pevné ω^r a h. Dostaneme

$$\int_0^T \{ \langle u'(t), \varphi(t) \rangle + \langle A(t)u(t), \varphi(t) \rangle - \langle f(t), \varphi(t) \rangle \} \mathrm{dt} \; = 0 \\ \text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}; W_0^{1,2}(\Omega)\right) \tag{2.104}$$

a

$$\int_0^T \{ -(u(t), \varphi'(t)) + \langle A(t)u(t), \varphi(t) \rangle - \langle f(t), \varphi(t) \rangle \} \mathrm{dt} \; = (a_0, \varphi(0)) \\ \text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}\left((-\infty, T); W_0^{1,2}(\Omega)\right). \tag{2.105}$$

Je zřejmé, že (2.104) platí i pro $\varphi \in L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$, u je tedy slabé řešení a splňuje (2.81).

Krok 4. Nabývání počáteční podmínky
Zvolme v (2.104) speciálně $\varphi \in \mathcal{D}\left((-\infty, T); W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ a proveďme "integraci per partes v čase". Získáme

$$\int_0^T \{ -(u(t), \varphi'(t)) + (A(t)u(t), \varphi(t)) - \langle f(t), \varphi(t) \rangle \} \mathrm{dt} \; = (u(0), \varphi(0)) \\ \text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}((-\infty, T); W_0^{1,2}(\Omega)). \tag{2.106}$$

Porovnáme–li (2.106) a (2.105), dostáváme

$$(u(0) - a_0, \varphi(0)) = 0 \quad \forall \varphi(0) \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.107}$$

Odsud snadno nahlédneme, že

$$u(0) = a_0.$$

Věta 2.2.3 je dokázána. □

Následující věta a její důkaz nám ukáží jaké postupy se užívají při studiu hladkosti řešení parabolických rovnic. Zhruba řečeno kombinujeme dvě metody: (a) zlepšíme informaci o časové derivaci, kterou přesuneme do pravé strany a (b) užijeme výsledky o regularitě eliptických úloh z předchozí kapitoly. Protože tyto výsledky jsme zformulovali jen pro podtřídu operátorů (2.75), omezíme se na ně i v této části a budeme předpokládat, že

$$b_i = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad c \geq 0 \tag{2.108}$$

a

$$a_{ij}, c \quad \text{nezávisejí na } t. \tag{2.109}$$

Věta 2.2.4
Nechť je $\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$, a koeficienty a_{ij}, b_i a c splňují (2.108) a (2.109). Nechť u je slabé řešení úlohy (P1) *s $u_0 = 0$. Jestliže*

$$a_{ij},\ c \in W^{1,\infty}(\Omega) \tag{2.110}$$

a

$$a_0 \in W_0^{1,2}(\Omega) \ \text{ a } f \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right), \tag{2.111}$$

pak

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right) \cap L^2\left(I; W^{2,2}(\Omega)\right), \\ &u' \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right) \end{aligned} \tag{2.112}$$

a platí odhad u v normách těchto prostorů pomocí norem a_0 a f. Je–li navíc

$$a_0 \in W^{2,2}(\Omega) \ \text{ a } f' \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right), \tag{2.113}$$

pak

$$\begin{aligned} &u' \in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), \\ &u \in L^\infty\left(I; W^{2,2}(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{2.114}$$

Důkaz. Postup rozdělíme do čtyř kroků.
Krok 1. Zlepšení regularity u'.
Násobme r–tou rovnici (2.89) funkcí $\frac{d\,C_r^N(t)}{dt}$, získané rovnice sečtěme přes r od 1 do N. Dostaneme

$$\left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2 + \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{du^N}{dt}\right)\,\mathrm{dx} = \left(f, \frac{du^N}{dt}\right) - \int_\Omega c u^N \frac{du^N}{dt}\,\mathrm{dx}.$$

Využijeme–li symetrie matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ a pravou stranu odhadneme pomocí Schwarzovy, Hölderovy a nakonec Youngovy nerovnosti

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\partial u^N}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} \le C\left(\|f\|_2^2 + \left\|u^N\right\|_2^2\right)$$

Integrací této nerovnosti od 0 do t ($t \in (0,T]$), a použitím (A1) a $(2.89)_1$ získáváme

$$\int_0^T \left\|\frac{du^N}{dt}(s)\right\|_2^2 \mathrm{ds} + C_1\left\|\nabla u^N(t)\right\|_2^2 \le C\left(\left\|\nabla \mathbb{P}^N a_0\right\|_2^2 + \int_0^T \|f(s)\|_2^2\,\mathrm{ds} + 1\right),$$

což implikuje

$$\sup_{t\in I}\left\|\nabla u^N(t)\right\|_2^2 \le K, \tag{2.115}$$

a

$$\int_0^T \left\|\frac{du^N}{dt}(s)\right\|_2^2 \mathrm{ds} \le K. \tag{2.116}$$

Vzhledem k jednoznačnosti slabého řešení, vidíme, že u splňuje

$$\int_0^T \|u'(t)\|_2^2\,\mathrm{dt} \le K \text{ a } \sup_{t\in I}\|\nabla u(t)\|_2^2 \le K, \tag{2.117}$$

kde K závisí na $\|\nabla a_0\|_2$ a $\|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}$. Dva výroky o regularitě z (2.112) jsou tak dokázány.

Krok 2. První využití eliptické regularity.
Přepíšeme–li si (P1) do tvaru

$$Au(t) = f(t) - u'(t), \tag{2.118}$$

vidíme, že pravá strana je pro skoro všechna $t \in I$ v $L^2(\Omega)$. Z eliptické regularity pak plyne, že pro tato $t \in I$ je $u(t) \in W^{2,2}(\Omega)$ a navíc existuje $C > 0$ tak, že

$$\|u(t)\|_{2,2} \le C\left(\|f(t)\|_2 + \|u'(t)\|_2\right). \tag{2.119}$$

Odtud vyvodíme

$$u \in L^2\left(I; W^{2,2}(\Omega)\right). \tag{2.120}$$

Krok 3. Další využití regularity u'
Nyní nejdříve zderivujeme r–tou rovnici v (2.89) podle času, pak ji násobíme funkcí $\frac{d\,C_r^N(t)}{dt}$ a rovnice sečteme. Máme vztah

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2+\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x_j\partial t}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x_i\partial t}\,\mathrm{dx}=\int_\Omega f'\frac{du^N}{dt}\,\mathrm{dx}-\int_\Omega c\left|\frac{du^N}{dt}\right|^2\,\mathrm{dx}$$

Z (A1) a z odhadů pravé strany pak dostaneme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2+C_1\left\|\nabla\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2\le C\left(\|f'\|_2^2+\left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2\right). \tag{2.121}$$

Protože $\frac{du^N}{dt}(0)=-Au^N(0)+f(0)\in L^2(\Omega)$ dle předpokladů

$$\left(f\in L^2\left(I;L^2(\Omega)\right),f'\in L^2\left(I;L^2(\Omega)\right)\right)\Rightarrow f\in\mathcal{C}\left(I;L^2(\Omega)\right),$$

integrace (2.121) od 0 do t pak dává

$$\sup_{t\in I}\left\|\frac{du^N(t)}{dt}\right\|_2^2+\int_0^T\left\|\nabla\frac{du^N(t)}{dt}\right\|_2^2\,\mathrm{dt}\le K, \tag{2.122}$$

kde K závisí tentokrát i na $\|a_0\|_{2,2}$ a $\|f\|_{W^{1,2}(I;L^2(\Omega))}$. Stejnou úvahou jako v kroku 1. dostáváme $(2.114)_1$, tj.

$$u'\in L^\infty\left(I;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(I;W_0^{1,2}(\Omega)\right). \tag{2.123}$$

Krok 4. Druhé využití eliptické regularity
Podíváme–li se opět na (2.118) vidíme, že tentokrát je pravá strana v $L^\infty\left(I;L^2(\Omega)\right)$. Z (2.119) tak plyne $(2.114)_2$.
Věta 2.2.4 je dokázána. □

Poznámka 2.2.5 *Indukcí lze dokázat vyšší regularitu řešení za předpokladu, že data, koeficienty eliptického operátoru a $\partial\Omega$ jsou hladší. Navíc data musí splňovat tzv. podmínky kompatibility, zachycující odpovídající regularitu okrajových a počátečních podmínek v "rozích" časoprostorového válce.*

Poznámka 2.2.6 *Pokud tyto podmínky kompatibility nejsou splněny, nebo $a_0\in L^2(\Omega)$ a není lepší, pak lze ukázat, že slabé řešení je hladké v libovolném kladném čase (∞–rychlost šíření vln) není však hladké až do počátku.*

Poznámka 2.2.7 *Pro tyto rovnice platí principy maxima. Lze ověřit slabý princip maxima "testováním" u^+ resp. u^- analogicky jako pro eliptické rovnice.*

2.2.2 Energetická metoda pro hyperbolické rovnice

V této části se zaměříme na problém (H1). Platí zde podobné výsledky: existuje jediné slabé řešení, které je hladké pokud jsou hladká data. Žádný princip maxima však neplatí. K důkazu existence budeme požadovat silnější předpoklady na koeficienty lineárního operátoru $\mathcal{L}$ než v případě existence slabého řešení úlohy (P1): kromě (A1) budeme předpokládat

$$\begin{aligned} &a_{ij}, b_i, c \in W^{1,\infty} \quad (1 \leq i, j \leq d) \\ &a_{ij} = a_{ji} \end{aligned} \tag{AH1}$$

Definice 2.2.8 *(slabého řešení* (H1)*)*
Řekneme, že

$$u \in L^{\infty}\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right) \ \text{s}\ u' \in L^{\infty}\left(I; L^2(\Omega)\right) \ \text{a}\ u'' \in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right) \tag{2.124}$$

je slabým řešením problému (H1) *s* $u_0 = 0$ *jestliže platí*

$$\langle u''(t), \varphi\rangle + \langle A(t)u(t), \varphi\rangle = \langle f(t), \varphi\rangle \quad \text{pro s.v. } t \in I,\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{2.125}$$

$$u(0) = a_0 \quad \text{a} \quad u'(0) = a_1. \tag{2.126}$$

Pozorování 2.2.9 *Protože slabé řešení* (H1) *patří dle definice speciálně do prostoru* $W = \{u \in L^2(I; L^2(\Omega)), u' \in L^2(I; L^2(\Omega))\}$*, který je dle Lemmatu A.4.4 spojitě vnořen do* $\mathcal{C}(I; L^2(\Omega))$ *a prostor* $\tilde{W} = \left\{u \in L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), u'' \in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)\right\} \hookrightarrow \mathcal{C}\left(I; L^2(\Omega)\right)$*, má smysl požadovat, aby* $a_0, a_1 \in L^2(\Omega)$*. Budeme požadovat malinko více. Předpokládejme*

$$a_0 \in W_0^{1,2}(\Omega), a_1 \in L^2(\Omega) \ \text{a}\ f \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right). \tag{AH2}$$

Věta 2.2.10
Nechť $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ *a platí* (AH1), (A1), (AH2)*. Pak existuje právě jedno řešení úlohy* (H1) *s* $u_0 = 0$.

Důkaz. **Část I.** Jednoznačnost
Nechť u, v jsou dvě slabá řešení ke stejným počátečním podmínkám a k pravé straně f. Rozdíl $\omega = u - v$ pak splňuje (srovnej s (2.125) a (2.126))

$$\langle \omega''(t), \varphi\rangle + \langle A(t)\omega(t), \varphi\rangle = 0 \quad \text{pro s.v. } t \in I, \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.127}$$

a $\omega(0) = \omega'(0) = 0$. Cílem je ukázat, že

$$\omega(t) = 0 \quad \text{pro s.v. } t \in I. \tag{2.128}$$

Pokud bychom mohli za φ v (2.127) volit funkci $\omega'(t)$, byl by důkaz jednoduchý. Skutečně, z (2.127) s $\varphi = \omega'(t)$ totiž plyne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\omega'(t)\right\|_2^2 + \langle A(t)\omega(t), \omega'(t)\rangle = 0. \tag{2.129}$$

Poněvadž,

$$\langle A(t)\omega(t), \omega'(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle A(t)\omega(t), \omega(t)\rangle - \langle A'(t)\omega(t), \omega(t)\rangle ,$$

dosazením do (2.129) a integrací od 0 do t pak dostaneme

$$\left\|\omega'(t)\right\|_2^2 + C_1\left\|\nabla\omega(t)\right\|_2^2 \le \sup_{Q_T}\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A}\right| \int_0^t \left\|\nabla\omega(s)\right\|_2^2 \,\mathrm{ds}$$

a Gronwallovo lemma dává tvrzení.

Avšak tato argumentace není správná, neboť $\omega' \in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right)$, ale $\omega'(t) \notin W_0^{1,2}(\Omega)$ a nelze ji tedy vzít za testovací funkci v (2.127).

Postupujme opatrněji. Zvolíme $s \in (0, T]$ a definujme

$$v(t) := \begin{cases} \int_t^s \omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau & \text{je–li } 0 \le t \le s \\ 0 & \text{je–li } s < t \le T \end{cases} \qquad \forall t, s \in I.$$

Pak $v(t) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a pokud položíme $\varphi = v(t)$ v (2.127) a integrujeme výsledek od 0 do s dostaneme

$$\int_0^s \left\{\langle\omega''(t), v(t)\rangle + \langle A(t)\omega(t), v(t)\rangle\right\} \mathrm{dt} = 0. \tag{2.130}$$

Integrace per partes spolu s podmínkami $\omega'(0) = 0$ a $v(s) = 0$ vede ke vztahu

$$\int_0^s \left\{\langle\omega'(t), \omega(t)\rangle - \langle A(t)v'(t), v(t)\rangle\right\} \mathrm{dt} = 0. \tag{2.131}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\|\omega(s)\right\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{dx}\right) &= \\ = \int_0^s \int_\Omega \left[b_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial t} v + c\frac{\partial v}{\partial t} v - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] \mathrm{dx}\ \mathrm{dt}. \end{aligned}$$

Tedy ($v(s) = 0$), po integraci per partes v x–ové proměnné v prvním členu dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\|\omega(s)\right\|_2^2 + \frac{C_1}{2}\left\|\nabla v(0)\right\|_2^2 &\le \\ \le C\left\{\int_0^s \left\|\omega(t)\right\|_2 \left\|\nabla v(t)\right\|_2 + \left\|\omega(t)\right\|_2 \left\|v(t)\right\|_2 + \left\|\nabla v(t)\right\|_2^2 \,\mathrm{dt}\right\}. \end{aligned}$$

Zaveďme značení $U(t) := \int_0^t \omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Pak $v(0) = U(s)$ a dostáváme

$$\frac{1}{2}\|\omega(s)\|_2^2 + \frac{C_1}{2}\|U(s)\|_{1,2}^2 \le$$
$$\le C\left\{\int_0^s \left(\|U(s)-U(t)\|_{1,2}\|\omega(t)\|_2 + \|U(s)-U(t)\|_{1,2}^2\right)\mathrm{dt}\right\}.$$

S pomocí Schwartzovy nerovnosti pak dostaneme

$$\|\omega(s)\|_2^2 + C_1\|U(s)\|_{1,2}^2 \le$$
$$\le \tilde{C}\left(\int_0^s \left(\|U(t)\|_{1,2}^2 + \|\omega(t)\|_2^2\right)\mathrm{dt}\right) + 2\tilde{C}s\|U(s)\|_{1,2}^2$$

neboli

$$\|\omega(s)\|_2^2 + (C_1 - 2\tilde{C}s)\|U(s)\|_{1,2}^2 \le \tilde{C}\left(\int_0^s \left(\|U(t)\|_{1,2}^2 + \|\omega(t)\|_2^2\right)\mathrm{dt}\right).$$

Gronwallovo lemma implikuje jednoznačnost alespoň na intervalu $(0, T_1)$, kde $T_1 = \frac{C_1}{2\tilde{C}}$. Postupným pokrýváním intervalu $(0, T)$ intervaly délky T_1 dostaneme jednoznačnost řešení na $(0, T)$.

Část II. Existence

Postupujeme opět Galerkinovou metodou. Protože tato metoda byla podrobně diskutována při řešení úlohy (P1) omezíme se zde jen na hlavní rysy.

Krok 1. Uvažujme $\{\omega^r\}_{r=1}^\infty$ bázi v $W_0^{1,2}(\Omega)$ tvořenou vlastními funkcemi úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta\omega^r &= \lambda_r\omega^r && \text{v } \Omega \\ \omega^r &= 0 && \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

Pro $N \in \mathbb{N}$ pevné, hledejme koeficienty $C_k^N(t), k = 1, 2, \ldots, N$, tak, že

$$u^N(t,x) = \sum_{r=1}^N C_k^N(t)\omega^r(x)$$

řeší *Galerkinův systém*

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2u^N(t)}{dt^2}, \omega^r\right) + (A(t)u^N(t), \omega^r) = (f(t), \omega^r), \quad r = 1, 2, \ldots, N,& \\ C_r^N(0) = (a_0, \omega^r),& \\ \frac{dC_r^N}{dt}(0) = (a_1, \omega^r).& \end{aligned} \tag{2.132}$$

Tento systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic má řešení na $(0, T)$. (Lze také argumentovat tak, že lokální řešitelnost je zřejmá a globální plyne z apriorních odhadů níže.)

Apriorní odhady získáme tak, že r–tou rovnici $(2.132)_1$ násobíme $\frac{d\,C_r^N(t)}{dt}$, rovnice sečteme od $r = 1, \ldots, N$ a integrujeme výsledek v čase od 0 do t, $t \in (0,T]$. Standartním postupem vyvodíme

$$\max_{t\in\bar{I}} \left(\left\| \frac{du^N(t)}{dt} \right\|_2^2 + \left\| \nabla u^N(t) \right\|_2^2 \right) \le \\ \le C \left\{ \|a_0\|_{1,2}^2 + \|a_1\|_2^2 + \|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}^2 \right\} \quad (2.133)$$

Vyvodíme také

$$\left\| \frac{d^2u^N(t)}{dt^2} \right\|_{L^2(I;W^{-1,2}(\Omega))}^2 \le C < \infty. \quad (2.134)$$

Apriorní odhady (2.133) a (2.134) stačí k limitnímu přechodu. Existuje totiž

$$u \in L^\infty\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right) \text{ s } u' \in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right) \text{ a s } u'' \in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)$$

tak, že (aspoň pro podposloupnost)

$$u^N \rightharpoonup u \quad \star\text{–slabě} \quad \text{v} \quad L^\infty\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), \quad (2.135)$$

$$\frac{du^N}{dt} \rightharpoonup u' \quad \star\text{–slabě} \quad \text{v} \quad L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right), \quad (2.136)$$

$$\frac{d^2u^N}{dt^2} \rightharpoonup u'' \quad \text{slabě} \quad \text{v} \quad L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right), \quad (2.137)$$

Postupem stejným jako u parabolických rovnic odvodíme

$$\int_0^T \{\langle u''(t), \varphi(t)\rangle + \langle A(t)u(t), \varphi(t)\rangle - \langle f(t), \varphi(t)\rangle\}\,\mathrm{dt} = 0 \\ \text{pro všechna } \varphi \in L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right). \quad (2.138)$$

Abychom ověřili, že *řešení nabývá předepsaných počátečních podmínek*, zvolme v (2.138) $\varphi \in \mathcal{C}^2\left([0,T]; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ s $\varphi(T) = 0$ a $\varphi'(T) = 0$. Pak (2.138) po integraci per partes implikuje.

$$\int_0^T \{\langle u(t), \varphi''(t)\rangle + \langle A(t)u(t), \varphi(t)\rangle - \langle f(t), \varphi(t)\rangle\}\,\mathrm{dt} = \\ = (\varphi'(0), u(0)) - (u'(0), \varphi(0)). \quad (2.139)$$

Vycházíme–li však z Galerkinova systému, lze odvodit (podobně jako u parabolických rovnic) formulaci

$$\int_0^T \{\langle u(t), \varphi''(t)\rangle + \langle A(t)u(t), \varphi(t)\rangle - \langle f(t), \varphi(t)\rangle\}\,\mathrm{dt} = (\varphi'(0), a_0) - (a_1, \varphi(0)). \quad (2.140)$$

Porovnáním (2.139) s (2.140) dostáváme

$$(a_0 - u(0), \varphi'(0)) + (u'(0) - a_1, \varphi(0)) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^2\left(\bar{I}; W_0^{1,2}(\Omega)\right).$$

Volbou testovacích funkcí s $\varphi(0) = 0$ a pak s $\varphi'(0) = 0$ dostáváme $u(0) = a_0$ a $u'(0) = a_1$, což bylo třeba dokázat.
Důkaz věty 2.2.10 je úplný. □

Čtenáři je ponechána k rozmyšlení následující věta, která je základem úvah o regularitě slabých řešení hyperbolických *lineárních* problémů.

Věta 2.2.11
Jsou–li koeficienty operátorů $\mathcal{L}$ vesměs z $W^{2,\infty}$, je–li $\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$ a $a_0 \in W^{2,2}(\Omega)$, $a_1 \in W^{1,2}(\Omega)$ a $f' \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right)$, pak slabé řešení u úlohy (H1) *s $u_0 = 0$ splňuje*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty\left(I; W^{2,2}(\Omega)\right), \\ u' &\in L^\infty\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), \\ u'' &\in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right), \\ u''' &\in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{2.141}$$

Důkaz. Mnoho štěstí. □

Příloha A

Prostory funkcí

Značení A.0.12 (multiindex) *Uspořádanou d–tici* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$*,* $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ *nazýváme multiindex. Výšku multiindexu značíme* $|\alpha|$ *a definujeme ji jako* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$*.*

Značení A.0.13 (zápis parciálních derivací užitím multiindexu) *Symbolem* $D^\alpha \phi$ *značíme parciální derivaci funkce* ϕ

$$D^\alpha \phi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \, \ldots \, \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

A.1 Prostory spojitých a spojitě diferencovatelných funkcí

V této sekci připomeneme některé potřebné vlastnosti prostorů spojitých funkcí, hölderovsky spojitých funkcí a spojitě diferencovatelných funkcí. Věty budeme uvádět bez důkazu, čtenář je může nalézt například v monografii Kufner et al. [1977].

Nebude-li řečeno jinak, bude Ω v této sekci značit otevřenou souvislou podmnožinu $\mathbb{R}^d$.

Definice A.1.1 (spojité a spojitě diferencovatelné funkce) *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *otevřená množina.*

1. *Množinu všech spojitých funkcí na* Ω *značíme* $\mathcal{C}(\Omega)$ *resp.* $\mathcal{C}^0(\Omega)$*.*
2. *Buď* $k \in \mathbb{N}$*, pak* $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *označuje množinu všech funkcí* u*, které mají na množině* Ω *všechny parciální derivace až do řádu* k *včetně takové, že* $\forall |\alpha| \leq k : \; D^\alpha u \in \mathcal{C}(\Omega)$*.*

3. *$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ značí množinu všech nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na Ω, tedy $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega)$.*

4. *Označme $\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega |\ u(x) \neq 0\}}$ nosič funkce u. Potom pro $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definujeme $\mathcal{C}_0^k(\Omega) = \big\{u \in \mathcal{C}^k(\Omega)|\ \operatorname{supp} u \subsetneq \Omega\,, \operatorname{supp} u$ kompaktní $\big\}$.*

5. *$\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ resp. $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ značí množinu všech funkcí z $\mathcal{C}(\Omega)$, které jsou omezené a stejnoměrně spojité na Ω.*

6. *Buď $k \in \mathbb{N}$, pak značíme $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) = \big\{u \in \mathcal{C}^k(\Omega)|\ \forall|\alpha| \leq k :\ D^\alpha u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})\big\}$.*

7. *$\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$.*

Poznámka A.1.2 *Je-li Ω omezená množina, je (5) v předchozí definici ekvivalentní s tím, že existuje spojité prodloužení funkce na $\overline{\Omega}$.*

Definice A.1.3 (hölderovsky spojité funkce) *Buď $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, $k \in N_0$. Označme pro $|\alpha| \leq k$ a $\lambda \in (0,1]$*

$$H_{\alpha,\lambda}(u) = \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}. \tag{A.1}$$

Potom definujeme $\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) = \big\{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})|\ \forall\alpha \leq k :\ H_{\alpha,\lambda}(u) < \infty\big\}$.

Značení A.1.4 *Je-li $\alpha = (0,\dots,0)$ budeme používat místo $H_{(0,\dots,0),\lambda}(u)$ značení $H_{0,\lambda}(u)$.*

Poznámka A.1.5 *Je-li $\lambda = 1$, mluvíme o lipschitzovsky spojitých funkcích. Funkce z $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$ je již diferencovatelná skoro všude na Ω a $|D^\alpha u(x)| \leq H_{0,1}(u)$ platí skoro všude na Ω pro $|\alpha| = 1$.*

Věta A.1.6 *(vlastnosti prostoru $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$)*
Buď $k \in \mathbb{N}_0$. Označme pro $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} = \|u\|_k = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|. \tag{A.2}$$

Potom platí

1. *$\|\cdot\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})}$ je norma na $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$.*

2. *$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ je vzhledem k výše uvedené normě Banachův prostor.*

3. *Je-li Ω navíc omezená, je $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ separabilní.*

Věta A.1.7 *(vlastnosti prostoru $\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$)*
Buď $k \in \mathbb{N}_0$. Označme pro $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{k,\lambda} = \|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} H_{\alpha,\lambda}(u). \tag{A.3}$$

Potom platí

1. $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})}$ *je norma na* $\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$.
2. $\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ *je vzhledem k výše uvedené normě Banachův prostor.*
3. $\mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ *není separabilní.*

Věta A.1.8 *(reprezentace duálního prostoru k $\mathcal{C}(K)$)*
Buď $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní množina a buď ϕ spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{C}(K)$. Potom existuje právě jedna konečná regulární Radonova míra μ na K taková, že platí

$$\forall u \in \mathcal{C}(K): \ \phi(u) = \langle \phi, u \rangle = \int_K u d\mu. \tag{A.4}$$

Navíc $\|\phi\|_{(\mathcal{C}(K))^\star} = |\mu|(K)$, kde $|\mu|(K)$ je totální variace míry μ na K.

Poznámka A.1.9 *Prostor $\mathcal{C}(K)$ není reflexivní.*

Věta A.1.10 *(Arzelà–Ascoliho věta)*
Buď $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní a buď $A \subset \mathcal{C}(K)$. Množina A je totálně omezená právě když

1. *je stejně omezená*
   $\exists C \in \mathbb{R}^+ : \sup_{f\in A} \|f\|_{\mathcal{C}(K)} = \sup_{f\in A} \sup_{x\in K} |f(x)| < C$
2. *a stejně stejnoměrně spojitá*
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall x_1, x_2 \in K : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

Věta A.1.11 *(kompaktní vnoření λ-hölderovských funkcí do spojitých funkcí)*
Buď K kompaktní. Pak platí

$$\forall \lambda \in (0,1] : \ \mathcal{C}^{0,\lambda}(K) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}(K).$$

<u>*Důkaz*</u>. Tvrzení je důsledkem Arzelà–Ascoliho věty A.1.10. □

Cvičení A.1.12 *Ukažte, že platí $H_{0,\alpha}(u) \le 2\left(\|u\|_{\mathcal{C}(K)}\right)^{\frac{\lambda-\alpha}{\lambda}} (H_{0,\alpha}(u))^{\frac{\alpha}{\lambda}}$ a tedy pro $0 < \beta \le \alpha \le 1$ je $\mathcal{C}^{0,\alpha}(K) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\beta}(K)$.*

Platí i silnější tvrzení.

Věta A.1.13 *(kompaktní vnoření β-hölderovských funkcí do α-hölderovských funkcí)*
Buď K kompaktní. Pak pro platí

$$\forall \alpha, \beta \in [0,1], \alpha < \beta : \ \mathcal{C}^{0,\beta}(K) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(K).$$

A.2 Lebesgueovy prostory

Předpokládáme, že čtenář je v dostaečné míře obeznámen se základy teorie Lebesgueova integrálu. Podrobnější informace je možno nalézt ve skriptech Lukeš and Malý [1995]. Tamtéž je dokázána většina vět, které uvádíme v této sekci. Dalším vhodným zdrojem je Kufner et al. [1977].

Nebude-li řečeno jinak, bude Ω v této sekci značit libovolnou měřitelnou množinu v $\mathbb{R}^d$. Integrálem rozumíme Lebesgueův integrál.

A.2.1 Základní vlastnosti Lebesgueových prostorů, Hölderova nerovnost a její důsledky

Definice A.2.1 *(prostor $\mathcal{L}^p$)*
Buď $p \in [1, \infty)$. Pak značíme

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f \text{ měřitelná na } \Omega \mid \int_\Omega |f|^p dx < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{A.5}$$

Pro $p = \infty$ značíme

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \left\{ f \text{ měřitelná na } \Omega | \ \exists C \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq C \text{ skoro všude na } \Omega \right\},$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf_{E\subset\Omega, |E|=0} \sup_{x\in\Omega\setminus E} |f(x)| = \\ = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \{\alpha| \ |f(x)| \leq \alpha \text{ skoro všude na } \Omega\}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Změna funkce f na množině míry nula nemá vliv na to, zda $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ ani na hodnotu funkcionálu $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$. Pro funkce $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ tedy není funkcionál $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ norma. Uvažujeme proto místo individuálních funkcí f třídu ekvivalence $[f]$ definovanou jako

$$f_1 \sim f_2 \in [f] \Leftrightarrow f_1 = f_2 = f \text{ skoro všude na } \Omega.$$

Místo tříd $[f]$ budeme (poněkud nepřesně) hovořit o funkci f, přičemž budeme mít na mysli celou třídu ekvivalentních funkcí.

Definice A.2.2 *(Lebesgueův prostor)*
Buď $p \in [1, \infty]$. Označme

$$L^p(\Omega) = \{[f] | \ f \in \mathcal{L}^p(\Omega)\}.$$

$L^p(\Omega)$ nazýváme Lebesgueův prostor. Dále zavádíme

$$f \in L^p_{loc}(\Omega) = \{f \text{ měřitelná na } \Omega | \ \forall K \subset \Omega, K \text{ kompaktní}: \ f \in L^p(K)\}.$$

Věta A.2.3 *(úplnost Lebesgueových prostorů)*
Buď $p \in [1, \infty]$. Pak platí

1. *funkcionál $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ definovaný v (A.5), (A.6) je na $L^p(\Omega)$ norma*
2. *$L^p(\Omega)$ je vzhledem k výše uvedené normě Banachův prostor.*

Poznámka A.2.4 *Pro $p = 2$ je $L^2(\Omega)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem definovaným jako*[1] *$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v}(x)dx$.*

Věta A.2.5 *(Minkowského nerovnost)*

Buď $p \in [1, \infty]$ a $f, g \in L^p(\Omega)$. Pak platí

1. *$f + g \in L^p(\Omega)$*
2. *$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$.*

Věta A.2.6 *(Hölderova nerovnost)*
Buď $p \in [1, \infty]$ a $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (s úmluvou $p = 1 \Rightarrow p' = \infty$ a naopak). Pak platí

1. *$fg \in L^1(\Omega)$*
2. *$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$.*

Lemma A.2.7 *(Hölderova nerovnost pro více funkcí)*
Buď pro $i = 1, \dots, k$, $p_i \in [1, \infty]$ takové, že platí $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = 1$. Buď dále $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$. Pak platí

1. *$\prod_{i=1}^k f_i \in L^1(\Omega)$*
2. *$\left\|\prod_{i=1}^k f_i\right\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$.*

Lemma A.2.8 *(triviální vnoření $L^p(\Omega)$ prostorů)*
Buď[2] *$|\Omega| < \infty$, pak pro $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, $p_2 \geq p_1$ platí*

1. *$L^{p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$*
2. *$\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}} \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}$.*

Lemma A.2.9 *(interpolační Hölderova nerovnost)*
Buď $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, $p_2 > p_1$ a $f \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$. Potom $\forall r \in [p_1, p_2]$, platí

---

[1] V těchto skriptech ale většinou pracujeme pouze s reálnými funkcemi.
[2] Symbol $|\cdot|$ značí d-dimenzionální Lebesgueovu míru množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

1. $f \in L^r(\Omega)$

2. $\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^{p_1}(\Omega)} \|g\|^{1-\alpha}_{L^{p_2}(\Omega)}$,

kde α *splňuje* $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

Cvičení A.2.10 *Užitím věty A.2.6 dokažte lemmata A.2.7-A.2.9.*

Věta A.2.11 *(souvislost norem v* $L^\infty(\Omega)$ *a* $L^p(\Omega)$*)*
Buď $|\Omega| < \infty$. *Je-li* $f \in L^\infty(\Omega)$, *pak je*

1. $\forall p \in [1, \infty) : \; f \in L^p(\Omega)$

2. $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Je-li $f \in \bigcap_{i=1}^\infty L^{p_i}(\Omega)$, $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|f\|_{L^{p_i}(\Omega)} \leq C$, $C \in \mathbb{R}^+$, *pro posloupnost* $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ *takovou, že* $\lim_{i\to\infty} p_i = \infty$, *pak platí*

1. $f \in L^\infty(\Omega)$

2. $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

A.2.2 Regularizátor a operátor zhlazení, spojitost v průměru v p-té mocnině, separabilita $L^p(\Omega)$ prostorů

Věta A.2.12 *(Luzinova věta)*
Buď $f : \Omega \to \mathbb{R}$, f *skoro všude konečná,* Ω *měřitelná. Pak je ekvivalentní*

1. *funkce* f *je měřitelná*

2. *pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje otevřená množina* $G \subset \Omega$ *tak, že* $|G| < \varepsilon$ *a* $f|_{\Omega \setminus G}$ *je spojitá.*

Zřejmě, je-li Ω omezená, můžeme volit G tak, že $\Omega \setminus G$ je kompaktní.

Definice A.2.13 *(spojitost v průměru v p-té mocnině)*
Buď $f \in L^p(\Omega)$. *Položme* $f(x) = 0$ *pro* $x \notin \Omega$. *Řekneme, že funkce* f *je spojitá v průměru v p-té mocnině právě když*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in \mathbb{R}^d : |h| < \delta \Rightarrow \int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p dx < \varepsilon^p. \tag{A.7}$$

Věta A.2.14 *(o spojitosti v průměru v p-té mocnině)*
Každá funkce z $L^p(\Omega)$ *je spojitá v průměru v p-té mocnině.*

<u>*Důkaz.*</u>
Pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ máme $f(x) = 0$. Zřejmě lze volit $R > 0$ tak, aby pro dané ε bylo

$$\int_{\Omega \setminus B_R(0)} |f(x)|^p dx \leq \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^p$$

a

$$\int_{\Omega \setminus B_{R+1}(0)} |f(x+h)|^p dx \leq \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^p,$$

přičemž jsme bez újmy na obecnosti předpokládali, že pro δ z (A.7) platí $\delta \leq 1$. Díky výše uvedeným vztahům nyní stačí dokázat (A.7) pro omezenou množinu $\Omega_R = \Omega \cap B_{R+1}(0)$.
Zvolme $\eta > 0$ tak, že $\forall E \in \Omega$, $|E| < 4\eta$ platí

$$\int_E |f(x)|^p dx < \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^p. \tag{A.8}$$

K číslu η najdeme $\rho > 0$ tak, že pro

$$H_\rho = \{x \in \Omega_R |\ \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega_R) < \rho\}$$

platí $|H_\rho| < \eta$. Označme $\Omega_R^\rho = \Omega_R \setminus H_\rho$.
Funkce f je zřejmě měřitelná na Ω_R^ρ a podle Luzinovy věty A.2.12 pak existuje kompaktní množina $F_\eta^1 \subset \Omega_R^\rho$ taková, že $f|_{F_\eta^1}$ je (stejnoměrně) spojitá a $|\Omega_R^\rho \setminus F_\eta^1| < \eta$. Pak je samozřejmě $|\Omega_R \setminus F_\eta^1| < 2\eta$ a existuje $\delta \in (0, \rho)$ tak, že

$$\forall x, x+h \in F_\eta^1 : |h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3|\Omega_R|^{\frac{1}{p}}}. \tag{A.9}$$

Označme $F_\eta^2 = \left\{x \in \Omega_R |\ x+h \in F_\eta^1\right\}$ a $F_\eta = F_\eta^1 \cap F_\eta^1$. Množina F_η je kompaktní a platí

$$|\Omega_R \setminus F_\eta| = |\left(\Omega_R \setminus F_\eta^1\right) \cup \left(\Omega_R \setminus F_\eta^2\right)| \leq 4\eta,$$

neboť je $|F_\eta^1| = |F_\eta^2|$ a $|\Omega_R \setminus F_\eta^1| < 2\eta$.
Celkem tedy z předchozího a z (A.8) plyne

$$\left(\int_{\Omega_R \setminus F_\eta} |f(x+h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega_R \setminus F_\eta} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

a dále máme z (A.9)

$$\left(\int_{F_\eta} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Konečně pro $|h| < \delta$ platí

$$\left(\int_\Omega |f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{\Omega\setminus B_{R+1}(0)} |f(x+h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega\setminus B_{R+1}(0)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{F_\eta} |f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega_R\setminus F_\eta} |f(x+h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega_R\setminus F_\eta} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

což jsme chtěli ukázat. □

Cvičení A.2.15 *Modifikujte důkaz předchozí věty a ukažte, že pokud pro $\tau \in (0,1]$ definujeme $u_\tau(x) = u(\tau x)$, potom $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\epsilon, p) > 0$ tak, že pro všechna $u \in L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ a $\tau \in (1-\delta, 1]$: $\|u - u_\tau\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$.*

Definice A.2.16 *(regularizátor)*
Řekneme, že funkce $\eta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je regularizátor (zhlazovací jádro), právě když jsou splněny následující podmínky

1. $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$
2. $\operatorname{supp}\eta \subset \overline{B_1(0)}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^d: \ \eta(x) \ge 0$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}^d: \ |x| = |y| \Rightarrow \eta(x) = \eta(y)$
5. $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x)dx = 1.$

Příklad A.2.17 *Příkladem zhlazovacího jádra je funkce*

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \textit{pro } |x| < 1 \\ 0 & \textit{pro } |x| \ge 1, \end{cases}$$

kde konstanta C je volena tak, aby byla splněna normovací podmínka $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x)dx = 1$.

V dalším budeme značit η_ε (pro $\varepsilon > 0$) funkci definovanou jako

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Definice A.2.18 *(zhlazení funkce)*
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená otevřená, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Funkci $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ definovanou na $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ jako

$$u_\varepsilon = \eta_\varepsilon \star u \text{ (tj. } u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy)$$

nazýváme zhlazením (regularizací) funkce u.

Pro důkaz věty A.2.22 budeme potřebovat jednu důležitou vlastnost integrovatelných funkcí. Pro spojité funkce není těžké ověřit, že platí

$$\forall x \in \Omega : \lim_{r \to 0+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y)dy = u(x).$$

Otázkou je, pro jak velkou množinu bude uvedená rovnost platit, pokud bude u pouze integrovatelná funkce. Odpověď dává následující věta A.2.20.

Definice A.2.19 *(Lebesgueův bod)*
Buď $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Řekneme, že bod $x \in \mathbb{R}^d$ je Lebesgueův bod funkce u, právě když

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|dy = 0. \tag{A.10}$$

Věta A.2.20 *(o Lebesgueových bodech)*
Buď $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Pak skoro všechny body $x \in \mathbb{R}^d$ jsou Lebesgueovy body funkce u.

Věta A.2.21 *(o konvoluci)*
Buď $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ pro $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Potom platí

1. *$f \star g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$*
2. *$\|f \star g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$.*

Věta A.2.22 *(o vlastnostech zhlazení)*
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená otevřená, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Buď u_ε zhlazení funkce u. Pak platí

1. *$u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$*
2. *$\lim_{\varepsilon \to 0+} u_\varepsilon(x) = u(x)$ pro skoro všechna $x \in \Omega$*
3. *Je–li $u \in \mathcal{C}(\Omega)$, pak $u_\varepsilon \rightrightarrows u$ na každé kompaktní množině $K \subset \Omega$.*
4. *Je–li $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ pro $p \in [1, \infty)$, pak $u_\varepsilon \to u$ v $L^p_{loc}(\Omega)$.*

5. *Je–li* $u \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$, *pak je* $\|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ *pro* $p \in [1,\infty]$ *a* $u_\varepsilon \to u$ *v* $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ *pro* $p \in [1,\infty)$.

Důkaz.

Krok 1:
Z definice je

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy,$$

kde $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Stačí tedy použít větu o spojitosti integrálu podle parametru a o derivaci integrálu podle parametru a ihned dostaneme požadované $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Krok 2:
Využijeme definice regularizátoru A.2.16 a spočteme pro libovolné $x \in \Omega_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
|u(x)-u_\varepsilon(x)| &= \left|u(x)\int_{\mathbb{R}^d}\eta_\varepsilon(x-y)dy - \int_{\mathbb{R}^d}\eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy\right| \\
&= \left|\int_{B_\varepsilon(x)}\eta_\varepsilon(x-y)\left(u(x)-u(y)\right)dy\right| = \frac{1}{\varepsilon^d}\left|\int_{B_\varepsilon(x)}\eta(\frac{x-y}{\varepsilon})\left(u(x)-u(y)\right)dy\right| \\
&\leq C\frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B_\varepsilon(x)}|u(x)-u(y)|dy.
\end{aligned}$$

Podle věty A.2.20 pak pro skoro všechna x platí $C\frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B_\varepsilon(x)}|u(x)-u(y)|dy \to 0$ pro $\varepsilon \to 0$ a tvrzení je dokázáno.

Krok 3:
Postupujeme stejně jako v bodu (2), pouze při odhadu výrazu

$$C\frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B_\varepsilon(x)}|u(x)-u(y)|dy$$

využijeme stejnoměrné spojitosti funkce u na kompaktní množině K.

Krok 4:
Tvrzení je důsledkem věty A.2.14 a vlastností regularizátoru ($\mathrm{dist}(K,\partial\Omega) > \varepsilon$),

skutečně (používáme Hölderovu nerovnost a Fubiniho větu)

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u\|^p_{L^p(K)} &= \int_K |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p dx \\
&= \int_K \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)|u(y) - u(x)|dy \right)^p dx \\
&= \int_K \left(\int_{B_1(0)} \eta(z)|u(x-\varepsilon z) - u(x)|dz \right)^p dx \\
&\leq C \int_K \left(\int_{B_1(0)} |u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p dz \right) dx \\
&\leq C \int_{B_1(0)} \left(\int_K |u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p \, dx \right) dz.
\end{aligned}$$

Vnitřní integrál přes K jde ovšem podle věty A.2.14 k nule pro $\varepsilon \to 0$ a tvrzení je dokázáno.

Krok 5:
Díky Youngově nerovnosti A.2.21 máme

$$\|u_\varepsilon\|_p \leq \|u\|_p \|\eta_\varepsilon\|_1 = \|u\|_p,$$

$1 \leq p \leq \infty$. Nechť nyní $1 \leq p < \infty$ a $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Zvolme číslo $\varrho > 0$. Zřejmě existuje $R > 0$ tak, že $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} |u|^p dx < \left(\frac{\varrho}{4}\right)^p$. Analogicky jako výše, pomocí Youngovy nerovnosti, můžeme pro $\varepsilon < 1$ dokázat, že $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{R+1}(0)} |u_\varepsilon|^p dx < \left(\frac{\varrho}{4}\right)^p$. Nyní, podobně jako v kroku 4, můžeme dokázat, že existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$: $\int_{B_{R+1}(0)} |u - u_\varepsilon|^p dx < \left(\frac{\varrho}{2}\right)^p$. Potom

$$\begin{aligned}
\|u - u_\varepsilon\|_p &\leq \|u - u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d \setminus B_{R+1}(0))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^p(B_{R+1}(0))} \\
&\leq \|u|_{L^p(\mathbb{R}^d \setminus B_R(0))} + \|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d \setminus B_{R+1}(0))} + \|u - u_\varepsilon\|_{L^p(B_{R+1}(0))} < \varrho.
\end{aligned}$$

□

Z předchozí věty A.2.22 plyne např. následující. Je-li $u \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$ potom $u_\varepsilon \to u$ v $L^p(\Omega)$. Stačí totiž prodloužit u nulou vně Ω a použít tvrzení (5) zmíněné věty.

Poznamenejme, že tvrzení (5) věty (A.2.22) nemůže platit pro $p = \infty$, protože konvergence v $L^\infty(\Omega)$-normě je pro hladké funkce konvergencí stejnoměrnou. Platí ale slabší tvrzení, totiž

$$u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ v } L^\infty(\Omega)$$

(tj. $\forall \varphi \in L^1(\Omega) : \int_\Omega u_\varepsilon \varphi dx \to \int_\Omega u \varphi dx$, viz. oddíl o reflexivitě a duálních prostorech A.2.3).

Pomocí Bernsteinovy věty o aproximaci spojité funkce polynomy v $\mathcal{C}^0(\Omega)$ normě (a tudíž polynomy s racionálními koeficienty v $L^p(\Omega)$ normě, $p \in [1, \infty)$) dostáváme jako triviální důsledek první část následující věty.

Věta A.2.23 *(separabilita $L^p(\Omega)$ prostorů)*
Prostor $L^p(\Omega)$ je pro $p \in [1, \infty)$ separabilní. $L^\infty(\Omega)$ separabilní není.

Cvičení A.2.24 *Pomocí charakteristických funkcí intervalů ukažte, že $L^\infty(\Omega)$ nemůže být separabilní.*

A.2.3 Spojité lineární funkcionály nad $L^p(\Omega)$

Věta A.2.25 *(reprezentace spojitého lineárního funkcionálu nad $L^p(\Omega)$)*
Buď Ω neprázdná množina, $p \in [1, \infty)$. Buď dále ϕ omezený lineární funkcionál na $L^p(\Omega)$. Pak existuje právě jedna funkce $g \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ taková, že platí

$$\forall f \in L^p(\Omega): \ \phi(f) = \langle \phi, f \rangle = \int_\Omega fg dx. \tag{A.11}$$

Navíc $\|\phi\|_{(L^p(\Omega))^\star} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$.

Poměrně jednoduše plyne z předchozí věty.

Věta A.2.26 *(reflexivita $L^p(\Omega)$)*
Buď $p \in (1, \infty)$. Pak je $L^p(\Omega)$ reflexivní. Prostory $L^\infty(\Omega)$ a $L^1(\Omega)$ reflexivní nejsou.

A.2.4 Různé typy konvergencí, relativně kompaktní množiny v $L^p(\Omega)$

Buď $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost měřitelných funkcí a buď f měřitelná funkce. Podívejme se nyní na to, v jakém smyslu může posloupnost f_n konvergovat k limitní funkci f a jaké jsou vztahy mezi různými typy konvergencí.

Definice A.2.27 *(typy konvergencí)*

1. *Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f bodově právě když*
   $\forall x \in \Omega: \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *neboli*
   $\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$

2. *Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k f stejnoměrně na Ω právě když*
   $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$

3. *Řekneme, že posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* f *lokálně stejnoměrně na* Ω *právě když* $\forall K \subset \Omega$, K *kompaktní konverguje posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *stejnoměrně k* f *na* K.

4. *Řekneme, že posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* f *stejnoměrně na* Ω *až na malé množiny právě když*
$\forall \varepsilon > 0, \exists M \subset \Omega, |M| < \varepsilon$: *posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* f *stejnoměrně na* $\Omega \setminus M$.

5. *Řekneme, že posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* f *skoro všude na* Ω *právě když* $\exists M \subset \Omega$, $|M| = 0$ *taková, že posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* f *bodově na* $\Omega \setminus M$.

6. *Řekneme, že posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* f *v míře na* Ω *právě když* $\forall \varepsilon > 0: \ \lim_{n\to\infty} |\{x \in \Omega| \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| = 0.$

7. *Řekneme, že posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* f *v* $L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$, *právě když*
$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$

8. *Buď* $p \in [1,\infty)$ *a* $p' = \frac{p}{p-1}$ *(s obvyklou úmluvou* $p' = \infty$ *pro* $p = 1$*). Řekneme, že posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* f *slabě v* $L^p(\Omega)$*, značíme* $f_n \rightharpoonup f$*, právě když*
$\forall g \in L^{p'}(\Omega) : \ \int_\Omega f_n g dx \to \int_\Omega f g dx.$

9. *Řekneme, že posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* f *slabě s hvězdičkou v* $L^\infty(\Omega)$ *, značíme* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$*, právě když*
$\forall g \in L^1(\Omega) : \ \int_\Omega f_n g dx \to \int_\Omega f g dx.$

Obecně definujeme slabou a slabou s hvězdičkou konvergenci následujícím způsobem (X je Banachův prostor a $X^\star$ je jeho duál).

Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ konverguje slabě k $x \in X$, značíme $x_n \rightharpoonup x$, právě když $\forall \varphi \in X^\star : \langle \varphi, x_n \rangle \to \langle \varphi, x \rangle$.
Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^\star$ konverguje slabě s hvězdičkou k $\varphi \in X^\star$, značíme $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$, právě když $\forall x \in X : \langle \varphi_n, x \rangle \to \langle \varphi, x \rangle$.

Věta A.2.25 nám umožňuje popsat dualitu a duální prostor k $L^p(\Omega)$ pro $p \in [1,\infty)$ a právě uvedené obecné definice pak přejdou v definice uvedené v A.2.27.

Na $L^1(\Omega)$ máme pouze slabou konvergenci (neboť věta A.2.25 nám neříká nic o tom, jak vypadá prostor X, pro který by platilo $X^\star = L^1(\Omega)$).

Na $L^\infty(\Omega)$ máme pouze slabou s hvězdičkou konvergenci (neboť věta A.2.25 nám neříká nic o tom, jak vypadá prostor $(L^\infty(\Omega))^\star$).

Na $L^p(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ máme k dispozici slabou i slabou s hvězdičkou konvergenci, ale protože na reflexivních prostorech (což $L^p(\Omega)$ pro $p \in (1,\infty)$ podle věty A.2.26 jsou) obě konvergence splývají, není používání obou typů konvergencí nutné.

Na závěr se podívejme na charakterizace totálně omezených množin v $L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$. Půjde o analogii Arzelà-Ascoliho věty (A.1.10), roli stejnoměrné spojitosti ale bude hrát spojitost v průměru v p-té mocnině.

stejnoměrná konvergence $\xrightarrow{|\Omega| < \infty}$ konvergence v L^p

lokálně stejnoměrná konvergence

bodová konvergence

konvergence skoro všude

konvergence v míře

konvergence v L^p

konvergence v míře

vybraná podposloupnost
konverguje skoro všude

Obr. A.1: Některé vztahy mezi konvergencemi

Věta A.2.28 *(Kolmogorovova věta, charakterizace totálně omezených množin v $L^p(\Omega)$)*
Buď $p \in [1, \infty)$. Označme $r_h f(x) = f(x+h)$ (mimo množinu Ω definujeme $f(x) = 0$). Množina $A \subset L^p(\Omega)$ je totálně omezená právě když

1. *je stejně omezená*
   $\sup_{f \in A} \|f\|_{L^p(\Omega)} \le C < \infty$
2. *stejně spojitá v průměru v p-té mocnině*
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A : \|h\|_{\mathbb{R}^d} < \delta \Rightarrow \|r_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon$
3. *a stejnoměrně klesá v nekonečnu*
   $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \forall f \in A : \|f\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} \le \varepsilon$.

Důkaz.

Krok 1: "$\Rightarrow$"
Krok 1a: stejná omezenost
Je zřejmá z definice totální omezenosti (proveďte podrobně).

Krok 1b: stejná spojitost v průměru v p-té mocnině
Označme si $\{f_i\}_{i=1}^N \subset A$ $\frac{\varepsilon}{3}$-síť v A. Zřejmě platí, že síť $\{f_i\}_{i=1}^N$ je stejně spojitá v průměru v p-té mocnině (síť tvoří konečně mnoho funkcí z $L^p(\Omega)$). Pak ovšem

$$\|r_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \le \|r_h f - r_h f_i\|_{L^p(\Omega)} + \|r_h f_i - f_i\|_{L^p(\Omega)} + \|f_i - f\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon$$

pro vhodně zvolené $i = 1, \ldots, N$ z vlastností sítě (neboť máme $\|f_i - f\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|r_h f_i - r_h f\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$) a h ze stejné spojitosti v průměru v p-té mocnině sítě ($\|r_h f_i - f_i\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$).

Krok 1c: stejnoměrné klesání v nekonečnu
Označme si opět $\{f_i\}_{i=1}^N \subset A$ ε-síť v A. Protože pro každé i je $f_i \subset L^p(\Omega)$ a funkcí f_i je konečně mnoho, platí

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \forall i \in \{1, \ldots, N\} : \|f_i\|_{L^p(\Omega \setminus B_R(0))} \le \varepsilon.$$

Pak lze pro libovolné $\eta > 0$ nalézt vhodné $i = 1, \ldots, N$ a $R > 0$ tak, že

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus B_R(0))} \leq \|f - f_i\|_{L^p(\Omega\setminus B_R(0))} + \|f_i\|_{L^p(\Omega\setminus B_R(0))} \leq \eta.$$

Krok 2: "$\Leftarrow$"
Myšlenka důkazu je následující. Nejdříve ukážeme, že stačí najít síť na nějaké omezené podoblasti $M \subset \Omega$. Speciálně pak bude $\overline{M}$ kompaktní.

Funkce z A zhladíme a dostaneme množínu A_h spojitých funkcí na $\overline{M}$. Ukážeme, že tato množina splňuje požadavky na totální omezenost v $\mathcal{C}(\overline{M})$ podle Arlelà–Ascoliho věty A.1.10 a existuje tedy konečná síť na $A_h \subset \mathcal{C}(\overline{M})$.

V závěrečném kroku pak dokážeme, že funkce z A, jejichž zhlazení tvoří konečnou síť na $A_h \subset \mathcal{C}(\overline{M})$, už tvoří síť na $A \subset L^p(\Omega)$.

Krok 2a: stačí uvažovat omezené množiny
Skutečně, buď $\{f_i\}_{i=1}^N$ $\frac{\eta}{2}$-síť na $L^p(\Omega \cap B_R(0))$ pro R vybrané tak, aby

$$\forall f \in A: \ \|f\|_{L^p(\Omega\setminus B_R(0))} \leq \frac{\eta}{4}.$$

To je jistě možné, neboť předpokládáme stejnoměrné klesání v nekonečnu. Nyní je snadné ukázat, že $\{f_i\}_{i=1}^N$ je η-síť na $L^p(\Omega)$, neboť $\forall f \in A$:

$$\|f - f_i\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - f_i\|_{L^p(\Omega\cap B_R(0))} + \|f\|_{L^p(\Omega\setminus B_R(0))} + \|f_i\|_{L^p(\Omega\setminus B_R(0))} < \eta$$

pro vhodně vybrané $i = 1, \ldots, N$.

Bez újmy na obecnosti proto můžeme v dalším předpokládat, že Ω je omezená množina.

Krok 2b: zhlazení, použití Arzelà–Ascoliho věty
Označme $A_h = \{f_h | \ f \in A\}$, kde $f_h = f \star \eta_h$ je zhlazení funkce f na $\mathbb{R}^d$. Pak je $A_h \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Navíc je A_h totálně omezená v $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, neboť jsou splněny požadavky z věty (A.1.10), stejná omezenost

$$|f_h(x)| \leq \left| \int_\Omega \eta_h(x-y) f(y) dy \right| \leq C(h) \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C(h)$$

a stejnoměrná spojitost

$$\begin{aligned} |f_h(x+z) - f_h(x)| &\leq \int_\Omega \left| \frac{1}{h^d} \left(\eta\left(\frac{x+z-y}{h}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{h}\right) \right) f(y) \right| dy \\ &\leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \frac{1}{h^d} \left(\int_\Omega \left| \left(\eta\left(\frac{x+z-y}{h}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{h}\right) \right) \right|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C(h)|z| \, \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C(h)|z|. \end{aligned}$$

K číslu $\eta > 0$ tudíž existuje konečná $\frac{\eta}{2|\Omega|^{\frac{1}{p}}}$-síť množiny A_h v $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Označme $(f_i)_h$ prvky této sítě, $i = 1, \ldots, N$. Pro libovolné $f_h \in A_h$ tedy existuje $j \in$

$1, \ldots, N$ tak, že

$$\|f_h - (f_j)_h\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} < \frac{\eta}{2|\Omega|^{\frac{1}{p}}}. \tag{A.12}$$

Krok 2c: síť množiny A v $L^p(\Omega)$
Ukážeme, že $\{f_i\}_{i=1}^N$, kde f_i jsou nezhlazené funkce odpovídající $(f_i)_h$ prvkům sítě A_h v $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, tvoří síť v A v $L^p(\Omega)$.

Zvolme $\delta > 0$ tak, že

$$\forall f \in A, \forall z \in \mathbb{R}^d, |z| < \delta : \left(\int_\Omega |f(x+z) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\eta}{4} \frac{1}{\overline{\overline{C}}}, \tag{A.13}$$

kde $\overline{C}$ je konstanta, kterou upřesníme později. Možnost volby δ zajišťujícího splnění výše uvedené nerovnosti je zřejmá z požadavku na stejnou spojitost v průměru v p-té mocnině pro množinu A.

Potom

$$\|f_j - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_j - (f_j)_h\|_{L^p(\Omega)} + \|(f_j)_h - f_h\|_{L^p(\Omega)} + \|f_h - f\|_{L^p(\Omega)} .$$

První člen na pravé straně je menší než $\frac{\eta}{2}$, neboť

$$\begin{aligned}\|f_j - (f_j)_h\|_{L^p(\Omega)} &\leq \left(\int_\Omega \left(\int_{B_h(x)} (f_j(x) - f_j(y)) \, \eta_h(x-y) dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(h) \left(\int_\Omega \int_{B_1(0)} |f_j(x - hz) - f_j(y)|^p dy dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\eta}{4},\end{aligned}$$

což plyne z (A.13), kde jsme zvolili $\overline{C} = C(h)|B_1(0)|$. Obdobně odhadneme i poslední člen na pravé straně. Konečně první člen na pravé straně je menší než $\frac{\eta}{2}$, což plyne z (A.12). Celkem

$$\|f_j - f\|_{L^p(\Omega)} < \eta$$

a $\{f_i\}_{i=1}^N$ je proto η-síť v A v $L^p(\Omega)$.

$\square$

A.3 Sobolevovy prostory

V této sekci se budeme věnovat vlastnostem funkcí z Sobolevových prostorů $W^{k,p}(\Omega)$. Tyto prostory hrají v moderních metodách PDR fundamentální roli - proto bude výklad o něco podrobnější než v předchozích sekcích. Většinu vět budeme také dokazovat.

Nebude-li řečeno jinak, bude $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená souvislá množina.

A.3.1 Definice, základní vlastnosti

Definice A.3.1 *(slabá derivace)*
Buď $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ multiindex. Buď $u, v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$. Řekneme, že v_α je slabá derivace funkce u podle x^α právě když

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega): \int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \phi.$$

Zřejmě platí následující

Cvičení A.3.2 *(souvislost slabé a klasické derivace)*

1. *Nechť $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Potom derivace v klasickém a slabém smyslu splývá.*
2. *Slabá derivace je (ve smyslu rovnosti na $L^1_{loc}(\Omega)$, tedy skoro všude) určena jednoznačně.*

Nadále tedy budeme značit slabou a klasickou derivaci stejně, tj. je-li v_α slabá derivace u podle x^α , budeme psát $D^\alpha u = v_\alpha$.

Slabá derivace je speciální případ obecnějšího pojmu - distributivní derivace. Je-li $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ můžeme funkci u přiřadit regulární distribuci T_u definovanou jako

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega): \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi dx,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ značí dualitu mezi $\left(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\right)^\star$ a $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Každou distribuci můžeme libovolněkrát derivovat. Distribuce G je derivace distrubuce T podle x^α právě když

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega): \langle T, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle G, \varphi \rangle .$$

Speciálně, jsou-li $G = G_v$ a $T = T_u$ regulární distribuce, je zřejmě

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega): \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = \langle T_u, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle G_v, \varphi \rangle = \int_\Omega v \varphi dx,$$

tedy $v = D^\alpha u$ v slabém smyslu.

Definice A.3.3 *(Sobolevovy prostory)*
Buď $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty]$. Pak Sobolevův prostor $W^{k,p}(\Omega)$ definujeme jako

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) |\, D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \le k\}.$$

Analogicky jako v případě $L^p(\Omega)$ prostorů jsou prvky $W^{k,p}(\Omega)$ vlastně třídy funkcí lišících se na množině míry nula.

Cvičení A.3.4 *Buď Ω omezená množina. Ukažte, že je-li $u \in W^{k,p}(\Omega)$ a $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, pak je $u\xi \in W^{k,p}(\Omega)$. Ukažte také, že*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}(u\xi) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^i u}{\partial x_j^i} \frac{\partial^{k-i}\xi}{\partial x_j^{k-i}},$$

kde derivace u chápeme ve slabém smyslu a derivace ξ v klasickém smyslu.

Lemma A.3.5 *(zavedení normy v Sobolevově prostoru)*
Označme pro $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} = \|u\|_{k,p,\Omega} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \equiv \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & (p \in [1, \infty)) \\ \max_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & (p = \infty). \end{cases}$$

Potom $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ je norma na $W^{k,p}(\Omega)$.

Důkaz.

Budeme se zabývat důkazem pro $p \in [1, \infty)$, důkaz pro $p = \infty$ přenecháváme čtenáři jako užitečné cvičení. Navrhovaná norma je zřejmě vždy konečná a nezáporná, navíc pokud je $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$, tak je i $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$, a proto (vlastnost $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ normy) je i $u \equiv 0$. Obrácená implikace je zřejmá. Platí tedy $u \equiv 0 \Leftrightarrow \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$.

Pro slabou derivaci platí $D^\alpha(\lambda u) = \lambda D^\alpha u$, vlastností $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ normy je, že $\|\lambda D^\alpha(u)\|_{L^p(\Omega)} = |\lambda| \, \|D^\alpha(u)\|_{L^p(\Omega)}$ celkem

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha(\lambda u)\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(|\lambda|^p \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

čímž jsme ověřili, že navrhovaná norma je pro kladné konstanty homogenní.

Slabá derivace je zřejmě lineární $D^\alpha(u + v) = D^\alpha u + D^\alpha v$ a pro $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ normu platí trojúhelníková nerovnost (A.2.5)

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Navíc platí "diskrétní" Minkovského nerovnost $(a_n, b_n > 0)$

$$\left(\sum_{n=0}^m (a_n + b_n)^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=0}^m a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^m b_n^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

celkem

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)},
\end{aligned}$$

čímž jsme ověřili trojúhelníkovou nerovnost. □

Věta A.3.6 *(o vlastnostech Sobolevových prostorů)*
Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ a $p \in [1,\infty]$ je $W^{k,p}(\Omega)$ Banachův prostor. Pro $p \in [1,\infty)$ je $W^{k,p}(\Omega)$ separabilní a pro $p \in (1,\infty)$ reflexivní. Pro $p = 2$ je $W^{k,2}(\Omega)$ Hilbertův prostor.

Důkaz.
Zabývejme se nejdříve úplností. Cílem je ukázat, že každá Cauchyovská posloupnost v $W^{k,p}(\Omega)$ má v $W^{k,p}(\Omega)$ limitu. Buď $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset W^{k,p}(\Omega)$ Cauchyovská posloupnost

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \ge n_0: \ \|u_n - u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon.$$

Nutně tedy musí být i $\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$, pro každý multiindex α. Cauchyovské jsou proto i posloupnosti $\{D^\alpha u_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$. Prostory $L^p(\Omega)$ jsou dle věty (A.2.3) úplné, existují proto limity

$$\begin{aligned} u_n &\to u & u &\in L^p(\Omega) \\ D^\alpha u_n &\to u_\alpha & u_\alpha &\in L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Protože jsme každou limitu $D^\alpha u_n$ zkonstruovali zvlášť, není jisté, jestli bude platit $D^\alpha u = u_\alpha$. Zbývá ověřit právě zmíněné tvrzení. Především určitě platí, že $u_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ (neboť $u_\alpha \in L^p(\Omega)$), čímž jsme ověřili první vlastnost slabé derivace. Dále je podle definice slabé derivace

$$\int_\Omega u_n D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \phi$$

ovšem pro levou stranu rovnosti platí

$$\int_\Omega u_n D^\alpha \phi \to \int_\Omega u D^\alpha \phi, \ \text{protože } u_n \to u \text{ v } L^p(\Omega)$$

a pro pravou stranu

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u_n\phi \to (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_\alpha\phi, \text{ protože } D^\alpha u_n \to u_\alpha \text{ v } L^p(\Omega),$$

nutně proto musí být $\int_\Omega uD^\alpha\phi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_\alpha\phi$, což neznamená nic jiného, než že $D^\alpha u = u_\alpha$.

V důkazu reflexivnosti a separability využijeme známých poznatků o $L^p(\Omega)$ prostorech, viz. věta A.2.26 a A.2.23. Označme si $X = (L^p(\Omega))^\kappa$, kde κ je počet všech různých multiindexů o délce menší nebo rovné k. Prostor X je zřejmě reflexivní (pro $p \in (1,\infty)$) a separabilní (pro $p \in [1,\infty)$). Dále definujeme zobrazení $I : W^{k,p}(\Omega) \to X$ jako[3]

$$I(u) = [D^\alpha u]_{|\alpha|\le k} = \left[u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \dots\right].$$

Potom I je izomorfismus mezi $W^{k,p}(\Omega)$ a $I(W^{k,p}(\Omega)) \subset X$. Díky již dokázanému (úplnost $W^{k,p}(\Omega)$) je $I(W^{k,p}(\Omega))$ uzavřený podprostor reflexivního prostoru X a je tedy také reflexivní (pro $p \in (1,\infty)$). Podprostor separabilního metrického prostoru je již nutně separabilní, což dává separabilitu $W^{k,p}(\Omega)$ pro $p \in [1,\infty)$.

Pro $p = 2$ zadefinujeme skalární součin jako

$$(u,v)_{k,2,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega D^\alpha u\overline{D^\alpha v}dx$$

(ověřte podrobně, že se jedná o skalární součin) a tudíž díky úplnosti je $W^{k,2}(\Omega)$ Hilbertův prostor. □

Není težké ukázat (viz. následující cvičení), že $W^{k,\infty}(\Omega)$ není separabilní. Důkaz, že $W^{k,1}(\Omega)$ a $W^{k,\infty}(\Omega)$ nejsou reflexivní je možno nalézt v Kufner et al. [1977].

Cvičení A.3.7 *($W^{k,\infty}(\Omega)$ není separabilní)*
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a buď $\delta > 0$ takové, že $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ pro jisté x_0. Uvažujte pro $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_d) \in B_\delta(x_0)$ funkce $\varphi_\xi = \min(1, |1-\xi_1|)$. Ukažte, že φ_ξ je nespočetný systém funkcí z $W^{1,\infty}(\Omega)$ takový, že $\left\|\varphi_\xi - \varphi_{\tilde\xi}\right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \ge 1$ pro $\xi_1 \ne \tilde\xi_1$.

Definice A.3.8 *(prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$)*
Buď $p \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Označme

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Poznámka A.3.9 *Případ $p = \infty$ v předchozí definici neuvažujeme, protože $\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}} = \left\{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) |\ \forall|\alpha| \le k :\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$, což snadno nahlédneme z definice konvergence v normě $\|\cdot\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$.*

[3]Zobrazení I vytváří vektor všech možných parciálních derivací řádu nejvýše k.

Věta A.3.10 *(o vlastnostech prostorů $W_0^{k,p}(\Omega)$)*
Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ a $p \in [1,\infty)$ je $W_0^{k,p}(\Omega)$ Banachův prostor. Pro $p \in [1,\infty)$ je $W_0^{k,p}(\Omega)$ separabilní a pro $p \in (1,\infty)$ reflexivní.

Důkaz je, podobně jako věta A.3.6, založen na známých vlastnostech Lebesgueových prostorů $L^p(\Omega)$. Podrobnější důkaz je možno nalézt v Kufner et al. [1977].

Cvičení A.3.11 *Ukažte, že $W_0^{k,p}(\Omega)$ je podprostor $W^{k,p}(\Omega)$.*

Obecně jsou $W_0^{k,p}(\Omega)$ a $W^{k,p}(\Omega)$ různé, tj. $W^{k,p}(\Omega) \subsetneq W_0^{k,p}(\Omega)$ pro $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$. Ovšem v případě $\Omega = \mathbb{R}^d$ platí

Lemma A.3.12 *(vztah $W_0^{k,p}(\Omega)$ a $W^{k,p}(\Omega)$ pro $\Omega \subset \mathbb{R}^d$)*
Buď $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty)$. Potom platí $W^{k,p}\left(\mathbb{R}^d\right) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^d)$

<u>*Důkaz*</u>. K důkazu je potřeba věta o lokální aproximaci $W^{k,p}(\Omega)$ hladkými funkcemi A.3.26. Důkaz proto provedeme ve chvíli, kdy již budeme mít dokázanou zmíněnou větu (viz strana 86). □

Ukážeme si nyní několik příkladů, které ilustrují, jaké funkce náleží do prostorů $W^{k,p}(\Omega)$.

Příklad A.3.13 *Funkce*

$$u(x) = \begin{cases} x & na\ (0,1) \\ 2 & na\ [1,2) \end{cases}$$

není prvkem $W^{1,p}((0,2))$, neboť

$$v(x) = \begin{cases} 1 & na\ (0,1) \\ 0 & na\ (1,2) \end{cases}$$

není slabou derivací u.
Funkce u má ovšem distributivní derivaci. Je jí funkcionál $\chi_{(0,1)} + \delta_1$, kde χ_I je charakteristická funkce intervalu I a δ_s je Diracova distribuce s nosičem v bodě s.
Ale v je slabou derivací funkce

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} x & na\ (0,1) \\ 1 & na\ [1,2). \end{cases}$$

Obecně: funkce, která má skokovou singularitu na $(d-1)$–rozměrné ploše, nemá slabou derivaci v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Příklad A.3.14 *Buď $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$. Pak $u(x) \equiv \frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \alpha < \frac{d-p}{p}$. Vidíme, že i neomezené funkce patří do některých $W^{1,p}(\Omega)$. Všimněme si, že pro $\alpha < \frac{d-p}{p}$ je $u \in L^q(\Omega)$ pro každé $q \in [1,p^*)$, kde $p^* := \frac{dp}{d-p}$ (srovnej s větou o vnoření A.3.44).*

Příklad A.3.15 *Nechť* $\{r_k\}_{i=1}^{\infty}$ *je spočetná hustá podmnožina v* $B_1(0)$*. Položme pro* $x \in B_1(0)$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x - r_i|^{-\alpha}.$$

Je-li $p < d$ *a* $\alpha \in (0, \frac{d-p}{p})$*, potom* $u \in W^{1,p}(B_1(0))$*, a přesto není omezená na žádné otevřené podmnožině* $B_1(0)$*.*

A.3.2 Alternativní zavedení Sobolevových prostorů

Jednou z možností, jak zadefinovat Sobolevovy prostory, je použít analogii definice A.3.8. Tedy

Definice A.3.16 *(alternativní zavedení Sobolevových prostorů)*
Buď $p \in [1, \infty)$*,* $k \in \mathbb{N}$ *označme*

$$\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Poznámka A.3.17

1. *Prvky* $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega)$ *můžeme chápat jako vektory* $[w_\alpha]_{\alpha \leq k}$ *takové, že existuje* $u_n \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ *:* $D^\alpha u_n \to w_\alpha$ *v* $L^p(\Omega)$ *(srovnej se str. 80).*
2. *Analogicky jako v případě* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *(viz. poznámka A.3.9) nemá smysl definovat* $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega)$*, protože bychom kvůli vlastnostem* $\|\cdot\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$ *dostali*[4] $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) \leftrightarrows \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$*.*

Lemma A.3.18 *Nechť* $[w_\alpha]_{|\alpha| \leq k} \in \widetilde{W}^{k,p}(\Omega)$*. Potom platí*

$$\forall |\alpha| \leq k : \; D^\alpha w_{[0,\ldots,0]} = w_\alpha.$$

Speciálně tedy $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$*, kde* $[w_\alpha]_{|\alpha| \leq k}$ *ztotožníme s* $w_{[0,\ldots,0]}$*.*

Důkaz.
Je ponechán čtenáři jako užitečné cvičení. □

Obrácená inkluze obecně neplatí, je třeba vědět něco víc o hranici oblasti Ω. Podrobněji se této otázce budeme věnovat v následujícím oddílu A.3.3. Poznamenejme pouze, že $\widetilde{W}^{k,p}(\Omega)$ je Banachův prostor, který je separabilní pro $p \in [1, \infty)$ a reflexivní pro $p \in (1, \infty)$.

Další prostory, které jsou ve skutečnosti shodné s $W^{k,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, jsou tzv. Beppo-Leviho prostory. Jejich zavedení je mírně komplikované, zato však poměrně snadno dokážeme některé vlastnosti těchto prostorů a následně tedy i Sobolevových prostorů zavedených podle standardní definice A.3.3.

Označme $P^{a,b} = \{x = ta + (1-t)b, t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}^d\}$. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast. Potom existuje posloupnost otevřených intervalů J_i (konečná nebo nekonečná) taková, že

1. $\forall i \neq j : J_i \bigcap J_j = \emptyset$
2. $\Omega \bigcap P^{a,b} = \bigcup_j \{x = ta + (1-t)b |\; t \in J_j\}$.

[4] Symbol $\leftrightarrows$ značí, že dané prostory jsou izometricky izomorfní.

Buď u funkce definovaná skoro všude na Ω. Položme

$$\varphi(t) = u(ta + (1-t)b), \text{ pro } t \in \bigcup_j J_j.$$

Definice A.3.19 *(množina $AC(\Omega)$)*
Řekneme, že funkce u je absolutně spojitá na přímce $P^{a,b}$, je-li spojitá na všech kompaktních podintervalech intervalů J_j.

Buď $i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, d$. Označme $AC_i(\Omega)$ množinu všech funkcí definovaných na Ω pro které platí: Je-li M množina bodů $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \subset \mathbb{R}^{d-1}$ takových, že pro rovnoběžky s osami x_i : $P_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_d)} = \{(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_d) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ je splněno $\Omega \bigcap P_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_d)} \neq \emptyset$ a současně funkce u není absolutně spojitá na přímce $P_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_d)}$, potom je $|M|_{d-1} = 0$.

Značíme $AC(\Omega) = \bigcap\limits_{i=1}^{d} AC_i(\Omega)$.

Definice A.3.20 *(Beppo-Leviho prostor)*
Buď $p \in [1, \infty]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Potom $BL^p(\Omega)$ – Beppo-Leviho prostor – je množina všech funkcí $u \in L^p(\Omega)$, pro které existuje $\tilde{u} \in AC(\Omega)$ takové, že

1. *$\tilde{u} = u$ skoro všude v Ω*
2. *$\forall i = 1, \ldots, d$: $\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right] \in L^p(\Omega)$, kde $\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right]$ značí klasickou[5] parciální derivaci funkce $\tilde{u}$.*

Jinými slovy funkce $u \in BL^p(\Omega)$ právě když změnou funkce u na množině míry nula dostaneme funkci $\tilde{u}$, která je absolutně spojitá na skoro všech rovnoběžkách s osami, a navíc u a všechny klasické parciální derivace $\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right]$ patří do $L^p(\Omega)$.

Cvičení A.3.21 *Ukažte, že*

$$\|u\|_{BL^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left(\sum_{i=1}^{d} \left\| \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right] \right\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

definuje normu ve vektorovém prostoru $BL^p(\Omega)$.

Věta A.3.22 *Buď $p \in [1, \infty]$. Pak platí $BL^p(\Omega) \leftrightarrows W^{1,p}(\Omega)$ (tj. Beppo-Leviho prostory jsou izometricky izomorfní s odpovídajícími Sobolevovými prostory).*

Důkaz plyne z následujících dvou lemmat.

Lemma A.3.23 *Buď $u \in L^1_{loc}(\Omega) \bigcap AC_i(\Omega)$. Je-li $\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] \in L^1_{loc}(\Omega)$, potom se $\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]$ shoduje se slabou derivací, tj.*

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] = D_{x_i} u$$

skoro všude na Ω.

[5] Díky absolutní spojitosti $\tilde{u}$ existuje $\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right]$ skoro všude na Ω.

Důkaz. *Zvolme $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ a prodlužme u a φ nulou vně Ω. Potom*

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{P_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)}} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i\right)dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_d =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{P_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)}}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]\varphi\right)dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_d = -\int_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]\varphi dx,$$

přičemž jsme dvakrát použili Fubiniho větu a vlastnosti absolutně spojitých funkcí. □

Lemma A.3.24 *Buď $u, D_{x_i}u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Potom existuje $\tilde{u} \in AC_i(\Omega)$ takové, že $u = \tilde{u}$ skoro všude na Ω a navíc*

$$\left[\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}\right] = D_{x_i}u$$

skoro všude na Ω.

Důkaz. Dodefinujeme u nulou vně Ω. Buď $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost kompaktních množin takových, že $K_n \subset K_{n+1}$ a $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = \Omega$. Buď $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ taková, že $\varphi_n = 1$ na K_n a $\varphi_n = 0$ vně K_{n+1}. Položme

$$\overline{u}_n = u\varphi_n,\ \overline{w}_n = D_{x_i}\overline{u}_n.$$

Zřejmě je $\overline{w}_n = D_{x_i}u\varphi_n + u\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}$ a $\overline{u}_n, \overline{w}_n \in L^1(\Omega)$. Dále $\overline{u}_n = u$ a $\overline{w}_n = D_{x_i}u$ na K_n. Definujeme

$$\overline{u}_n^\star(x) = \overline{u}_n^\star(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_d) = \int_{-\infty}^{x_i}\overline{w}_n(x_1,\dots,x_{i-1},\xi,x_{i+1},\dots,x_d)d\xi.$$

Funkce $\overline{u}_n^\star$ je definována pro taková $(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{w}_n(x_1,\dots,x_{i-1},\xi,x_{i+1},\dots,x_d)d\xi < \infty,$$

což je splněno pro skoro všechna $(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ (ve smyslu $d-1$-dimenzionální Lebesgueovy míry). Evidentně $\overline{u}_n^\star \in AC_i(\Omega)$.

Pokud se nám podaří dokázat, že

$$\overline{u}_n^\star = \overline{u}_n \text{ skoro všude na } \Omega, \tag{A.14}$$

můžeme pro $x \in K_n$ položit

$$\tilde{u}(x) = \overline{u}_n^\star(x),\ n = 1,2,\dots.$$

Pak je $\tilde{u}(x) \in AC_i(\Omega)$ a z předchozího lemmatu A.3.23 plyne, že

$$\left[\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}\right] = D_{x_i}u,$$

což jsme chtěli ukázat.

Vraťme se k (A.14). Protože $\overline{u}_n$ má kompaktní nosič v Ω, existuje posloupnost $\{u_n^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ taková, že[6]

$$\lim_{k\to\infty}\left\|u_n^k - \overline{u}_n\right\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{\partial\overline{u}_n^k}{\partial x_i} - \overline{w}_n\right\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

[6] Zde ve skutečnosti využíváme tvrzení A.3.26, které dokážeme v dalším oddílu nezávisle na výsledcích této části. Není ale těžké nahlédnout, že můžeme vzít $u_n^k = \eta_{\frac{1}{k}} \star u_n$, kde $\eta_{\frac{1}{k}}$ je regularizátor, viz. A.2.16.

Máme tedy

$$\lim_{k\to\infty}\|\overline{u}_n-\overline{u}_n^\star\|_{L^1(\Omega)}\le\lim_{k\to\infty}\left\|\overline{u}_n-u_n^k\right\|_{L^1(\Omega)}+\lim_{k\to\infty}\left\|u_n^k-\overline{u}_n^\star\right\|_{L^1(\Omega)}=\lim_{k\to\infty}\left\|u_n^k-\overline{u}_n^\star\right\|_{L^1(\Omega)}$$

a

$$\begin{aligned}\left\|u_n^k-\overline{u}_n^\star\right\|_{L^1(\Omega)}&=\int_\Omega|u_n^k-\overline{u}_n^\star|dx=\int_\Omega\left|u_n^k-\int_{-\infty}^{x_i}\overline{w}_n(x_1,\dots,x_{i-1},\xi,x_{i+1},\dots,x_d)d\xi\right|dx\\&=\int_\Omega\left|\int_{-\infty}^{x_i}\left(\frac{\partial u_n^k}{\partial x_i}-\overline{w}_n\right)d\xi\right|dx\le\int_\Omega\int_{K_{n+2}\cap P_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)}}\left|\frac{\partial u_n^k}{\partial x_i}-\overline{w}_n\right|d\xi dx\\&\le 2\,\mathrm{diam}(K_{n+2})\left\|\frac{\partial\overline{u}_n^k}{\partial x_i}-\overline{w}_n\right\|_{L^1(\Omega)}\to 0,\end{aligned}$$

neboť $\operatorname{supp} w_n\subset K_{n+1}$ a pro vhodnou volbu u_n^k můžeme docílit toho, že $\operatorname{supp} u_n^k\subset K_{n+2}$. Odtud tedy $\overline{u}_n^\star=\overline{u}_n$ skoro všude na Ω a důkaz je hotov. □

Díky větě (A.3.22) dokážeme snadno následující vlastnosti $W^{1,p}(\Omega)$ prostorů.

Důsledek A.3.25 *(některé vlastnosti Sobolevových prostorů)*

1. *Nechť $\Omega=I=(a,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$ a $u\in W^{1,p}(\Omega)$, $p\in[1,\infty]$. Pak existuje reprezentant $u^\star=u$ skoro všude na (a,b) takový, že $u^\star\in\mathcal{C}([a,b])$.*
2. *Nechť $u\in W^{1,p}(\Omega)$, $p\in[1,\infty]$ a nechť $\nabla u=0$ skoro všude na Ω . Pak $u=konst.$ skoro všude na Ω.*
3. *Označme $u^+=\max(0,u)$ a $u^-=\max(0,-u)$. Je-li $u\in W^{1,p}(\Omega)$, $p\in[1,\infty]$ pak je i $u^+,u^-,|u|\in W^{1,p}(\Omega)$.*

Důkaz.

(1) Tvrzení plyne okamžitě z definice $BL^p(\Omega)$.

(2) Tvrzení plyne z toho, že je-li $\tilde{u}\in AC(\Omega)$ a $\left[\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}\right]=0$ pro $i=1,\dots,d$ potom nutně $\tilde{u}=konst.$

(3) Je-li u absolutně spojitá funkce, potom jsou absolutně spojité i u^+,u^- a $|u|$ a tvrzení proto plyne z rovnosti $BL^p(\Omega)$ a $W^{1,p}(\Omega)$. Navíc zřejmě

$$D_{x_i}u^+=\begin{cases}D_{x_i}u & \text{skoro všude na } u>0\\ 0 & \text{skoro všude na } u\le 0\end{cases}$$

$$D_{x_i}u^-=\begin{cases}-D_{x_i}u & \text{skoro všude na } u<0\\ 0 & \text{skoro všude na } u\ge 0\end{cases}$$

$$D_{x_i}|u|=\begin{cases}D_{x_i}u & \text{skoro všude na } u>0\\ -D_{x_i}u & \text{skoro všude na } u<0\\ 0 & \text{skoro všude na } u=0.\end{cases}$$

□

A.3.3 Hustota hladkých funkcí

Cílem tohoto oddílu je ukázat, za jakých předpokladů můžeme funkce z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ aproximovat v normě $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ funkcemi hladkými až do hranice. Význam takového tvrzení spočívá v tom, že mnoho vět budeme schopni dokázat relativně jednoduše pro hladké funkce a limitním přechodem pak ověříme jejich platnost i pro funkce z příslušného Sobolevova prostoru. Přímý důkaz bývá často mnohem těžší či nemožný.

Hlavním nástrojem bude, podobně jako pro funkce z Lebesgueových prostorů, vhodná regularizace (zhlazení) funkce, viz. věta A.2.22. Na rozdíl od Lebesgueových prostorů není zřejmé, že můžeme funkci z $W^{k,p}(\Omega)$ prodloužit nulou pro $x \notin \Omega$ tak, aby proudloužení stále patřilo do $W^{k,p}(\Omega)$. Blíže se této problematice budeme věnovat v následujícím oddíle věnovaném operátoru rozšíření. Nyní nám bude muset stačit

Věta A.3.26 *(o lokální aproximaci hladkými funkcemi)*
Buď $u \in W^{k,p}(\Omega)$ pro $p \in [1, \infty)$, označme u_ε zhlazení funkce u, definované na $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega | \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ (viz. definice A.2.18). Pak platí

1. $D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha u)_\varepsilon$
2. $u_\varepsilon \to u$ *v* $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$.

<u>*Důkaz*</u>.

Začneme počítat podle definice ($x \in \Omega_\varepsilon$)

$$D^\alpha u_\epsilon(x) = D^\alpha \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y)u(y)dy \right) = \int_{B_\varepsilon(x)} \left(D^\alpha_x \eta_\epsilon(x-y)\right) u(y)dy.$$

Ověření předpokladů věty o záměně derivace a integrálu je v tomto případě snadné. Pokračujeme

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon(x)} \left(D^\alpha_x \eta_\epsilon(x-y)\right) u(y)dy &= \int_{B_\varepsilon(x)} \left((-1)^{|\alpha|} D^\alpha_y \eta_\epsilon(x-y)\right) u(y)dy \\ &= \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) D^\alpha_y u(y)dy = (D^\alpha u)_\varepsilon , \end{aligned}$$

kde jsme využili definice slabé derivace ($\operatorname{supp} \eta_\varepsilon(x-y) = B_\varepsilon(x) \subset\subset \Omega$).

Důkaz druhé části tvrzení je triviálním důsledkem první části a věty o vlastnostech zhlazení A.2.22, bod 4. □

Nyní již máme dostatek prostředků k tomu, abychom dokázali lemma A.3.12.
<u>*Důkaz*</u>. (lemmatu A.3.12)

Krok 1: $W^{k,p}_0(\mathbb{R}^d) \subset W^{k,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$
Tato inkluze je zřejmá.

Krok 2: $W^{k,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset W^{k,p}_0(\mathbb{R}^d)$
Máme ukázat, že pro každé $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^d)$ tak, že $\|u - u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \to 0$.

Buďte $\xi_l \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ takové funkce, že $\xi_l(x) = 1$ pro $x \in B_l(0)$, $\xi_l(x) \in [0,1]$ pro $x \in B_{l+1}(0) \cap B_l(0)$ a $\xi_l(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus B_{l+1}(0)$. A nechť navíc platí $|D^k \xi_l| \le C_k$, kde C_k nezávisí na l.

Definujme si funkce $u_l = u\xi_l$. Zřejmě je $u_l \in W^{k,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Navíc pro $l \to \infty$ platí

$$\|u - u_l\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u - u\xi_l|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_l(0)} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

a

$$\begin{aligned}\|\nabla u - \nabla u_l\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(u - u\xi_l)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_l(0)} \left(|\nabla \xi_l|^p |u|^p + |\nabla u|^p (1-\xi_l)^p\right) dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0,\end{aligned}$$

obdobně pro vyšší derivace. Pro libovolné $\rho > 0$ proto můžeme najít $l \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\|u - u_l\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} < \frac{\rho}{2}.$$

Nyní stačí funkci u_l, která již má na rozdíl od u kompaktní nosič $\operatorname{supp} u_l \subset B_{l+1}(0)$, zhladit podle věty A.3.26. K číslu $\rho > 0$ pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že po každé $\varepsilon < \varepsilon_0$ platí

$$\|u_l - (u_l)_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} < \frac{\rho}{2}.$$

Potom je pro $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$

$$\|u - (u_l)_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le \|u_l - (u_l)_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} + \|u - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} < \rho,$$

což jsme chtěli ukázat. □

Nyní se pokusíme použít větu A.3.26 pro konstrukci posloupnosti hladkých funkcí až do hranice, která by v normě $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ aproximovala funkce z $W^{k,p}(\Omega)$ (globálně, tj. až do hranice). Jak uvidíme níže, obecně toto není možné a souvisí to s hladkostí hranice. Uveďme nejprve důkaz pro speciální třídu oblastí, tzv. hvězdicovitých oblastí. Výhodou je, že důkaz je velice jednoduchý, a přesto obsahuje základní myšlenku, která nám umožní analogickou konstrukci pro oblasti mnohem obecnější.

Definice A.3.27 *(hvězdicovitá oblast)*
Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je hvězdicovitá právě když existuje bod $x_0 \in \Omega$ takový, že

$$\forall x \in \Omega, x \ne x_0 : \left\{\tau(x - x_0) + x_0 \,|\, \tau \in \mathbb{R}^+\right\} \cap \partial\Omega \text{ obsahuje právě jeden bod}$$

aneb "polopřímka spojující bod x a x_0 má s hranicí Ω společný právě jeden bod".

Příkladem hvězdicovité oblasti je například koule v $\mathbb{R}^d$ nebo, jak název napovídá, i rovinný útvar – symetrická hvězda.

Věta A.3.28 *(o aproximaci až do hranice pro hvězdicovité oblasti)*
Buď Ω hvězdicovitá oblast, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ pro $p \in [1,\infty)$. Pak existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ taková, že $u_n \to u$ v $W^{k,p}(\Omega)$.

Důkaz.

Hlavní myšlenka důkazu spočívá v tom, že pro hvězdicovité oblasti můžeme funkci u poměrně jednoduše "vysunout" vně Ω a tuto "vysunutou" funkci pak zhladit.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že oblast Ω je hvězdicovitá vůči počátku, tzn. $x_0 = 0$. V obecném případě stačí provést substituci $y = x - x_0$.

Krok 1: posunutí
Definujme pro $\tau \in (0,1)$ posunutí funkce $u_\tau(x) = u(\tau x)$ a označme $\Omega_\tau = \left\{x \in \mathbb{R}^d \middle| \; \tau x \in \Omega\right\}$. Zřejmě je $u_\tau \in W^{k,p}(\Omega_\tau)$ a

$$D^\alpha(u_\tau) = \tau^{|\alpha|}\left(D^\alpha u\right)_\tau,$$

navíc pro $\tau \in (0,1)$ je $\overline{\Omega} \subset \Omega_\tau$. Pak, díky cvičení A.2.15

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(u-u_\tau)\|_{L^p(\Omega)} &= \left\|D^\alpha u - \tau^{|\alpha|}\left(D^\alpha u\right)_\tau \pm \left(D^\alpha u\right)_\tau\right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \left(1-\tau^{|\alpha|}\right)\|(D^\alpha u)_\tau\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_\tau\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \text{ pro } \tau \to 1^-\end{aligned}$$

a pro libovolné $\rho > 0$ lze tedy najít δ tak, že

$$\forall \tau \in (1-\delta, 1] : \|u - u_\tau\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \frac{\rho}{2}.$$

Krok 2: zhlazení
Funkce u_τ je prvkem $W^{k,p}(\Omega_\tau)$ a $\overline{\Omega} \subset \Omega_\tau$. Na Ω proto můžeme použít větu o lokální aproximaci (A.3.26) a pro libovolné $\rho > 0$ najdeme $\varepsilon > 0$ tak, že platí

$$\|u_\tau - (u_\tau)_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \frac{\rho}{2}.$$

Navíc pro dostatečně malé ε patří $(u_\tau)_\varepsilon$ do $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Krok 3: aproximace
Funkce $(u_\tau)_\varepsilon$ je dobrá aproximace. Skutečně, z předchozího plyne, že pro libovolné ρ lze zvolit τ a ε tak, že $\|u - (u_\tau)_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \rho$. Posloupnost $(u_{\tau_n})_{\varepsilon_n}$ pro volbu $\rho_n = \frac{1}{n}$ je naší hledanou aproximující posloupností. □

Definice A.3.29 *(oblast s hranicí $\mathcal{C}^{k,\mu}$)*
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast[7], $k \in \mathbb{N}_0$, $\mu \in [0,1]$. Řekneme, že Ω je oblast

[7]Připouštíme i případ $k = \infty$ a $\mu = 0$.

s hranicí $\mathcal{C}^{k,\mu}$ (zkráceně[8] oblast typu $\mathcal{C}^{k,\mu}$), značíme $\Omega \in \mathcal{C}^{k,\mu}$, právě když existují kladná čísla α, β a M kartézských souřadných systémů

$$r = 1, \dots, M: \ (x_{r_1}, \dots, x_{r_{d-1}}, x_{r_d}) = (x'_r, x_{r_d})$$

a M funkcí $a_r : \Delta_r \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^{k,\mu}$, kde

$$r = 1, \dots, M: \ \Delta_r = \ \left\{ x'_r \in \mathbb{R}^{d-1} |\ i = 1, \dots, d-1: \ |x_{r_i}| < \alpha \right\},$$

takových že

1. *$\forall x \in \partial\Omega, \exists r \in \{1, \dots, M\}$ tak, že $\exists x'_r \in \Delta_r : x = T_r(x'_r, a_r(x'_r))$, kde T_r je zobrazení (otočení a posunutí) realizující přechod od r-tého kartézského souřadného systému (x'_r, x_{r_d}) ke globálnímu souřadnému systému (x', x_d).*

2. *Označme*

$$\begin{aligned} V_r^+ &= \left\{ (x'_r, x_{r_d}) \in \mathbb{R}^d |\ x'_r \in \Delta_r,\ a_r(x'_r) < x_{r_d} < a_r(x'_r) + \beta \right\} \\ V_r^- &= \left\{ (x'_r, x_{r_d}) \in \mathbb{R}^d |\ x'_r \in \Delta_r,\ a_r(x'_r) - \beta < x_{r_d} < a_r(x'_r) \right\} \\ \Lambda_r &= \left\{ (x'_r, x_{r_d}) \in \mathbb{R}^d |\ x'_r \in \Delta_r,\ a_r(x'_r) = x_{r_d} \right\}. \end{aligned}$$

   Pak $T_r(V_r^+) \subset \Omega,\ T_r(V_r^-) \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$.

Označme $V_r = V_r^+ \cup V_r^- \cup \Lambda_r$, pak je též $\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^M \Lambda_r \subset \bigcup_{r=1}^M V_r$.

K názorné představě nám poslouží obrázek A.2.

Příklad A.3.30

1. *Zřejmě oblast typu $(0, a)^d$, $a > 0$ (tj. d-dimenzionální krychle) je oblast s hranicí $\mathcal{C}^{0,1}$.*

2. *Koule v $\mathbb{R}^d$ je oblast s hranicí $\mathcal{C}^\infty$.*

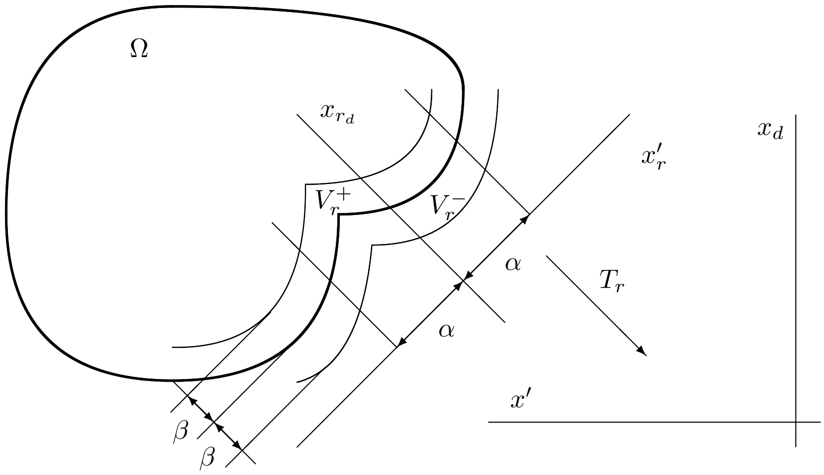
3. *Koule v $\mathbb{R}^d$ s vyjmutou částí průměru je (viz. obr. A.3) není ani oblastí s hranicí $\mathcal{C}^0$.*

K lokalizaci úlohy budeme potřebovat následující lemma.

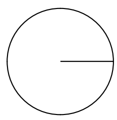
Lemma A.3.31 *(rozklad jednotky I)*
Buď $\{G_i\}_{i=1}^k$ systém otevřených množin v $\mathbb{R}^d$, takových, že $\overline{\Omega} \subset \cup_{i=1}^k G_i$. Potom existují funkce $\Phi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(G_i)$, $i = 1, \dots, k$ takové, že

1. *$\forall x \in \overline{\Omega}, \forall i \in \{1, \dots, k\}: \ 0 \le \Phi_i(x) \le 1$*

[8] Pro $\mu = 0$ mluvíme o oblastech s hranicí $\mathcal{C}^k$.



Obr. A.2: Oblast Ω s hranicí $\mathcal{C}^{k,\mu}$



Obr. A.3: Oblast, která není typu $\mathcal{C}^0$

2. $\forall x \in \overline{\Omega}: \ \sum_{i=1}^{k} \Phi_i(x)=1.$

Důkaz. viz. např. Kufner et al. [1977] $\square$

Nyní můžeme přistoupit k hlavní větě tohoto oddílu.

Věta A.3.32 *(o aproximaci až do hranice pro $\Omega \in \mathcal{C}^0$)*

Buď $\Omega \in \mathcal{C}^0$, $p \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Buď $u \in W^{k,p}(\Omega)$, potom existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcí z $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ taková, že $u_n \to u$ ve $W^{k,p}(\Omega)$.

Důkaz.

Vezměme si $O_r = T_r(V_r)$ z definice oblasti se spojitou hranicí a vezměme $O_{M+1} \subset \overline{O_{M+1}} \subset \Omega$ tak, aby $\overline{\Omega} \subset \cup_{r=1}^{M+1} O_r$. Zvolme $\rho > 0$ libovolně, ale pevně.

Krok 1: rozklad jednotky
Použijeme předchozí lemma o rozkladu jednotky A.3.31 na systém $\{O_r\}_{r=1}^{M+1}$ a označíme $u_r = u\phi_r$. Funkce u_r dodefinujeme nulou vně O_r.

Krok 2: aproximace uvnitř
Funkce u_{M+1} má kompaktní nosič ležící uvnitř Ω. Označme

$$\psi_{M+1,n} = (u_{M+1})_{\frac{1}{n}}$$

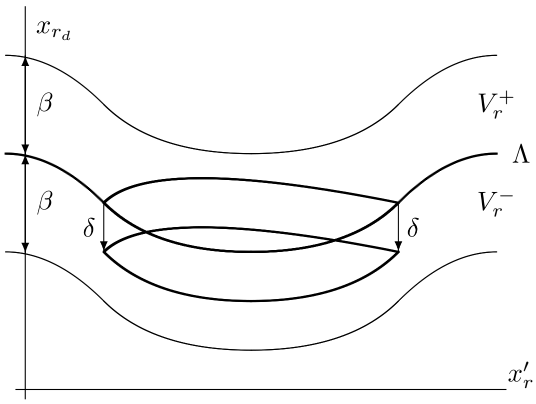
zhlazení funkce u_{M+1}. Zřejmě existuje n_0 takové, že platí

$$\forall n \geq n_0 : \ \|\psi_{M+1,n} - u_{M+1}\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\rho}{2}.$$

Krok 3: "vysunutí funkce ven"
Označme $u_{r,\delta}(x) = u_r(T_r(x'_r, x_{r_d} + \delta))$ vysunutí funkce u_r vně Ω, viz obr. A.4. Díky větě o spojitosti v průměru v p-té mocnině A.2.14 pak můžeme zvolit δ_0 takové, že platí

$$\forall \delta \in (0, \delta_0), \forall r \in \{1, \ldots, M\} : \ \|u_{r,\delta} - u_r\|_{W^{k,p}\left(T_r(V_r^+)\right)} < \frac{\rho}{4M}.$$

Díky "vysunutí" je funkce u_r definována na oblasti o něco větší než V_r^+ a tudíž na V_r^+ budeme moci využít větu o lokální aproximaci A.3.26



Obr. A.4: Posunutí funkce

Krok 4: regularizace u hranice
Vezměme si n_1 dostatečně velké přirozené číslo tak, aby

$$\forall r \in \{1, \ldots, M\}, \forall x'_r \in \Delta_r : u_r(T_r(x'_r, a_r(x'_r))) \neq 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{dist}((x'_r, a_r(x'_r) + \delta_0), \Lambda_r) > \frac{1}{n}.$$

Zřejmě díky spojitosti funkce a_r a vlastnostem funkce u_r takové n_1 existuje. Zvolme nyní posloupnost $\delta_n \to 0^+$.

Nyní pro $n > n_1$ označme pro pevné $\delta_n \in (0, \delta_0)$

$$\psi_{r,\delta_n,n} = (u_{r,\delta_n})_{\frac{1}{n}}.$$

Potom existuje n_2 takové, že

$$\forall n > n_2, \forall r \in \{1, \dots, M\} : \ \|\psi_{r,\delta_n,n} - u_{r,\delta_n}\|_{W^{k,p}(T_r(V^+))} < \frac{\rho}{4M}.$$

Krok 5: konstrukce aproximující posloupnosti
Položme

$$\psi_n = \sum_{r=1}^{M} \psi_{r,\delta_n,n} + \psi_{M+1,n}.$$

Zřejmě je $\psi_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ a pro $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$ takové, že $\delta_n < \delta_0$ (krok 3) platí

$$\|\psi_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \left\| \psi_n - \sum_{r=1}^{M+1} u_r \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|\psi_{M+1,n} - u_{M+1}\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$
$$+ \sum_{r=1}^{M} \Big(\|\psi_{r,\delta_n,n} - u_{r,\delta_n}\|_{W^{k,p}(T_r(V^+))} + \|u_{r,\delta} - u_r\|_{W^{k,p}\left(T_r(V_r^+)\right)} \Big) < \rho.$$

Důkaz je hotov.

□

Poznámka A.3.33 *V krocích 3 a 4 se projevily obě důležité vlastnosti. Jednak jsme potřebovali jednoznačně určený směr dovnitř a ven, v konstrukci čísla n_1 se pak projevila spojitost a_r. To, že nelze bez jistých omezení na hranici Ω očekávat platnost věty A.3.32, ukazuje následující příklad převzatý z Kufner et al. [1977].*

Uvažujme $\Omega = (-2,2) \times (-2,2) \setminus \{[-1,1] \times [-1,1] \cup \{(0,y)|\ y \in (-2,-1)\}\}$ a funkci

$$u(x,y) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ 0 & -1 \leq x < 0,\ -2 < y \leq 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \\ 1 & 0 < x \leq 1,\ -2 < y \leq -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & -1 < x < 1,\ 1 < y < 2. \end{cases}$$

Zřejmě je $u \in W^{k,p}(\Omega)$ pro liovolné $p \in [1,\infty]$, ale není možné zkonstruovat posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, pro kterou by platilo $u_n \to u$ v $W^{k,p}(\Omega)$ pro $p \in [1,\infty)$. To úzce souvisí s tím, že oblast $\Omega \notin \mathcal{C}^0$, kvůli vyjmutí úsečky $\{(0,y)|\ y \in (-2,-1)\}$.

Předchozí větu je možné zformulovat následovně. Je-li $\Omega \in \mathcal{C}^0$, potom je $W^{k,p}(\Omega) \subset \widetilde{W}^{k,p}(\Omega)$ a tudíž díky lemmatu A.3.18 je v tomto případě $W^{k,p}(\Omega) = \widetilde{W}^{k,p}(\Omega)$ pro $p \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$.

V případě, že nebudeme požadovat, aby aproximující posloupnost byla z $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ a bude nám stačit pouze $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, nemusíme již nic předpokládat o hranici Ω, viz. poznámka A.3.33. Budeme ale potřebovat mírně obecnější lemma o rozkladu jednotky.

Lemma A.3.34 *(rozkladu jednotky II)*
Buď $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina a $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} G_i = G$ její otevřené pokrytí. Pak existuje spočetný systém funkcí $\{\varphi_j(x)\}_{j\in\mathcal{J}}$ tak, že platí

1. $\forall j \in \mathcal{J}: \ \varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$
2. $\forall j \in \mathcal{J}, \exists i \in \mathcal{I}: \ \operatorname{supp}\varphi_j \subset G_i$
3. $\forall j \in \mathcal{J}, \forall x \in \Omega: \ \varphi_j(x) \geq 0$
4. $\forall x \in \Omega: \ \sum_{j\in\mathcal{J}} \varphi_j(x) = 1$, *$\varphi_j(x) \neq 0$ pro konečně mnoho j.*

Důkaz. viz. např. Yosida [1980] □

Věta A.3.35 *(o aproximaci hladkými funkcemi na Ω)*
Buď Ω omezená oblast a $u \in W^{k,p}(\Omega)$ pro $p \in [1,\infty)$. Pak existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ funkcí z $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ taková, že $u_n \to u$ v $W^{k,p}(\Omega)$.

Důkaz.

Krok 1: definice pokrytí
Definujeme si množiny

$$\Omega_i = \left\{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \frac{1}{i}\right\}, \ i \in \mathbb{N}.$$

Tyto množiny jsou otevřené, od určitého indexu i neprázdné, $\Omega_k \subset \Omega_j$ pro $j > k$ a $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty \Omega_i$. Platí také, že $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$. Dále si definujeme množiny $(i \geq 1)$

$$V_i = \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega}_{i+1} = \left\{x \in \Omega \mid \frac{1}{i+3} < \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \frac{1}{i+1}\right\}.$$

Tyto množiny jsou opět otevřené. Nyní vhodně dodefinujeme V_0. Chceme, aby tato množina byla otevřená, $\overline{V}_0 \subset \Omega$ a aby platilo $\Omega = \bigcup_{i=0}^\infty V_i$. Pokud je Ω_2 neprázdná, můžeme položit $V_0 = \Omega_2$. Platí také, že $\overline{V}_i \subset \Omega$.

Krok 2: rozklad jednotky
K pokrytí $\{V_i\}_{i=0}^\infty$ sestrojíme rozklad jednotky dle předchozího lemmatu A.3.34. Máme tedy k dispozici systém funkcí $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ tak, že platí

1. $\forall i \in \mathbb{N}_0: \ \varphi_i \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$
2. $\forall i \in \mathbb{N}_0: \ \operatorname{supp}\varphi_i \subset V_i$
3. $\forall i \in \mathbb{N}_0, \forall x \in \Omega: \ \varphi_i(x) \geq 0$
4. $\forall x \in \Omega: \ \sum_{i=0}^\infty \varphi_i(x) = 1$.

Krok 3: vnitřní aproximace na V_i
Pro dané $u \in W^{k,p}(\Omega)$ pak můžeme definovat funkci $u_i = u\varphi_i$. Je zřejmé, že platí $u_i \in W^{k,p}(\Omega)$ a $\operatorname{supp} u_i \subset V_i$. Nyní si zvolme libovolně $\rho > 0$. K tomuto číslu najdeme takové ε_i, že pro zhlazení $(u_i)_{\varepsilon_i} = \eta_{\varepsilon_i} \star (\varphi_i u)$ funkce u_i platí

$$\|u_i - (u_i)_{\varepsilon_i}\|_{W^{k,p}(V_i)} < \frac{\rho}{2^{i+1}};$$

to je jistě možné, stačí využít větu o lokální aproximaci hladkými funkcemi A.3.26. Toto ε_i ještě případně zmenšíme tak, aby "rozmazání" funkce u_i bylo "malé", přesněji aby platilo $\operatorname{supp}((u_i)_{\varepsilon_i}) \subset \Omega_{i+4} \setminus \overline{\Omega}_i$. Samozřejmě platí, že $(u_i)_{\varepsilon_i} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Krok 4: definice aproximující funkce
Definujeme

$$v = \sum_{i=0}^\infty (u_i)_{\varepsilon_i};$$

tato definice má smysl, protože součet je vždy (rozuměj $\forall x \in \Omega$) konečný, protože pokrytí V_i, které jsme sestrojili, je lokálně konečné ($\forall K \subset \Omega$, K kompaktní, je pouze konečně mnoho indexů i, pro které platí $V_i \cap K \neq \emptyset$). Samozřejmě platí, že $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Krok 5: funkce v je dobrá aproximace
Zřejmě platí $u = u\sum_{i=0}^\infty \varphi_i$. Mějme nyní libovolnou kompaktní množinu K; pak ovšem

$$\begin{aligned}\|v-u\|_{W^{k,p}(K)} &= \left\|\sum_{i=0}^{\infty}(u_i)_{\varepsilon_i} - u\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i\right\|_{W^{k,p}(K)} \leq \sum_{\substack{i=0\\ V_i\cap K\neq\emptyset}}^{\infty} \|(u_i)_{\varepsilon_i} - u_i\|_{W^{k,p}(V_i)} \\ &< \rho\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}} = \rho.\end{aligned}$$

Nyní stačí přejít k supremu přes všechny kompaktní množiny $K \subset \Omega$ a dostaneme

$$\|v-u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \rho.$$

Podobně jako ve větě A.3.32 bychom zkonstruovali posloupnost vhodnou volbou $\rho_n \to 0^+$. Důkaz je hotov. □

A.3.4 Narovnání hranice, operátor prodloužení

Ve větě A.3.32 jsme museli řešit zhlazení funkcí z $W^{k,p}(\Omega)$ pomocí "vysunutí", protože na rozdíl od Lebesgueových prostorů jsme nemohli funkce nějak jednoduše prodloužit tak, aby prodloužená funkce měla stejnou hladkost jako funkce původní. V této kapitole si ukážeme, jak lze tento problém vyřešit. Budeme ale potřebovat jistou hladkost hranice oblasti, minimální požadavek bude lipschitzovská spojitost.

Na rozdíl od hölderovských funkcí, kde není prodloužení závislé na hladkosti hranice (viz. např. Kufner et al. [1977]), zde budeme potřebovat, alespoň pro hladké funkce, vyjádřit toto prodloužení explicitně a tudíž bude potřeba pracovat s hranicí, která je plochá. Proto si nejprve ukážeme, jak můžeme obecnou hranici "narovnat", přičemž toto narovnání bude, alespoň ve smyslu ekvivalence, zachovávat normu.

Předpokládejme, že hranice je explicitně popsána rovnicí

$$x_d = a(x'),\ x' \in \Delta = \left\{x' \in \mathbb{R}^{d-1} | i = 1,\dots,d-1:\ |x_i| < \alpha\right\}.$$

Připomeňme si označení z definice A.3.29

$$\begin{aligned} V^+ &= \left\{(x',x_d) \in \mathbb{R}^d |\ x' \in \Delta,\ a(x') < x_d < a(x') + \beta\right\} \\ V^- &= \left\{(x',x_d) \in \mathbb{R}^d |\ x' \in \Delta,\ a(x') - \beta < x_d < a(x')\right\} \\ \Lambda &= \left\{(x',x_d) \in \mathbb{R}^d |\ x' \in \Delta,\ a(x') = x_d\right\} \\ V &= V^+ \cup V^- \cup \Lambda. \end{aligned}$$

Definujeme nové proměnné (y', y_d) vztahy

$$\begin{aligned} x' &= \alpha y' \\ x_d &= a(\alpha y') + \beta y_d, \quad (\text{tj. } x = B(y)) \end{aligned} \tag{A.15}$$

respektive

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\alpha} x' \\
y_d &= \frac{1}{\beta} x_d - \frac{1}{\beta} a(x'), \quad (\text{tj. } y = B^{-1}(x)).
\end{aligned} \tag{A.16}
$$

Zřejmě $B(\cdot)$ zobrazuje krychli $(-1,1)^d$ na oblast $x' \in (-\alpha, \alpha)$, $x_d \in (a(x') - \beta, a(x') + \beta)$, tj. na V. Označme

$$
\begin{aligned}
C^+ &= (-1,1)^{d-1} \times (0,1) \\
C^- &= (-1,1)^{d-1} \times (-1,0).
\end{aligned}
$$

Potom B zobrazuje C^+ na V^+, C^- na V^- a $(-1,1)^{d-1} \times \{0\}$ na Λ. Navíc

Lemma A.3.36 *(narovnání hranice)*
Buďte B a B^{-1} definované pomocí (A.15) a (A.16). Buď $a(\cdot)$ funkce lipschitzovsky spojitá na $\overline{\Delta}$. Potom transformace B i její inverze B^{-1} jsou lipschitzovsky spojité.

Buď dále $u \in W^{1,p}(V^+)$, $p \in [1, \infty)$. Označme $U = u \circ B$. Potom je též $U \in W^{1,p}(C^+)$ a existují kladné konstanty $C_1 = C_1(a, \alpha, \beta, d)$ a $C_2 = C_2(a, \alpha, \beta, d)$ nezávislé na u, tak, že platí

$$
C_1 \|u\|_{W^{1,p}(V^+)} \le \|U\|_{W^{1,p}(C^+)} \le C_2 \|u\|_{W^{1,p}(V^+)} .
$$

Důkaz. Je snadným důsledkem hluboké věty o substituci, viz. např. Lukeš and Malý [1995]. □

Nyní můžeme vyslovit základní větu tohoto oddílu.

Věta A.3.37 *(operátor rozšíření)*
Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a $p \in [1, \infty]$. Pak existuje spojitý lineární operátor

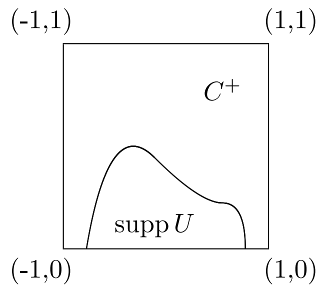
$$
E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)
$$

tak, že

1. *$Eu = u$ na Ω*
2. *Eu má kompaktní nosič v $\mathbb{R}^d$*
3. *existuje $C = C(d, \Omega) > 0$ tak, že*
   $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Důkaz. Uvažujeme nejprve $p \in [1, \infty)$

Krok 1: hladká funkce na krychli
Buď $U \in \mathcal{C}^1(\overline{C}^+)$ taková, že $\operatorname{supp} U \cap \partial C^+ \subset (-1,1)^{d-1} \times \{0\}$, viz. obr. A.5.



Obr. A.5: Nosič funkce U

Položme

$$EU(x) = \begin{cases} U(x) & x \in \overline{C}^+ \\ -3U(x_0, \ldots, x_{d-1}, -x_d) + 4U(x_1, \ldots, x_{d-1}, -\frac{x_d}{2}) & x \in C^- \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zřejmě $\operatorname{supp} EU \subset C = (-1,1)^d$. Ukážeme, že $EU \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Stačí prozkoumat chování funkce EU při přechodu z C^+ do C^-, tedy limity $x_d \to 0^\pm$ pro libovolné $(x_1, \ldots, x_{d-1})$. Je

$$EU(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0^-) = (-3+4)U(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0^+) = U(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0^+)$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, d-1\} : \frac{\partial EU}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0^-)$$
$$= (-3+4)\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0^+) = \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0^+)$$

$$\frac{\partial EU}{\partial x_d}(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0^-) = (3-2)\frac{\partial U}{\partial x_d}(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0^+) = \frac{\partial U}{\partial x_d}(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0^+).$$

Navíc evidentně platí

$$\|EU\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \|EU\|_{W^{1,p}(C)} \leq C \|U\|_{W^{1,p}(C^+)}, \tag{A.17}$$

kde C je pevná konstanta, která nezávisí ani na d ani na p.

Krok 2: sobolevovské funkce na krychli
Buď $U \in W^{1,p}(C^+)$, $\operatorname{supp} U \cap \partial C^+ \subset (-1,1)^{d-1} \times \{0\}$, viz. obr. A.5. Potom podle věty A.3.32 existuje posloupnost $\{U_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{C}^+)$ taková, že $U_n \to U$ v $W^{1,p}(C^+)$, přičemž pro n dostatečně velké se nosič U_n blíží k nosiči U. Pro funkce U_n můžeme použít předchozí krok. Existují tedy $EU_n \in \mathcal{C}^1(\overline{C})$, $\operatorname{supp} EU_n \in C$. Díky linearitě operátoru E, pak z (A.17) máme

$$\|EU_n - EU_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \|EU_n - EU_m\|_{W^{1,p}(C)} \leq C \|U_n - U_m\|_{W^{1,p}(C^+)},$$

aneb je-li U_n cauchyovská posloupnost, pak je cauchyovská i posloupnost EU_n. Hledané prodloužení proto zadefinujeme jako limitu posloupnosti EU_n. Prodloužení má zřejmě všechy požadované vlastnosti z věty. Konstanta c nezávisí ani na d ani na p.

Krok 3: sobolevovská funkce na části okolí hranice
Buď $u \in W^{1,p}(V^+)$, používáme značení z definice A.3.29, taková, že $\operatorname{supp} u \cap \partial V^+ \subset \Lambda$. Situace je zřejmě analogická situaci na krychli, pouze hranice není rovná. Použijeme schéma narovnání hranice a lemma A.3.36. Značíme $U = u \circ B$. Pro funkci U definujeme rozšíření EU tak, jako v předchozím kroku. Prodloužení funkce u pak definujeme jako $Eu = EU \circ B^{-1}$. Prodloužení má zřejmě všechy požadované vlastnosti z věty. Konstanta c ovšem závisí na d a na ∂V^+.

Krok 4: sobolevovské funkce na Ω
Označme, podobně jako v důkazu věty A.3.32, pro $r = 1, \dots, M$ množiny $O_r = T_r(V_r)$ a $O_r^+ = T_r(V_r^+)$, kde T_r je zobrazení z lokálního systému souřadnic (x'_r, x_{r_d}) do pevného systému (x', x_d). Potom $\bigcup\limits_{r=1}^{M} O_r$ je otevřené pokrytí jistého okolí hranice a na tomto okolí použijeme lemma o rozkladu jednotky A.3.31.

Buďte $\Phi_r \in \mathcal{C}_0^\infty(O_r)$ funkce tvořící rozklad jednotky na jistém okolí $\partial\Omega$. Označme $u_r = (u\Phi_r) \circ T_r$. Funkce u_r splňuje předpoklady předcházejícího kroku a existuje tedy příslušné prodloužení Eu_r. Potom

$$Eu = \sum_{r=1}^{M} (Eu_r) \circ T_r^{-1}$$

je prodloužení funkce u. Prodloužení má zřejmě všechy požadované vlastnosti z věty. Konstanta c ovšem závisí na d a na Ω.

Věta je dokázána pro $p \in [1, \infty)$.

Buď nyní $p = \infty$. Protože je Ω omezená, je $W^{1,\infty}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ a podle předchozího proto existuje prodloužení Eu funkce u pro každé $p < \infty$. Máme

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le c_1\,\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)},$$

přičemž konstantu c_1 lze volit nezávislou na p. Z věty (A.2.11) potom plyne, že $Eu \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ a Eu splňuje požadavky z věty pro $p = \infty$. Důkaz je hotov. $\square$

Nabízí se otázka, zda je možné provést analogickou konstrukci i pro prostory $W^{k,p}(\Omega)$, $k > 1$. Krok jedna předchozího důkazu je zřejmě možné modifikovat tak, aby $Eu \in \mathcal{C}^k(\overline{C})$, $k \in \mathbb{N}$. Ovšem v kroku tři budeme potřebovat hladší hranici. Z analogie s lemmatem o narovnání hranice A.3.36 stačí, aby bylo $\Omega \in \mathcal{C}^{k-1,1}$ (proveďte podrobně). Tato podmínka může být pro $k > 1$ příliš restriktivní.

Existuje ještě jiná metoda prodloužení funkcí z $W^{k,p}(\Omega)$, tzv. Calderónova metoda (metodě z věty A.3.37 se říká Nikolského metoda). Calderónova metoda je založena na integrální reprezentaci funkcí a ke konstrukci prodloužení pro libovolné k stačí $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Touto metodou však nelze zkonstruovat prodloužení pro $p = 1$ a $p = \infty$. Podrobnější informace (pro $p = 2$) je možné nalézt v Nečas [1967] či Ženíšek [2001], zobecnění pro $p \neq 2$ si čtenář ovládající teorii

Fourierových multiplikátorů může provést sám. Omezení $p \neq 1$ a $p \neq \infty$ souvisí s tím, že $L^p - L^p$ odhady singulárních integrálů pro $p = 1$ a $p = \infty$ obecně neplatí.

A.3.5 Věty o spojitém a kompaktním vnoření

Připomeňme si definice pojmů spojité **??** a kompaktní vnoření **??**.

Věty o spojitém vnoření

Připomeňme si příklad A.3.14, kde jsme studovali, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}^d$ patří funkce $|x|^{-\alpha}$ do $W^{1,p}(B_1(0))$, resp. do $L^q(B_1(0))$. Ukázali jsme, že pro $\alpha < \frac{d-p}{p}$ je $|x|^{-\alpha} \in W^{1,p}(B_1(0))$, ale současně $|x|^{-\alpha} \in L^q(B_1(0))$ pro každé $q \in [1, \frac{dp}{d-p}]$.

To na jednu stranu naznačuje, že je-li funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pro $p < d$, potom je i $u \in L^q(\Omega)$ pro jistá $q > p$, alespoň pro hladkou oblast Ω, a konečně, že pro $p > d$ už funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$ nemůže mít singularitu typu $|x|^{-\alpha}$ pro nějaké $\alpha > 0$.

Na druhou stranu tento příklad říká, že pro $p < d$ můžeme nanejvýš dokázat, že $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, kde $q \leq \frac{dp}{d-p}$, vyšší exponent by totiž byl v rozporu s citovaným příkladem.

Buď tedy $p < d$. Budeme zkoumat pro jaká jaká q platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Zaměříme se především na situaci, kdy je Ω omezená oblast, některé výsledky ovšem zůstanou v platnosti i pro Ω neomezenou. Pro $|\Omega| < \infty$ je $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro $q \in [1, p]$. Cílem tedy bude ukázat, že q může být větší než p.

Příklad A.3.38 *Pokusme se najít nutnou podmínku na q pro platnost následujícího tvrzení ($p \in [1, d)$):*

$$\exists C > 0, \forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right) : \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \tag{A.18}$$

Vezmněme si $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ pro které platí (A.18) a definujme si funkce

$$u_\lambda = u(\lambda x),\ \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Nerovnost (A.18) má platit pro všechny funkce z $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ s konstantou C nezávislou na u. Speciálně proto musí platit pro každou funkci u_λ. Výpočtem dostaneme

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{-\frac{d}{q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$$
$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{1-\frac{d}{p}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

a nerovnost (A.18) je

$$\lambda^{-\frac{d}{q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda^{1-\frac{d}{p}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

parametr λ lze ovšem volit libovolně, proto je pro platnost výše uvedené nerovnosti nezbytné, aby bylo

$$1 + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} = 0, \text{ neboli } q = \frac{pd}{d-p}.$$

Ukážeme nyní, že (A.18) skutečně platí, přinejmenším pro $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Lemma A.3.39 *(Gagliardo)*
Buď $u_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ pro $i = 1, \ldots, N$, kde[9] *$u_i = u_i\,(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_d)$. Potom pro $d \geq 2$ platí*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} |u_i| dx \leq \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_i|^{d-1} dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_d \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

<u>*Důkaz*</u>.

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle dimenze d.

Krok 1: $d = 2$
Platnost lemmatu pro $d = 2$ je snadným důsledkem Fubiniho věty

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_1(x_2)||u_2(x_1)| dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} |u_1(x_2)| dx_2 \int_{\mathbb{R}} |u_2(x_1)| dx_1.$$

Krok 2: indukce
Předpokládejme, že tvrzení platí pro $d-1$ a dokážeme, že platí i pro d

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_1| \ldots |u_{d-1}||u_d| dx_1 \ldots dx_d = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_1| \left(\int_{\mathbb{R}} |u_2| \ldots |u_d| dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_d.$$

Integrál přes $\mathbb{R}$ odhadneme užitím zobecněné Hölderovy nerovnosti A.2.7 s $p_i = d-1$

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_1| \left(\int_{\mathbb{R}} |u_2| \ldots |u_d| dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_d$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_1| \prod_{i=2}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_i|^{d-1} dx_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} dx_2 \ldots dx_d.$$

Použijeme Hölderovou nerovnost na integrál přes $\mathbb{R}^{d-1}$ a dostaneme ($p = d-1$,

[9] Používáme značení $(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$, obdobně $dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_d = dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_d$, $\widehat{x_i}$ tedy značí vynechání.

$p' = \frac{d-1}{d-2}$)

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_1| \prod_{i=2}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_i|^{d-1} dx_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} dx_2 \dots dx_d \\
&\qquad \le \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_1|^{d-1} dx_2 \dots dx_d \right)^{\frac{1}{d-1}} \times \\
&\qquad \times \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{i=2}^{d} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |u_i|^{d-1} dx_1 \right)^{\frac{1}{d-2}}}_{=g_i(x_2,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_d) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{d-2})} dx_2 \dots dx_d \right)^{\frac{d-2}{d-1}}.
\end{aligned}$$

Pro g_i pak podle indukčního předpokladu platí

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{i=2}^{d} g_i dx_2 \dots dx_d \le \prod_{i=2}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-2}} |g_i|^{d-2} dx_2 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_d \right)^{\frac{1}{d-2}}.$$

Celkem

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} |u_1| \dots |u_d| dx_1 \dots dx_d \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_1|^{d-1} dx_2 \dots dx_d \right)^{\frac{1}{d-1}} \left(\prod_{i=2}^{d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_i|^{d-1} dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_d \right)^{\frac{1}{d-1}},
\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat. □

Věta A.3.40 *(Gagliardo–Nirenberg)*
Buď $p \in [1, d)$. Pak pro $p^\star = \frac{pd}{d-p}$ platí

$$\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^d)} \le \frac{p(d-1)}{d-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{A.19}$$

<u>*Důkaz*</u>.

Krok 1: $p = 1$
Pro $p = 1$ je adjungovaný exponent $p^\star = \frac{d}{d-1}$. Zřejmě platí

$$u(x) = u(x_1, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} (x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_d)\, ds,$$

tedy

$$|u(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u (x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_d)| ds,$$

odkud

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u\,(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_d)|\, ds \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Nerovnost zintegrujeme přes $\mathbb{R}^d$ a dostaneme

$$\|u\|^{\frac{d-1}{d}}_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u\,(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_d)|\, ds \right)^{\frac{1}{d-1}} dx.$$

Na pravou stranu nerovnosti použijeme lemma A.3.39, kde volíme

$$u_i\,(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_d) = \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u\,(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_d)|\, ds \right)$$

a výsledkem je

$$\|u\|^{\frac{d}{d-1}}_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u| dx \right)^{\frac{1}{d-1}} = \|\nabla u\|^{\frac{d}{d-1}}_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

což jsme chtěli ukázat.

Krok 2: libovolné $p \in [1, d)$

Definujme si funkci $u = |v|^\gamma$ pro $\gamma > 0$. Z předchozího bodu důkazu plyne, že

$$\||v|^\gamma\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\gamma \frac{d}{d-1}} \right)^{\frac{d-1}{d}} \leq \|\nabla |v|^\gamma\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla |v|^\gamma|.$$

Spočteme gradient a použijme Hölderovu nerovnost (na pravé straně chceme mít $\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla |v|^\gamma| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \gamma |v|^{\gamma-1} |\nabla v| \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Máme tedy

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\gamma \frac{d}{d-1}} \right)^{\frac{d-1}{d}} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{A.20}$$

Nyní zvolíme γ tak, aby exponenty u $|v|$ byly na obou stranách stejné, požadujeme proto

$$\gamma \frac{d}{d-1} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1},$$

odkud

$$\gamma = \frac{p\,(d-1)}{d-p}.$$

Pak (A.20) přejde na

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\frac{pd}{d-p}}\right)^{\frac{d-1}{d}} \leq \frac{p\,(d-1)}{d-p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\frac{pd}{d-p}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} .$$

Můžeme vydělit (pro $|v| \equiv 0$ je nerovnost splněna triviálně) a výsledkem je

$$\|v\|_{L^{\frac{pd}{d-p}}(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\frac{pd}{d-p}}\right)^{\frac{d-p}{pd}} \leq \frac{p\,(d-1)}{d-p} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} ,$$

což jsme chtěli ukázat. □

Důsledek A.3.41

1. *$\forall p \in [1,d):\ W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L^{p^\star}\left(\mathbb{R}^d\right)$ a $\forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ platí nerovnost (A.19).*
2. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Potom $\forall p \in [1,d):\ W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$ a pro všechna $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ platí nerovnost (A.19).*

Důkaz. V obou případech jsou v daném prostoru husté hladké funkce s kompaktním nosičem. Tvrzení je proto snadným důsledkem limitního přechodu v nerovnosti (A.19) (proveďte podrobně). □

Nerovnost (A.19) umožňuje dokazovat tvrzení typu

$$\|u\|_{L^r\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq C \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^q\left(\mathbb{R}^d\right)} ,$$

kde $q \leq r \leq p^\star$ pro $p < d$, $r < \infty$ pro $p = d$ a $r \leq \infty$ pro $p > d$.

Příklad A.3.42 *Ukážeme, že*[10]

1. *Pro $d = 2$ je $\|v\|_{L^4\left(\mathbb{R}^2\right)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2\left(\mathbb{R}^2\right)} \|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2\left(\mathbb{R}^2\right)}$.*
2. *Pro $d = 3$ je $\|v\|_{L^4\left(\mathbb{R}^3\right)} \leq \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \|\nabla v\|^{\frac{3}{4}}_{L^2\left(\mathbb{R}^3\right)} \|v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2\left(\mathbb{R}^3\right)}$.*

Budeme vycházet z nerovnosti (A.19) pro $p = 1$. Vezměme pro $d = 2$ $u = |v|^2$ a počítejme

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v|^4 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla |v|^2|\right)^2 \leq 4\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v||v| dx\right)^2 \leq 4 \|\nabla v\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}^2\right)} \|v\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}^2\right)} .$$

Odmocněním dostaneme požadovanou nerovnost pro $d = 2$.

Pro $d = 3$ volme $u = |v|^{\frac{8}{3}}$, pak

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v|^4 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |v|^{\frac{8}{3}}|\right)^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v||v|^{\frac{5}{3}} dx\right)^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v||v|^{\frac{1}{3}}|v|^{\frac{4}{3}} dx\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\leq \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \|\nabla v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2\left(\mathbb{R}^3\right)} \|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2\left(\mathbb{R}^3\right)} \|v\|^2_{L^4\left(\mathbb{R}^3\right)} ,$$

nyní stačí vydělit $\|v\|^2_{L^4(\mathbb{R}3)}$ a odmocněním dostaneme požadovanou nerovnost pro $d = 3$.

[10] Konstanty, které získáme, nejsou optimální a dají se najít lepší, viz. např. Temam [2001]. To nás ale v tomto okamžiku příliš nezajímá.

Poznámka A.3.43 *Na základě analogických úvah je možné dokázat*[11], *že pro* $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *platí*

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbb{R}^d)}, \tag{A.21}$$

kde $\frac{1}{r} = \alpha\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{d}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{q}$, $\alpha \in [0,1]$ *resp.* $\alpha \in [0,1)$ *pro* $p > d$, $q \leq r \leq \frac{dp}{d-p}$ *pro* $p < d$, $r < \infty$ *pro* $p = d$ *a* $r \leq \infty$ *pro* $p > d$. *Konstanta* $C = C(p,q,r,d)$. *Z hustoty je potom možné rozšířit tyto nerovnosti i na funkce* $u \in L^r(\mathbb{R}^d)$, *pro které je* $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Věta A.3.44 *(vnoření, $p < d$)*
Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in [1,d)$. *Pak platí*

$$\forall q \in [1,p^\star] : W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Přesněji

$$\forall q \in [1,p^\star], \exists C = C(p,d,q,\Omega), \forall u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{A.22}$$

<u>*Důkaz*</u>.
Protože $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, existuje podle věty A.3.37 operátor rozšíření

$$E : u \in W^{1,p}(\Omega) \to Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

tak, že

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

a nosič prodloužené funkce Eu je kompaktní množina v $\mathbb{R}^d$. Konstanta C nezávisí na u.

Z důsledku A.3.41 pak plyne

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{p(d-1)}{d-p} \|\nabla(Eu)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \frac{p(d-1)}{d-p} \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Tvrzení věty je pak důsledkem této nerovnosti, triviálního vnoření $L^{p^\star}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro Ω omezenou a $q \in [1,p^\star]$ (viz. A.2.8) a tranzitivnosti spojitého vnoření.

□

Poznámka A.3.45 *Zatímco na* $\mathbb{R}^d$ *platí (A.19)*

$$\|u\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{p(d-1)}{d-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

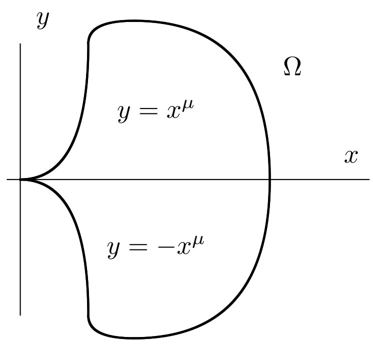
[11] Opět existují důkazy, které vedou k optimálnějším hodnotám konstant C.

pro omezenou množinu Ω máme pouze (A.22)

$$\|u\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq \tilde{C} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

tj. na pravé straně je celá norma v $W^{1,p}(\Omega)$, nikoliv pouze norma gradientu. Nerovnost typu (A.19) lze na omezených množinách očekávat pouze ve speciálních případech, jako např. na $W_0^{1,p}(\Omega)$ (viz. důsledek A.3.41). Naproti tomu na celém prostoru je vlastně aditivní konstanta určena požadavkem, že u jde v nekonečnu k nule (ve smyslu $u \in L^{p^\star}\left(\mathbb{R}^d\right)$) a tudíž platí nerovnost (A.19).

Na celém prostoru máme pouze $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^d\right)$ pro $q \in [p, p^\star]$. Nelze totiž obecně očekávat, že bude $u \in L^q\left(\mathbb{R}^d\right)$ pro $q < p$.



Obr. A.6: Oblast Ω z příkladu A.3.46

Příklad A.3.46 *Ukážeme, že podmínka $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ je skutečně nutná. Předpokládejme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ má část hranice popsanou rovnicí $|y| = x^\mu$, $\mu > 1$, $x \in [0,1]$ a zbytek hranice je hladký, viz. A.6 . Zřejmě je potom $\Omega \in \mathcal{C}^{0,\frac{1}{\mu}}$ (je třeba uvažovat popis $x = |y|^{\frac{1}{\mu}}$, $y \in [-1,1]$). Nyní, podobně jako v příkladu A.3.14, uvažujme na Ω funkce typu $u(x,y) = x^{-a}$, přičemž se budeme zabývat okolím počátku. Potom*

$$u \in L^q(\Omega) \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\int_{-x^\mu}^{x^\mu} (x)^{-aq} dy \right) dx < \infty,$$
$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\int_{-x^\mu}^{x^\mu} (x)^{-(a-1)p} dy \right) dx < \infty,$$

odkud dostáváme, že

$$u \in L^q(\Omega) \Leftrightarrow q < \frac{1+\mu}{a},$$
$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow a < \frac{1+\mu-p}{p}.$$

Tento příklad ukazuje, že pro $\Omega \in \mathcal{C}^{0,\frac{1}{\mu}}$ máme v nejlepším případě $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro $q_\mu = \frac{(1+\mu)p}{1+\mu-p}$ (tj. $q_\mu = \frac{(d-1+\mu)p}{d-1+\mu-p}$). Zřejmě q_μ je klesající funkcí v μ, $q_1 = p^\star$ a $q_\infty = p$.

Zabývejme se nyní situací $p = d$.

Věta A.3.47 *(vnoření, $p = d$)*
Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Pak platí

$$\forall q \in [1, \infty) : W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

<u>*Důkaz.*</u>
Je-li $q \in [1, d]$ je důkaz zřejmý, neboť Ω je omezená, a proto $L^d(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
Buď tedy $q > d$. Potom existuje $p \in [1, d)$ takové, že $q = p^\star = \frac{dp}{d-p}$ (tj. $p = \frac{dq}{d+q}$) a podle věty A.3.44 je

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Dále pro Ω omezenou a $p < d$ platí $W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$. Celkem

$$W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Důkaz je hotov. $\square$

Cvičení A.3.48 *Ukažte, že funkce $f(x) = \ln\left(\ln\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)\right)$ je pro $d \geq 2$ prvkem $W^{1,d}(B_1(0))$, ale není prvkem $L^\infty(B_1(0))$. Tedy $W^{1,d}(\Omega) \not\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

V oddílu A.3.9 ukážeme, že je-li Ω omezená množina, potom

$$\left(\int_\Omega \left|u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Volbou $\Omega = B_1(0)$ a substitucí $z = x + ry$, $y \in B_1(0)$ dostaneme (proveďte podrobně)

$$\left(\int_{B_r(x)} \left|u - \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u dy\right|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \leq Cr \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))}.$$

Speciálně pro $p = 1$ potom

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} \left|u - \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u dy\right| dz &\leq Cr\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |\nabla u| dz \leq \\ &\leq Cr\frac{1}{|B_r(x)|}\left(\int_{B_r(x)} |\nabla u|^d dz\right)^{\frac{1}{d}} |B_r(x)|^{1-\frac{1}{d}} \leq C\|\nabla u\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Proto $u \in BMO(\mathbb{R}^d)$ (bounded mean oscilations). Tento prostor je Banachův a funkcionál

$$[u]_{BMO(\mathbb{R}^d)} = \sup_{B_r(x)\subset\mathbb{R}^d} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} \left|u - \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u dy\right| dz$$

je seminormou na tomto prostoru. Tento prostor hraje významnou roli v harmonické analýze, kde často nahrazuje roli prostoru $L^\infty(\Omega)$.

Zbývá dořešit případ $p > d$. Příklad (A.3.14) nám naznačoval, že v tomto případě by už funkce u mohla být dokonce hölderovsky spojitá, neboť $|x|^{-\alpha} \in W^{1,p}(B_1(0)) \Leftrightarrow \alpha < \frac{d-p}{p}$, aneb $\alpha < 0$. Dokonce naznačuje, že patří-li u do $W^{1,p}(B_1(0))$, pak už je také v $\mathcal{C}^{0,1-\frac{d}{p}}$. Ukážeme, že tomu tak skutečně je.

Věta A.3.49 *(Morrey)*
Buď $p \in (d, \infty)$. Pak pro $\mu = 1 - \frac{d}{p}$ platí[12]

$$\exists C = C(p,d) > 0, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{\mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} . \tag{A.23}$$

Důkaz.

Připomeňme si definici normy v $\mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)$, viz (A.3).

Krok 1: odhad $\sup_{x_1,x_2 \in \mathbb{R}^d,\ x_1 \neq x_2} \frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|x_1-x_2|^\mu}$

Zvolme si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ libovolně, ale pevně. Označme C_ρ uzavřenou krychli o hraně délky ρ takovou, že x_1 a x_2 leží na protilehlých stranách této krychle. Pak platí

$$\rho \leq |x_1 - x_2| \leq \sqrt{d}\rho. \tag{A.24}$$

Dále je $\forall x \in C_\rho$ a $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_i)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} u(x_i + s(x - x_i)) ds \right| \\
&= \left| \int_0^1 \nabla u(x_i + s(x - x_i)) \cdot (x - x_i) ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |\nabla u(x_i + s(x - x_i))| \, |x - x_i| \, ds \leq \sqrt{d}\rho \int_0^1 |\nabla u(x_i + s(x - x_i))| \, ds,
\end{aligned} \tag{A.25}$$

v poslední nerovnosti jsme užili (A.24).

Další odhad, který v důkazu využijeme, je

$$\left| \left(\frac{1}{\rho^d} \int_{C_\rho} u(x) dx \right) - u(x_i) \right| \leq \frac{1}{\rho^d} \int_{C_\rho} |u(x) - u(x_i)| \, dx,$$

což je díky (A.25)

$$\frac{1}{\rho^d} \int_{C_\rho} |u(x) - u(x_i)| \, dx \leq \frac{\sqrt{d}\rho}{\rho^d} \int_{C_\rho} \int_0^1 |\nabla u(x_i + s(x - x_i))| \, ds dx.$$

Provedeme substituci a zaměníme pořadí integrace

$$\begin{aligned}
z &= x_i + s(x - x_i) \\
dz &= s^d dx \\
C_\rho &\to C_{\rho s}^i = \left\{ z \in \mathbb{R}^d | \, z = x + s(x - x_i), x \in C_\rho \right\},
\end{aligned}$$

pak je

$$\frac{\sqrt{d}}{\rho^{d-1}} \int_{C_\rho} \int_0^1 |\nabla u(x_i + s(x - x_i))| \, ds dx \leq \frac{\sqrt{d}}{\rho^{d-1}} \int_0^1 \frac{1}{s^d} \left(\int_{C_{\rho s}^i} |\nabla u(z)| dz \right) ds.$$

[12] Jak upozorníme níže, konstanta C zůstává pro $p \to \infty$ konečná.

Vnitřní integrál odhadneme Hölderovou nerovností

$$\frac{\sqrt{d}}{\rho^{d-1}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\int_0^1\frac{1}{s^d}|C^i_{\rho s}|^{\frac{p-1}{p}}ds=\frac{\sqrt{d}}{\rho^{d-1}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\int_0^1\frac{1}{s^d}(\rho s)^{\frac{d(p-1)}{p}}ds,$$

integrál přes s je díky předpokladům ($p>d$) konečný. Celkem

$$\left|\left(\frac{1}{\rho^d}\int_{C_\rho}u(x)dx\right)-u(x_i)\right|\le\frac{\sqrt{d}}{1-\frac{d}{p}}\rho^{1-\frac{d}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{A.26}$$

Použijeme nerovností (A.24) a (A.26) k odhadu $|u(x_1)-u(x_2)|$

$$\begin{aligned}|u(x_1)-u(x_2)|&\le\left|\left(\frac{1}{\rho^d}\int_{C_\rho}u(x)dx\right)-u(x_1)\right|+\left|\left(\frac{1}{\rho^d}\int_{C_\rho}u(x)dx\right)-u(x_2)\right|\\&\le\frac{2\sqrt{d}}{1-\frac{d}{p}}\rho^{1-\frac{d}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\le\frac{2\sqrt{d}}{1-\frac{d}{p}}|x_1-x_2|^{1-\frac{d}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Poznamenejme ještě, že stejně můžeme ukázat, že pro x, $y\in C_\rho$

$$|u(x)-u(y)|\le\widetilde{C}(p,d)\rho^{1-\frac{p}{d}}\|\nabla u\|_{L^p(B_{k\rho}(x))}, \tag{A.27}$$

kde $k=k(d)$. Máme tedy ($\mu=1-\frac{d}{p}$)

$$H_{0,\mu}(u)=\sup_{x_1,x_2\in\mathbb{R}^d,x_1\ne x_2}\frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|x_1-x_2|^\mu}\le\frac{2\sqrt{d}}{1-\frac{d}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{A.28}$$

Povšimněte si, že konstanta $C_1(p,d)=\frac{2\sqrt{d}}{1-\frac{d}{p}}$ je omezená pro $p\to\infty$.

Krok 2: odhad $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|u(x)|$
Zvolme si libovolně, ale pevně $x\in\mathbb{R}^d$ a k němu $y\in\mathbb{R}^d$ tak, aby $x,y\in C_\rho$ pro nějaké pevné ρ. Pak je dle (A.28)

$$|u(x)-u(y)|\le C(p,d)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}|x-y|^\mu,$$

odkud s užitím (A.27)

$$|u(x)|\le|u(y)|+C_2(p,d)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}|x-y|^\mu\le|u(y)|+C_2(p,d)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\left|\sqrt{d}\rho\right|^\mu.$$

Nerovnost zintegrujeme přes y na množině C_ρ a výsledkem je

$$|u(x)||C_\rho|\le\int_{C_\rho}|u(y)|dy+|C_\rho|C_2(p,d)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\left(\sqrt{d}\rho\right)^\mu.$$

Integrál na pravé straně odhadneme Hölderovou nerovností tak, abychom dostali normu u v $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$

$$|u(x)||C_\rho|\le|C_\rho|^{\frac{p-1}{p}}\|u\|_{L^p(C_\rho)}+C_2(p,d)\left(\sqrt{d}\rho\right)^\mu|C_\rho|\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

odkud (volíme například $\rho = 1$)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u(x)| \le C_3(p,d)\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}\,. \tag{A.29}$$

Z nerovností (A.28) a (A.29) pak pro $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ plyne

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)} \le C(p,d)\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \tag{A.30}$$

a důkaz je hotov.

□

Díky hustotě $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ v $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ platí nerovnost (A.23) i pro $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Zde si ale musíme dát pozor, neboť $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ znamená, že třída ekvivalentních funkcí, které se mohou lišit na množině míry nula patří do $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Proto musíme být opatrní a pracovat s vhodným reprezentantem této třídy.

Důsledek A.3.50 *Buď $p \in (d,\infty)$. Pak pro $\mu = 1 - \frac{d}{p}$ platí*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^d).$$

Přesněji pro každé $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ existuje reprezentant $u^\star \in \mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)$, $u = u^\star$ skoro všude, takový, že

$$\|u^\star\|_{\mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)} \le C(p,d)\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}\,.$$

<u>*Důkaz*</u>. Ponecháváme na rozmyšlenou čtenáři. □

Z důsledku například plyne, že pro $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $p > d$, jsou všechny body $\mathbb{R}^d$ Lebesgueovy body (viz. definice A.2.19) funkce $u^\star$ a tudíž

$$u^\star(x) = \lim_{r\to 0+} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y)dy.$$

Věta A.3.51 *(vnoření, $p > d$)*
Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in (d,\infty)$. Pak platí

$$\forall \alpha \in [0, 1 - \frac{d}{p}] : W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Přesněji

$$\forall \alpha \in [0, 1 - \frac{d}{p}], \exists C = C(p,d,\alpha,\Omega), \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \exists u^\star \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) :$$
$$u^\star = u \text{ skoro všude}, \ \|u^\star\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,.$$

<u>*Důkaz*</u>.

Protože $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ existuje podle věty A.3.37 operátor rozšíření

$$E : u \in W^{1,p}(\Omega) \to Eu \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

tak, že $(C = C(d,\Omega))$

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

a nosič prodloužené funkce Eu je kompaktní množina v $\mathbb{R}^d$. Konstanta C nezávisí na u.

Z důsledku A.3.50 pak plyne

$$\|u^\star\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{d}{p}}(\overline{\Omega})} \le \|(Eu)^\star\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{d}{p}}(\overline{\Omega})} \le C(d,p)\,\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le C(d,p)\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,.$$

Tvrzení věty je pak důsledkem této nerovnosti, vnoření $\mathcal{C}^{0,1-\frac{d}{p}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ pro Ω omezenou a $\alpha \le 1-\frac{d}{p}$ (viz. A.1.12) a tranzitivnosti spojitého vnoření.

□

Zbývá dořešit případ $p = \infty$. Nyní se ukáže, proč jsme pečlivě kontrolovali závislost konstant na p pro $p \to \infty$.

Důsledek A.3.52 *Buď* $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. *Pak* $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$.

<u>*Důkaz*</u>. Protože je Ω omezená množina, je zřejmě $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ pro libovolné $p < \infty$. Tudíž z věty A.3.51 plyne, že

$$\|u^\star\|_{\mathcal{C}^{0,1-\frac{d}{p}}(\overline{\Omega})} \le C(p,d,\Omega)\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C(p,d,\Omega)\,\|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}\,,$$

přičemž konstanta C je omezená pro $p \to \infty$ (rozmyslete si podrobně). Proto speciálně

$$\forall \mu \in (0,1): \ H_{0,\mu}(u^\star) = \sup_{x_1,x_2\in\Omega, x_1\ne x_2} \frac{|u^\star(x_1) - u^\star(x_2)|}{|x_1-x_2|^\mu} \le C$$

a konstanta C je nezávislá na μ. Proto též $H_{0,1}(u^\star) \le C$ a důkaz je hotov. □

Poznámka A.3.53

V oddílu A.3.10, tvrzení A.3.95, ukážeme, že $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$ *pro libovolnou otevřenou množinu* Ω. *V takovém případě tedy máme* $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}) = W^{1,\infty}(\Omega)$, *což je opět třeba chápat ve smyslu reprezentantů, tj. pro každé* $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *existuje* $u^\star \in \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$ *tak, že* $u = u^\star$ *skoro všude.*

Věty o kompaktním vnoření

Připomeňme, že v metrických prostorech je $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ ekvivalentní tomu, že z každé omezené posloupnosti v X lze vybrat cauchyovskou podposloupnost v Y (a tedy silně konvergentní pokud je Y úplný).

Opět budeme zvlášť studovat případy $p < d$, $p = d$, $p > d$ a budeme uvažovat $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. V prvním případě máme

Věta A.3.54 *(kompaktní vnoření, $p < d$)*
Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in [1, d)$. Pak platí

$$\forall q \in [1, p^\star) : \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega),$$

kde $p^\star = \frac{dp}{d-p}$.

<u>Důkaz</u>.

V lemmatu A.3.55 níže ukážeme, že pro $p \in [1, \infty)$ je $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$. Buď nyní $p < d$. Je-li $q \in [1, p]$, je důkaz snadný, neboť

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Je-li $q \in (p, p^\star)$, potom víme, že $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$. Buď $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ omezená posloupnost ve $W^{1,p}(\Omega)$ a $\{u_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ její silně konvergentní podposloupnost v $L^p(\Omega)$.

Potom díky interpolační nerovnosti A.2.9 platí

$$\|u_{n_k} - u_{n_l}\|_{L^q(\Omega)} \le \|u_{n_k} - u_{n_l}\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|u_{n_k} - u_{n_l}\|_{L^{p^\star}(\Omega)}^{1-\alpha},$$

kde $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^\star}$ a $\alpha \in (0,1)$ pro $q \in (p, p^\star)$.

Díky vnoření $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$ pak víme, že posloupnost $\{u_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ je omezená v $L^{p^\star}(\Omega)$. Pak ovšem z předchozího vztahu plyne, že uvažovaná posloupnost je cauchyovská v $L^q(\Omega)$ pro $q < p^\star$. Důkaz je hotov. $\square$

Lemma A.3.55 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in [1, \infty)$. Pak platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.*

<u>Důkaz</u>.

Nechť je $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ omezená posloupnost v $W^{1,p}(\Omega)$. Cílem je ukázat, že existuje vybraná podposloupnost $\{u_{n_k}\}_{n=1}^\infty$, která je silně konvergentní v $L^p(\Omega)$.

Důkaz provedeme pro $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Pro $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset W^{1,p}(\Omega)$ pak stačí místo posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ uvažovat posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ pro kterou platí $\|u_n - v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \frac{1}{n}$. Existence této posloupnosti je zaručena z věty o hustotě hladkých funkcí A.3.32.

Posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ je zjevně omezená v $W^{1,p}(\Omega)$ a je cauchyovská v $L^p(\Omega)$ právě když je v $L^p(\Omega)$ cauchyovská posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$.

Buď tedy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ omezená posloupnost v $W^{1,p}(\Omega)$. Díky tomu, že $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ je tato posloupnost omezená i v jistém $L^q(\Omega)$ pro $q > p$.

Zvolme například $q = \frac{dp}{d-\frac{1}{2}}$. Potom je $p < \frac{dp}{d-\frac{1}{2}} < \frac{dp}{d-p}$ pro každé $d \geq 2$ a $p \in [1, \infty)$. Označme

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\
c_2 &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^{\frac{dp}{d-\frac{1}{2}}}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Chceme využít větu A.2.28 o charakterizaci totálně omezených množin v $L^p(\Omega)$. Nezbývá tedy, než ověřit její předpoklady. Zvolme $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathbb{R}^d, \|h\|_{\mathbb{R}^d} < \delta : \left(\int_{\Omega} |u_n(x+h) - u_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.
$$

Opět předpokládáme, že u_n je prodloužená nulou vně Ω.

Vezměme $\Omega^\star \subset \overline{\Omega^\star} \subset \Omega$ tak, že $|\Omega \setminus \Omega^\star| < \left(\frac{\varepsilon}{3c_2}\right)^{2d}$. Dále vezměme $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in \Omega^\star$, $h \in \mathbb{R}^d$, $\|h\|_{\mathbb{R}^d} < \delta_1$ je též $x + h \in \Omega$. Označme nyní $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{3pc_1}\right\}$. Potom

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} |u_n(x+h) - u_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\Omega^\star} |u_n(x+h) - u_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_{\Omega\setminus\Omega^\star} |u_n(x+h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega\setminus\Omega^\star} |u_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \quad \text{(A.31)}
\end{aligned}
$$

Poslední dva integrály odhadneme užitím Hölderovy nerovnosti

$$
2\|u_n\|_{L^{\frac{dp}{d-\frac{1}{2}}}(\Omega)} |\Omega \setminus \Omega^\star|^{\frac{1}{2d}} < \frac{2}{3}\varepsilon.
$$

Zbývá první člen na pravé straně. Zřejmě

$$
\begin{aligned}
|u_n(x+h) - u_n(x)|^p &= \left|\int_0^1 \frac{d}{ds} u_n(x+sh) ds\right|^p \\
&\leq \left|\int_0^1 |\nabla u_n(x+sh)||h| ds\right|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u_n(x+sh)|^p ds. \quad \text{(A.32)}
\end{aligned}
$$

Zintegrujeme (A.32) přes $\Omega^\star$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega^\star} |u_n(x+h) - u_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq |h| \left(\int_{\Omega^\star} \int_0^1 |\nabla u_n(x+sh)|^p ds dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |h| \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

Dosadíme do (A.31) a výsledkem je

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathbb{R}^d, \|h\|_{\mathbb{R}^d} < \delta : \left(\int_\Omega |u_n(x+h) - u_n(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

což jsme chtěli ukázat.

Ověření zbývajících podmínek Kolmogorovovy věty je triviální. Lemma je dokázáno.

□

Po důkladném pročtení důkazu lemmatu A.3.55 vidíme, že jediné místo, kde jsme použili předpoklad $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, bylo v odhadu $\left(\int_{\Omega\setminus\Omega^\star} |u_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ pomocí Hölderovy nerovnosti a věty o spojitém vnoření. Jednou z možností jak oslabit předpoklady věty na hladkost hranice Ω je použít poznámku z příkladu A.3.46, tj. potom $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ pro $p \in [1,\infty)$, $\Omega \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ pro libovolné $\alpha > 0$. Ukážeme, že ve skutečnosti stačí pouze $\Omega \in \mathcal{C}^0$. Důkaz provedeme nezávisle na větách o vnoření pro oblasti s hölderovsky spojitou hranicí.

Lemma A.3.56 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^0$, $p \in [1,\infty)$. Pak platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.*

Důkaz.

Zřejmě stačí ukázat, že je-li $\Omega \subset \mathcal{C}^0$, potom pro posloupnost $\{U_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, existuje množina $\Omega^\star$ taková, že $\Omega^\star \subset \overline{\Omega^\star} \subset \Omega$ a pro $|\Omega\setminus\Omega^\star|$ malé jsou i integrály $\int_{\Omega\setminus\Omega^\star} |u_n(x+h)|^p dx$ a $\int_{\Omega\setminus\Omega^\star} |u_n(x)|^p dx$ malé.

Jinými slovy chceme ukázat, že pro $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ a vhodné $\Omega^\star$ je

$$\left(\int_{\Omega\setminus\Omega^\star} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < c(\Omega^\star) \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)},$$

kde $c(\Omega^\star)$ jde k nule pro $|\Omega \setminus \Omega^\star| \to 0$ (integrál s $u(x+h)$ vyžaduje jen drobné úpravy, kterém ponecháváme čtenáři na rozmyšlenou).

Označme

$$\Omega_\delta = \bigcup_{r=1}^M T_r(V^+_{r,\delta}),$$

kde[13] T_r je zobrazení z lokálního souřadného systému (x'_r, x_{r_d}) do $(x', x_d$ a

$$V^+_{r,\delta} = \left\{ (x'_r, x_{r_d}) \in \mathbb{R}^d | \ x'_r \in \Delta_r, \ a_r(x'_r) < x_{r\,d} < a_r(x'_r) + \delta \right\}.$$

Připomeňme, že $V^+_{r,\beta} = V^+_r$. Zvolme δ_1 dosti malé tak, aby byl systém funkcí$\{\phi_r\}_{r=1}^M$, $\phi_r \in \mathcal{C}_0^\infty(T_r(V^+_r))$ rozkladem jednotky na Ω_{δ_1}. Potom zřejmě pro libovolné $\delta \le \delta_1$ platí

$$\left(\int_{\Omega_{\delta_1}} |u_n(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{r=1}^m \left(\int_{T_r(V^+_{r,\delta})} |u_r|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

kde značíme $u_r = u\phi_r$. Zřejmě tedy stačí odhadnout jednotlivé integrály na pravé straně právě uvedné nerovnosti.

Buď nyní $r \in \{1, \dots, M\}$ libovolné, ale pevné. Pro $x_{r_d} \in (a_r(x'_r), a_r(x'_r) + \delta)$, $\delta \le \delta_1 < \beta$ máme

$$|u_r(x'_r, x_{r_d})|^p = \left| \int_{x_{r_d}}^{a_r(x'_r)+\beta} \frac{d}{ds} u_r(x'_r, s) ds \right|^p \le C(\beta) \int_{a_r(x'_r)}^{a_r(x'_r)+\beta} |\nabla u_r(x'_r, s)|^p ds.$$

[13] Užíváme značení z definice A.3.29.

Nerovnost zintegrujeme přes proměnnou x_{r_d} od $a_r(x'_r)$ do $a_r(x'_r)+\beta$ a přes proměnnou x'_r na množině δ_r, výsledkem je

$$\int_{\delta_r}\int_{a_r(x'_r)}^{a_r(x'_r)+\beta}|u_r(x'_r,x_{r_d})|^p dx_{r_d}dx'_r \leq \delta C(\beta)\int_{\delta_r}\int_{a_r(x'_r)}^{a_r(x'_r)+\beta}|\nabla u_r(x'_r,s)|^p ds dx'_r$$

a tudíž

$$\|u_r\|_{L^p\left(T_r(V^+_{r,\delta})\right)} = \left(\int_{\delta_r}\int_{a_r(x'_r)}^{a_r(x'_r)+\beta}|u_r(x'_r,x_{r_d})|^p dx_{r_d}dx'_r\right)^{\frac{1}{p}} \leq \delta^{\frac{1}{p}}C(\beta)^{\frac{1}{p}}\|\nabla u_r\|_{L^p\left(T_r(V^+_r)\right)}.$$

Stačí tedy zvolit δ dostatečně malé ($\leq \delta_1$).

□

Důsledek A.3.57 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^0$, $p \in [1,d)$. Pak platí*

$$\forall q \in [1,p]: \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Důkaz. Je analogický důkazu věty A.3.54. □

Nyní pro $p \geq d$ máme

Věta A.3.58 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Pak platí*

1. $\forall q \in [1,\infty): \ W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$
2. $p > d, \mu \in [0, 1-\frac{d}{p}): \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\mu}(\Omega)$

a tedy speciálně pro $p > d$, $q \in [1,\infty]$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Důkaz. První tvrzení je zřejmým důsledkem věty A.3.47 a A.3.54. Druhé tvrzení pak plyne z vět A.3.51 a A.1.13. □

Shrňme výsledky této kapitoly. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$.

1. Je-li $p \in [1,d)$, potom $\forall q \in [1, \frac{dp}{d-p}]$ platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, přičemž vnoření je kompaktní pro $q \in [1, \frac{dp}{d-p})$.
2. Je-li $p = d$, potom $\forall q \in [1,\infty)$ platí $W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ (ale $W^{1,d}(\Omega) \not\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$).
3. Je-li $p \in (d,\infty)$, potom $\forall \mu \in [0, 1-\frac{d}{p}]$ platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\mu}(\Omega)$ přičemž vnoření je kompaktní pro $\mu \in [0, 1-\frac{d}{p})$.
4. Je-li $p = \infty$, potom $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$ a tudíž $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{0,\mu}(\Omega)$ pro libovolné $\mu \in [0,1)$.

Indukcí je možné dokázat

Věta A.3.59 *(obecné Sobolevovy nerovnosti)*
Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$*,* $k \in \mathbb{N}$ *a* $p \in [1, \infty]$*. Buď dále* $j \in [0, k)$*. Označme*

$$m_0 = \frac{1}{p} - \frac{k-j}{d}$$

a (je–li $m_0 \neq 0$*)*

$$m = \frac{1}{m_0}.$$

Je-li $m_0 > 0$*, pak*

1. $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,m}(\Omega)$
2. $\forall m_1 < m : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,m_1}(\Omega)$
3. $W^{k,p}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow W^{j,m}\left(\mathbb{R}^d\right).$

Je-li $m_0 = 0$*, pak*

1. $\forall q \in [1, \infty) : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega).$

Je-li $m_0 < 0$*, pak pro* $\mu = -dm_0$ *platí*

1. $\mu \in (0, 1)$
$$\begin{cases} W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\mu}(\overline{\Omega}) \\ \forall \alpha \in [0, \mu) : \ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\alpha}(\overline{\Omega}) \end{cases}$$
2. $\mu = 1$
$$\begin{cases} p \neq \infty : \ \forall \alpha \in [0, 1) : \ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ p = \infty : \ W^{k,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k-1,\infty}(\overline{\Omega}) \end{cases}$$
3. $\mu > 1$
$\forall \alpha \in [0, 1] : \ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\alpha}(\overline{\Omega}).$

Důkaz. Indukcí, viz. též Kufner et al. [1977] či Nečas [1967]. □

A.3.6 Věty o stopách

Protože Sobolevovy prostory zavádíme kvůli formulaci okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice, musíme mít možnost hovořit s hodnotách sobolevovských funkcí na hranici oblasti Ω. Tento problém je možné řešit dvojím způsobem. Jednak je možné použít pojmu kapacita množiny (tento přístup je možno nalézt například v Mazja [1985]), častější je ovšem postup založený na rozšíření jistého lineárního operátoru. Tento postup použijeme.

Jestliže je $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pro $p > d$, potom za patřičných předpokladů na hladkost Ω existuje reprezentant $u^\star \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tak, že $u = u^\star$ skoro všude na Ω. Hodnota na hranici je tudíž dobře definovaná a víme, že funkce je omezená (a dokonce hölderovsky spojitá). Proto se v celém oddílu soustředíme pouze na případ $p \leq d$.

V tomto případě již není jasné, co je hodnota funkce na hranici, neboť d-dimenzionální míra hranice je nula. Na druhou stranu víme, že v $W^{1,p}(\Omega)$ jsou husté funkce hladké až do hranice (alespoň pro $\Omega \in \mathcal{C}^0$), zúžení funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$ na $\partial\Omega$ má tedy smysl pro hustou podmnožinu $W^{1,p}(\Omega)$. Stačí proto studovat, jestli je operátor zúžení funkce $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ na $\partial\Omega$ omezený jako operátor z $W^{1,p}(\Omega)$ do jistého prostoru funkcí definovaného na hranici. Ukážeme, že tomu tak je.

Prostory $L^p(\partial\Omega)$

Dále budeme používat značení zavedené v definici oblastí typu $C^{k,\mu}$, viz. definice A.3.29. Buď u funkce, která je definovaná skoro všude na $\partial\Omega$. Je-li T_r zobrazení (rotace a translace) z lokálního souřadného systému (x'_r, x_{r_d}) do globálního souřadného systému (x', x_d), budeme značit ${}_r u = u \circ T_r$. V celém oddílu budeme, pokud nebude řečeno jinak, pracovat pouze s hranicí typu $\mathcal{C}^{0,1}$.

Definice A.3.60 *(prostory $L^p(\partial\Omega)$)*

Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a buď u funkce definovaná skoro všude na $\partial\Omega$. Řekneme, že fukce u je prvkem $L^p(\partial\Omega)$, $p \in [1,\infty)$ právě když

$$\forall r = 1,\dots,M : \int_{\Lambda_r} |{}_r u(x_r)|^p dS = \int_{\Delta_r} |{}_r u(x'_r, a_r(x'_r))|^p \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x'_{r_i}}\right)^2 (x'_r)dx'_r} < \infty.$$

Řekneme, že fukce u je prvkem $L^\infty(\partial\Omega)$, $p \in [1,\infty)$ právě když

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\partial\Omega} |u(x)| < \infty.$$

Označme

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{r=1}^{M} \int_{\Lambda_r} |{}_r u(x_r)|^p dS\right)^{\frac{1}{p}} & p \in [1,\infty) \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\partial\Omega} |u(x)| & p = \infty. \end{cases} \tag{A.33}$$

Lze dokázat následující větu (viz. Kufner et al. [1977] nebo Nečas [1967]).

Věta A.3.61 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Potom je $L^p(\partial\Omega)$ s normou definovanou v (A.33) Banachův prostor, který je separabilní pro $p \in [1,\infty)$ a reflexivní pro $p \in (1,\infty)$.*

Poznámka A.3.62 *Připomeňme (viz. poznámka A.1.5), že je-li $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, potom je funkce $a_r(\cdot)$ diferencovatelná skoro všude na Δ_r a existuje konstanta $C > 0$ taková, že $\left|\frac{\partial a_r}{\partial x'_{r_i}}\right| \leq C < \infty$ skoro všude na Δ_r. Proto pro $p \in [1, \infty)$ můžeme místo normy (A.33) používat ekvivalentní normu*

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left(\sum_{r=1}^{M} \int_{\Delta_r} |_r u(x'_r, a_r(x'_r))|^p \, dx'_r \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{A.34}$$

se kterou se nám bude lépe pracovat.

Dále platí

Věta A.3.63 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, u funkce definovaná skoro všude na $\partial\Omega$, taková, že je nenulová pouze na Λ_r pro nějaké $r \in \{1, \dots, M\}$ pevné. Nechť dále pro jisté p platí $\int_{\Delta_r} |_r u(x'_r, a_r(x'_r))|^p \, dx'_r < \infty$. Pak $u \in L^p(\partial\Omega)$ a navíc existuje kladná konstanta $C = C(\partial\Omega)$ taková, že*

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \left(\int_{\Delta_r} |_r u(x'_r, a_r(x'_r))|^p \, dx'_r \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Důkaz. viz např. Kufner et al. [1977] nebo Nečas [1967] □

Tato věta říká, že přes překrývající se části hranice stačí uvažovat integrál pouze přes jedno Λ_r, neboli $\int_{\Lambda_r \cap \Lambda_{r-1}} |_{r-1} u(x_r)|^p dS \sim \int_{\Lambda_r \cap \Lambda_{r-1}} |_r u(x_r)|^p dS$.

Věta o stopách pro $W^{1,p}(\Omega)$

Platí následující věta.

Věta A.3.64 *(o operátoru stop, $p < d$)*
Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in [1, d)$. Označme $p^\sharp = \frac{dp-p}{d-p}$ (tj. $\frac{1}{p^\sharp} = \frac{1}{p} - \frac{p-1}{p(d-1)}$). Potom existuje jednoznačně určené spojité lineární zobrazení ($q \in [1, p^\sharp]$)

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega),$$

takové, že

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) : Tu = u\,|_{\partial\Omega}.$$

Důkaz.

Krok 1: redukce na hladké funkce
Jak již bylo zmíněno, stačí ukázat, že operátor T je omezený z $W^{1,p}(\Omega)$ do $L^{p^\sharp}(\partial\Omega)$ pro hladké funkce. Díky tomu, že $d-1$ dimenzionální míra hranice Ω je konečná, je pak operátor T omezený i jako operátor do $L^q(\partial\Omega)$ pro $q \in [1, p^\sharp]$.

Nechť tedy platí

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) : \ \|v\|_{L^{p^\sharp}(\partial\Omega)} \le C\,\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} . \tag{A.35}$$

Buď $u \in W^{1,p}(\Omega)$. potom existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ taková, že $u_n \to u$ v $W^{1,p}(\Omega)$. Díky linearitě restrikce na hranici a díky vztahu (A.35) je pak posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská i v $L^{p^\sharp}(\partial\Omega)$. Z úplnosti prostoru $L^{p^\sharp}(\partial\Omega)$ (viz. věta A.3.61) pak plyne existence limitního prvku posloupnosti $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ v $L^{p^\sharp}(\partial\Omega)$. Označíme limitní prvek jako Tu a zadefinujeme tak výsledek působení operátoru T na funkci u. Zřejmě platí, že definice je nezávislá na výběru aproximující posloupnosti (ověřte podrobně).

Krok 2: rozklad jednotky
Buď $\Phi_r \in \mathcal{C}_0^\infty(T_r(V_r))$, $r = 1,\dots,M$ rozklad jednotky na jistém okolí $\partial\Omega$. Označme $u_r = u\Phi_r$. Potom $\operatorname{supp} u_r \subset T_r(V_r)$ a tudíž stačí ověřit, že

$$\left(\int_{\Delta_r} |{}_r u_r(x_r', a_r(x_r'))|^{p^\sharp}\, dx_r'\right)^{\frac{1}{p^\sharp}} \le C\left(\int_{\Delta_r}\int_{a_r(x_r')}^{a_r(x_r')+\beta} |\nabla_r u_r(x_r',\eta)|^p\, d\eta dx_r' \right.$$
$$\left. + \int_{\Delta_r}\int_{a_r(x_r')}^{a_r(x_r')+\beta} |{}_r u_r(x_r',\eta)|^p\, d\eta dx_r'\right), \tag{A.36}$$

potom totiž

$$\|u\|_{L^{p^\sharp}(\partial\Omega)} \le \sum_{r=1}^M \|u_r\|_{L^{p^\sharp}(\partial\Omega)} \le C\sum_{r=1}^M \|{}_r u_r\|_{W^{1,p}(V_r)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Krok 3: důkaz nerovnosti (A.36)
Pro jednoduchost budeme nadále vynechávat index r. Buď $p > 1$ a buď $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V^+})$, $\operatorname{supp} u \subset \overline{V^+}$, $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial V^+ \setminus \Lambda) > 0$. Označme

$$v(x') = |u(x', a(x'))|^{\frac{dp-p}{d-p}} .$$

Potom

$$v(x') = -\int_{a(x')}^{a(x')+\beta} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(|u(x',\eta)|^{\frac{dp-p}{d-p}}\right) d\eta,$$

tedy

$$v(x') \le C(p,d)\int_{a(x')}^{a(x')+\beta} |\nabla u(x',\eta)|\,|u(x',\eta)|^{\frac{d(p-1)}{d-p}}\, d\eta.$$

Tuto nerovnost zintegrujeme přes Δ a použijeme Hölderovu nerovnost. Výsledkem je

$$\int_\Delta |v(x')| dx' \le C(d,p)\,\|\nabla u\|_{L^p(V^+)}\,\|u\|^{\frac{d(p-1)}{d-p}}_{L^{\frac{dp}{d-p}}(V^+)} ,$$

aneb (k odhadu $\|u\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}(V^+)}$ jsme použili větu o vnoření)

$$\|u\|_{L^{\frac{dp-p}{d-p}}(\partial V)} \le C(d,p)\,\|u\|_{W^{1,p}(V)}\,.$$

Pro $p = 1$ postupujeme analogicky. Nerovnost (A.36) je dokázána a důkaz je hotov. □

Je-li $p \ge d$, je situace zřejmá.

Věta A.3.65 *(o operátoru stop, $p \ge d$)*
Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in [d, \infty]$.

Je-li $p = d$, pak je operátor stop definovaný ve větě A.3.64 spojitý z $W^{1,d}(\Omega)$ do $L^q(\partial\Omega)$ pro $q \in [1, \infty)$.

Je-li $p > d$, pak je operátor stop definovaný ve větě A.3.64 spojitý z $W^{1,d}(\Omega)$ do $L^q(\partial\Omega)$ pro $q \in [1, \infty]$.

Důkaz.

Situace $p = d$ je analogická situaci ve větě A.3.47, důkaz proto přenecháváme čtenáři jako užitečné cvičení.

Pro $p > d$ máme z věty A.3.51 vnoření $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ a důkaz je tudíž triviální. □

Pokud se znovu podíváme na třetí krok důkazu věty o stopách A.3.64, není těžké dokázat následující lemma.

Lemma A.3.66 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $q \in [1, \infty)$. Potom platí*

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} \le C\,\|u\|^{\frac{1}{q}}_{W^{1,q}(\partial\Omega)}\,\|u\|^{1-\frac{1}{q}}_{L^q(\Omega)} \tag{A.37}$$

Důkaz.

Místo nerovnosti (A.36) počítejme (pro jednoduchost opět vynecháváme index r)

$$\int_\Delta \left|u(x', a(x'))\right|^q dx' \le \left|\int_\Delta \int_{a(x')}^{a(x')+\beta} \frac{\partial}{\partial\eta}\left|u(x',\eta)\right|^q d\eta dx'_r\right| \le$$
$$\le q\int_\Delta \int_{a(x')}^{a(x')+\beta} \left|\nabla u(x',\eta)\right| \left|u(x',\eta)\right|^{q-1} d\eta dx'_r \le q\,\|\nabla u\|_{L^q(V^+)}\,\|u\|^{q-1}_{L^q(V^+)}\,.$$

Požadovanou nerovnost pro Ω pak dostaneme použitím kroků jedna a dva z důkazu věty o stopách A.3.64. □

Z právě dokázané nerovnosti (A.37) pak s použitím vět o kompaktním vnoření plyne

Věta A.3.67 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$.*

Je-li $p \in (1, d)$, pak je operátor stop definovaný ve větě A.3.64 kompaktní operátor z $W^{1,p}(\Omega)$ do $L^q(\partial\Omega)$ pro $q \in [1, p^\sharp)$, kde $p^\sharp = \frac{dp-p}{d-p}$.

Je-li $p = d$ pak je operátor stop kompaktní z $W^{1,p}(\Omega)$ do $L^q(\partial\Omega)$ pro $q \in [1, \infty)$.

Je-li $p > d$ pak je operátor stop kompaktní z $W^{1,p}(\Omega)$ do $L^q(\partial\Omega)$ pro $q \in [1, \infty]$.

Důkaz.

Buď $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost v $W^{1,p}(\Omega)$ a buď $p \in (1,d)$. Z lemmatu A.3.55 a z nerovnosti (A.37) plyne, že existuje vybraná podposloupnost, která je cauchyovská v $L^p(\Omega)$ a tedy i v $L^p(\partial\Omega)$. Pro $q \in [1,p)$ je proto důkaz zřejmý.

Pro $q > p$ plyne tvrzení věty z nerovnosti[14]

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\partial\Omega)}^{\alpha} \|u\|_{L^{p^\sharp}(\partial\Omega)}^{1-\alpha},$$

kde α splňuje $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^\sharp}$ ($\alpha \in (0,1)$, $q \in (p,p^\sharp)$), a z věty o stopách A.3.64.

Pro $p = d$ postupujeme analogicky, pouze místo věty A.3.64 použijeme větu A.3.65.

Pro $p > d$ máme z věty A.3.51 kompaktní vnoření $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ a důkaz je tudíž triviální. □

Příklad A.3.68 *Uvažujme oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ takovou, že část její hranice je tvořena křivkou (srovnejte s příkladem A.3.46)*

$$|y| = x^\mu, \quad x \in [0,1], \ \mu > 1.$$

V příkladu A.3.46 jsme ukázali, že je-li zbytek hranice oblasti hladký, pak funkce $u(x,y) = x^{-a}$ patří do $W^{1,2}(\Omega)$ pokud je $a < \frac{1+\mu-2}{2} = \frac{\mu-1}{2}$.

Spočteme-li integrál přes hranici, dostaneme[15]

$$a < 1 \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} |u| dS < \infty.$$

Pro $\mu > 3$ tudíž existují funkce z $W^{1,2}(\Omega)$, které nepaří do žádného $L^q(\partial\Omega)$ pro libovolné $q \geq 1$. Je tedy vidět, že podmínku $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ nelze rozumně zeslabit.

Nabízí se otázka, zda je prostor $L^{p^\sharp}(\partial\Omega)$ oborem hodnot operátoru stop (je-li $p \in [1,d)$). Tato otázka je velice důležitá v souvislosti s problematikou okrajových úloh pro parciální diferencíální rovncice. Odpověď je záporná. Platí pouze, že obor hodnot operátoru stop je hustý v $L^{p^\sharp}(\partial\Omega)$. Pro přesnou chrakterizaci oboru hodnot je nutné uvažovat prostory s neceločíselnou derivací. Jako analogie zde mohou sloužit hölderovsky spojité funkce, které mohou představovat spojité funkce, které mají neceločíselnou derivaci.

A.3.7 Prostory s neceločíselnou derivací, obor hodnot operátoru stop a inverzní věta o stopách

Uvažujme nejdříve $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Definice A.3.69 *(Sobolevovy prostory s neceločíselnou derivací)*
Buď $s \in \mathbb{R}^+$, $p \in [1,\infty)$. Nechť $[s]$ je celá část s. Potom $W^{s,p}(\Omega)$ je podprostor

[14] Důkaz nerovnosti je analogický důkazu nerovnosti A.2.9.

[15] Musíme uvažovat popis hranice $x = |y|^{\frac{1}{\mu}}$, $y \in [-1,1]$ a tudíž počítáme

$$\int_{-1}^{1} |y|^{-\frac{a}{\mu}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\mu}|y|^{\frac{1}{\mu}-1}\right)^2} dy,$$

což dává výsledek uvedený výše.

všech funkcí z $W^{[s],p}(\Omega)$ $(W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega))$, *které splňují*

$$\forall\alpha, |\alpha| = [s]: \ I_\alpha(u) = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{d+p(s-[s])}} dxdy < \infty.$$

Označme dále

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} I_\alpha(u) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Potom platí

Věta A.3.70 *Prostor* $W^{s,p}(\Omega)$ *je Banachův prostor s normou* $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. *Tento prostor je separabilní pro* $p \in [1,\infty)$ *a reflexivní pro* $p \in (1,\infty)$.

Důkaz. viz. např. Kufner et al. [1977] □

Poznámka A.3.71 *Nechť* $p \in [1,\infty)$ *a* $0 < s < \beta \leq 1$. *Potom*

$$\mathcal{C}^{0,\beta} \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega),$$

neboť

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+ps}} dxdy \leq (H_{0,\beta}(u))^p \int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{d+(s-\beta)p}} dxdy < K\,(H_{0,\beta}(u))^p.$$

Další vlastnosti těchto prostorů je možné nalézt ve specializovaných monografiích. Nás spíše zajímají analogické prostory na $\partial\Omega$.

Definice A.3.72 *(prostory* $W^{s,p}(\partial\Omega)$*)*
Buď $s \in \mathbb{R}^+$, $p \in [1,\infty)$, $\Omega \in \mathcal{C}^{[s],1}$. *Označme pro* $r = 1,\dots,M$ *funkce* $v_r(x_r') = u_r \circ T_r(x_r', a_r(x_r'))$. *Potom* $W^{s,p}(\partial\Omega)$ *je podprostor všech funkcí z* $L^p(\partial\Omega)$, *které splňují*

$$\forall r \in \{1,\dots,M\}: \ v_r \in W^{s,p}(\Delta_r).$$

Označme dále[16]

$$\|u\|_{W^{s,p}(\partial\Omega)} = \left(\sum_{r=1}^M \|v_r\|^p_{W^{s,p}(\Delta_r)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Analogicky jako výše platí (viz. např. Kufner et al. [1977])

[16] Připomínáme, že $\Delta_r \subset \mathbb{R}^{d-1}$.

Věta A.3.73 *Prostor* $W^{s,p}(\partial\Omega)$ *je Banachův prostor s normou* $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\partial\Omega)}$. *Tento prostor je separabilní pro* $p \in [1,\infty)$ *a reflexivní pro* $p \in (1,\infty)$.

Ukazuje se, že prostory $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ jsou přesně prostory charakterizující obor hodnot operátoru stop. Platí totiž

Věta A.3.74 *(inverzní věta o stopách)*
Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in (1,\infty)$. *Potom existuje jednoznačně definované spojité lineární zobrazení*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),$$

takové, že

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) : Tu = u\,|_{\partial\Omega}\,.$$

Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in (1,\infty)$. *Potom existuje spojité lineární zobrazení*

$$P : W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \to W^{1,p}(\Omega),$$

takové, že pro $v = Pu$ *platí* $u = Tv$.

Důkaz. Celý důkaz je poněkud technický a je ho možné naléz např. v Kufner et al. [1977] nebo Nečas [1967]. □

Poznamenejme, že důkaz první části právě zmíněné věty je založen na Hardyho nerovnosti, která je důležitá i v aplikacích v parciálních diferenciálních rovnicích. Uveďme zde několik jejích forem. Podrobnější informace může čtenář nalézt v knize Kufner and Opic [1990].

Věta A.3.75 *(Hardy)*
Buď $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$, $u \in L^p((a,b))$, $p \in (1,\infty)$. *Pak platí*

$$\int_a^b \left(\frac{1}{x-a}\int_a^x |u(y)|dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |u(x)|^p dx,$$
$$\int_a^b \left(\frac{1}{b-x}\int_x^b |u(y)|dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |u(x)|^p dx,$$

dále

$$\int_0^\infty |u(t)|^p t^{\varepsilon-p} dt \le \left(\frac{p}{|\varepsilon-p+1|}\right)^p \int_0^\infty |u(t)|^p t^\varepsilon dt,$$

kde nerovnost platí pro $\varepsilon > p-1$ *pro* $u(\infty) = 0$ *a* $\varepsilon < p-1$ *pro* $u(0) = 0$.
Buď $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ *a označme* $d(x) = \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$. *Potom*

$$\int_\Omega \left|\frac{u}{d}\right|^p dx \le C\int_\Omega |\nabla u|^p dx. \tag{A.38}$$

Z hlediska slabého řešení parciálních diferenciálních rovnic je zajímavý následující Hadamardův příklad.

Příklad A.3.76 *Buď* $d = 2$ *a* $\Omega = B_1(0)$. *Definujeme*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\rho^{2^{2n}}\cos(2^{2n}\varphi) \quad \textit{na } B_1(0)\setminus\{(0,0)\}$$
$$u(0,0) = 0,$$

kde (ρ, φ) *jsou standardní polární souřadnice (tj.* $\rho \in (0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$*). Potom řada konverguje stejnoměrně na* $B_1(0)$ *a tudíž* $u \in \mathcal{C}^1(\overline{B_1(0)})$*. Speciálně tedy* $u \in \mathcal{C}(\partial B_1(0))$*, ale přímým výpočtem lze zjistit (proveďte), že* $u \notin W^{1,2}(B_1(0))$*. Navíc lze ukázat, že* $u \notin W^{\frac{1}{2},2}(\partial B_1(0))$ *a tudíž neexistuje žádné* $u \in W^{1,2}(B_1(0))$ *takové, že jeho stopa by byla dána funkcí* $u\,|_{\partial B_1(0)}$*. Neexistuje tedy slabé řešení* $u \in W^{1,2}(B_1(0))$ *úlohy* $\Delta v = 0$ *na* $B_1(0)$ *s okrajovou podmínkou* $v = u\,|_{\partial B_1(0)} \in \mathcal{C}(\partial B_1(0))$*.*

A.3.8 Charakterizace $W_0^{1,p}(\Omega)$

V tomto odstavci se budeme zabývat souvislostí prostorů $W_0^{1,p}(\Omega)$ a $V^p(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid Tu = 0 \text{ skoro všude na } \partial\Omega\right\}$.

Věta A.3.77 *Buď* $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$*. Potom* $W_0^{1,p}(\Omega) = V^p(\Omega)$*.*

<u>*Důkaz*</u>.

Krok 1: $W_0^{1,p}(\Omega) \subset V^p(\Omega)$
Buď $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Podle definice prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)$ existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ taková, že $u_n \to u$ ve $W^{1,p}(\Omega)$. Zřejmě $Tu_n = 0$ a za spojitosti operátoru stop pak plyne i $Tu = 0$.

Krok 2: $V^p(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$
Krok 2a: rozklad jednotky
Použitím rozkladu jednotky zřejmě stačí ukázat, že pokud $u \in W^{1,p}(V^+)$, $Tu = 0$ na Λ a $\operatorname{supp} u \cap \{\partial V^+ \setminus \Lambda\} = \emptyset$, potom existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_0^{\infty}(V^+)$ taková, že $u_n \to u$ ve $W^{1,p}(V^+)$.

Krok 2b: prodloužení funkce
Připomeňme značení z definice A.3.29,

$$V^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x_i| < \alpha, i = 1, \dots, d-1, a(x') < x_d < a(x') + \beta\right\}.$$

Definujeme funkci

$$G(x', x_d) = \begin{cases} u(x', x_d) & (x', x_d) \in V^+ \\ 0 & (x', x_d) \in V^-, \end{cases}$$

tato funkce pak patří do prostoru $W^{1,p}(V)$ a její slabá derivace je

$$\nabla G(x', x_d) = \begin{cases} \nabla u(x', x_d) & (x', x_d) \in V^+ \\ 0 & (x', x_d) \in V^-. \end{cases}$$

Skutečně díky lemmatům A.3.78 a A.3.79 uvedeným níže platí pro $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(V)$

$$\int_V G \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{V^+} G \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_{V^+} \frac{\partial G}{\partial x_i} \varphi dx + \int_{\Lambda} G \varphi n_i dS$$
$$= -\int_{V^+} \frac{\partial G}{\partial x_i} \varphi dx = -\int_V \frac{\partial G}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Krok 3: regularizace
Označme $U_n(x', x_d) = G(x', x_d - \frac{1}{n})$. Funkce U_n zřejmě pro dostatečně velké n patří do $W^{1,p}(V^+)$ a navíc $\operatorname{supp} U_n \subset V^+$. Dále je $\lim_{n\to\infty} \|U_n - u\|_{W^{1,p}(V^+)} = 0$. Nyní stačí zadefinovat funkce $u_n = \eta_{h_n} \star U_n$, kde η_{h_n} je regularizátor a h_n je vhodně zvolené číslo menší než $\frac{1}{n}$ tak, aby $u_n \in \mathcal{C}_0^\infty(V^+)$. Užitím věty A.2.22 není těžké ověřit, že $u_n \to u$ ve $W^{1,p}(V^+)$.

□

V důkazu jsme použili Greenovu větu a musíme tedy ověřit její platnost. První otázkou při jejím důkazu je, zda má smysl hovořit o vnější normále pro $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$.

Lemma A.3.78 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. Potom existuje vnější normála skoro všude na $\partial\Omega$.*

Důkaz. viz. např. Nečas [1967] □

Dále je třeba dát smysl výrazu $\int_{\partial\Omega} F dS$. Nechť $F \in L^1(\partial\Omega)$ a nechť $\{\phi_i\}_{i=1}^M$ je rozklad jednotky na jistém okolí $\partial\Omega$. Označme ${}_rF = F \circ T_r$ a ${}_rF_r = {}_rF\phi_r$. Potom

$$\int_{\partial\Omega} F dS = \sum_{r=1}^M \int_{\Delta_r} {}_rF_r(x'_r, a_r(x'_r)) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x'_{r_i}}\right)^2 (x'_r)} dx'_r.$$

Lemma A.3.79 *(zobecněná Greenova věta)*
Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ a $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $v \in W^{1,q}(\Omega)$, kde

1. *je-li $p \in [1, d)$, $q \in [1, d)$, pak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{d+1}{d}$*
2. *je-li $p = d$, pak $q > 1$ (resp. $q = d$, $p > 1$)*
3. *je-li $p > d$, pak $q \geq 1$ (resp. $q > d$, $p \geq 1$).*

Potom

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u v n_i dS - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx. \tag{A.39}$$

Důkaz.

Důkaz provedeme poněkud formálně, vynecháme totiž rozklad jednotky. Formule Greenovy věty (A.39) platí, je-li $\partial\Omega$ po částech hladká a $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Protože každou lipschitzovskou oblast můžeme zevnitř aproximovat hladkými oblastmi (viz Nečas [1962]), je možné ukázat, že formule (A.39) platí i v případě $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Nechť jsou nyní u a v sobolevovské funkce, tak jako ve znění lemmatu. Potom existují posloupnosti hladkých funkcí $\{u_n\}_{n=1}^\infty, \{v_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, které aproximují funkce u a v v $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ resp. $\|\cdot\|_{W^{1,q}(\Omega)}$ normě. Zřejmě tedy platí

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u_n v_n n_i dS - \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n dx \tag{A.40}$$

a stačí ukázat, že za daných předpokladů můžeme provést limitní přechod v právě uvedené rovnosti. Zabývejme se první variantou podmínek, tj. $p \in [1, d)$, $q \in [1, d)$, ověření zbývajících dvou variant ponecháváme čtenáři jako cvičení.

Uvažujme nejprve integrál na levé straně vztahu (A.40). Ten bude pro $n \to \infty$ konvergovat k $\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$, jestliže

$$\frac{d-p}{dp} + \frac{1}{p} \leq 1,$$

což po úpravě dává podmínku $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{d+1}{d}$ ze znění lemmatu.

Analogicky postupujeme pro objemový integrál na pravé straně (A.40). Uvažujme nyní plošný integrál. Zde požadujeme (viz. věta A.3.64)

$$\frac{d-p}{dp-p} + \frac{d-q}{dq-q} \leq 1$$

což po úpravě dává podmínku $d\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \leq d+1$, která je zřejmě díky předchozí podmínce $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{d+1}{d}$ splněna automaticky.

□

A.3.9 Ekvivalentní normy, faktorprostory

V tomto oddílu ukážeme, že v některých případech je možno místo standardní normy na $W^{k,p}(\Omega)$ uvažovat i jiné funkcionály, které definují ekvivalentní normy na $W^{k,p}(\Omega)$. Začneme jedním obecným lemmatem.

Lemma A.3.80 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$. Nechť $\{f_i\}_{i=1}^l$ jsou spojité omezené funkcionály (ne nutně lineární) nad $W^{k,p}(\Omega)$ splňující*[17]

$$\forall u \in P_{k-1} : \sum_{i=1}^{l} |f_i(u)| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ skoro všude na } \Omega.$$

Nechť dále platí $\forall u \in W^{k,p}(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \ldots, l : |f_i(\lambda u)| \leq |\lambda| |f_i(u)|$. Potom existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$ platí

$$c_1 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{l} |f_i(u)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_2 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} . \tag{A.41}$$

[17] Pod P_k rozumíme polynomy stupně nejvýše $k-1$.

<u>*Důkaz.*</u>

Druhá nerovnost v A.41 plyne triviálně, zabývejme se proto první nerovností. Důkaz provedeme sporem.

Předpokládejme tedy, že existuje posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W^{k,p}(\Omega)$, $\|u_n\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 1$ taková, že platí

$$\left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{l} |f_i(u_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{n}.$$

Odsud plyne, že pro $|\alpha| = k$ je $D^\alpha u_n \to 0$ v $L^p(\Omega)$ a protože díky lemmatu A.3.55 je $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$, existuje silně konvergentní podposloupnost $\{u_{n_k}\}_{n_k=1}^{\infty}$ ve $W^{k-1,p}(\Omega)$. Označme $u = \lim_{n_k\to\infty} u_{n_k}$. Zřejmě platí, že $u_{n_k} \to u$ i ve $W^{k,p}(\Omega)$.

Protože $D^\alpha u = 0$, $|\alpha| = k$, je nutně[18] $u \in P_{k-1}$. Díky spojitosti funkcionálů f_i je také $\sum_{i=1}^{l} |f_i(u)|^p = 0$ a protože je $u \in P_{k-1}$, je i $u = 0$. To je ale spor s tím, že $u_{n_k} \to u$ ve $W^{k,p}(\Omega)$ a že $\forall n \in \mathbb{N}:\ \|u_n\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 1$.

□

Použijeme-li v předcházejícím důkazu místo lemmatu A.3.55 lemma A.3.56, vidíme, že stačí předpokládat pouze $\Omega \in \mathcal{C}^0$. Obecně stačí předpokládat, že $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je taková oblast, že platí vnoření $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Poznámka A.3.81 *Funkcionály splňující předpoklady lemmatu A.3.80 vždy existují, stačí například vzít*

$$f_\alpha(u) = \int_{\Omega^\star} x^\alpha u(x)dx, \quad |\alpha| \le k-1,$$

popřípadě

$$\tilde{f}_\alpha = \int_{\Omega^\star} D^\alpha u(x)dx, \quad |\alpha| \le k-1,$$

kde $\Omega^\star$ je libovolná neprázdná podoblast Ω.

Lemma A.3.80 má celou řadu různých aplikací. Uveďme alespoň ty nejdůležitější.

Věta A.3.82 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $\Omega^\star \subset \Omega$, $|\Omega^\star|_d > 0$, $\Gamma \subset \partial\Omega$, $|\Gamma|_{d-1} > 0$. Buď $p \in [1,\infty)$ a α_i, $i = 1,2,3$, nezáporná čísla taková, že $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i > 0$. Potom existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$ platí*

$$c_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \alpha_1 \int_\Gamma |u|^p dS + \alpha_2 \int_{\Omega^\star} |u|^p dx + \alpha_3 \left|\int_\Omega u dx\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le c_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

[18] Toto zřejmě plyne z druhého tvrzení důsledku A.3.25 kde bylo využito Beppo-Leviho prostorů. Důkaz nezávislý na Beppo-Leviho prostorech bude proveden v příštím oddílu A.3.10.

Důkaz.

Označme $f_1(u) = \left(\int_\Gamma |u|^p dS\right)^{\frac{1}{p}}$, $f_2(u) = \left(\int_{\Omega^\star} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $f_3(u) = \left|\int_\Omega u dx\right|$. Všechny tři funkcionály jsou zřejmě homogenní (ve smyslu uvedeném v lemmatu výše), omezené a spojité na $W^{1,p}(\Omega)$. Stačí ukázat, že pro $u = konst.$ je $f_i(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$, což je zřejmé. □

Poznámka A.3.83

1. *Nerovnost* $c_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \left(\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Gamma |u|^p dS\right)^{\frac{1}{p}}$ *se nazývá Poincaré-Fridrichsova nerovnost. Zřejmě lze místo* $\int_\Gamma |u|^p dS$ *brát i* $\left(\int_\Gamma |u|^q dS\right)^{\frac{p}{q}}$, *kde* $q \in [1, \frac{dp-p}{d-p}]$ *pro* $p \in [1, d)$ *a* $q \in [1, \infty)$ *pro* $p \geq d$.
2. *Nerovnost* $c_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \left(\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \left|\int_\Omega u dx\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *se nazývá Poincarého nerovnost. Její zobecnění pro* $W^{k,p}(\Omega)$ *je uvedeno níže. Místo střední hodnoty přes* Ω *lze brát i střední hodnotu přes* $\Omega^\star$.
3. *Místo* $\int_{\Omega^\star} |u|^p dx$ *lze uvažovat i* $\left(\int_{\Omega^\star} |u|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}$, *kde* $q \in [1, \frac{dp}{d-p}]$ *pro* $p \in [1, d)$ *a* $q \in [1, \infty)$ *pro* $p \geq d$.

Je-li $\alpha_1 = 0$, pak věta A.3.82 platí i pro $\Omega \in \mathcal{C}^0$, popřípadě pro libovolnou oblast splňující $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Důkaz následující věty je jednoduchý a přenecháváme ho čtenáři jako cvičení.

Věta A.3.84 *Buď* $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $\Omega^\star \subset \Omega$, $|\Omega^\star|_d > 0$, $p \in [1, \infty)$. *Buď* $k \in \mathbb{N}$. *Potom existují kladné konstanty* c_1 *a* c_2 *takové, že* $\forall u \in W^{k,p}(\Omega)$ *platí*

$$c_1 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_{\Omega^\star} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_2 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Věta A.3.85 *Buď* $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. *Potom existují kladné konstanty* c_1 *a* c_2 *takové, že* $\forall u \in W^{k,p}(\Omega)$ *platí*

$$c_1 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leq k-1} \left|\int_\Omega D^\alpha u dx\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_2 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Důkaz.

Je třeba ukázat, že pro $u \in P_{k-1}$ je $\sum_{|\alpha|\leq k-1} \left|\int_\Omega D^\alpha u dx\right| \Leftrightarrow u = 0$. Nechť je $|\alpha| = k - 1$. Pak je-li $u \in P_{k-1}$, musí být $D^\alpha u = konst.$, a funkce u proto patří do P_{k-2}. Indukcí dostaneme, že $u = 0$. □

Předchozí dvě věty samozřejmě platí i pro $\Omega \in \mathcal{C}^0$.

Věta A.3.86 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p \in [1,\infty)$. Potom existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že $\forall u \in W^{2,p}(\Omega)$ platí*

$$c_1 \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} |u|^p dS \right)^{\frac{1}{p}} \le c_2 \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} .$$

Je-li $\Gamma \subset \partial\Omega$ taková, že Γ není nadrovina, $|\Gamma|_{d-1} > 0$, potom též $\forall u \in W^{2,p}(\Omega)$ platí

$$c_1 \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_{\Gamma} |u|^p dS \right)^{\frac{1}{p}} \le c_2 \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} .$$

Důkaz. Buď $u \in P_1$. Potom u může být identicky rovné nule na Γ pouze když je Γ nadrovina. Ovšem nadrovina zřejmě nemůže být hranicí oblasti. □

Faktorprostory

Faktorprostory se někdy používají pro formulaci Neumannovy okrajové úlohy.

Definice A.3.87 *(faktorprostor $W^{k,p}(\Omega)/P$)*
Buď $P \subset P_{k-1}$ podprostor $W^{k,p}(\Omega)$. Označme $W^{k,p}(\Omega)/P$ faktorprostor (tj. $[u] \in W^{k,p}(\Omega)/P$, potom $u_1 \sim u_2 \in [u] \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in P$).

Normu uvažujeme dle obyklé definice

$$\|\tilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)/P} = \inf_{u \in [u]} \|\tilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)} .$$

Věta A.3.88 *Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $k \in \mathbb{N}$. potom existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že platí*

$$c_1 \|\tilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)/P_{k-1}} \le \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \le c_2 \|\tilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)/P_{k-1}} .$$

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat pouze první nerovnost, druhá je zřejmá. Ovšem důkaz plyne přímo z lemmatu A.3.80 a z poznámky za jeho důkazem. □

Není již asi třeba opakovat, že tato věta platí i pro $\Omega \in \mathcal{C}^0$.

A.3.10 Některé další vlastnosti funkcí ze Sobolevových prostorů

V tomto oddílu se budeme zabývat dalšími vlastnostmi funkcí z $W^{k,p}(\Omega)$. Některé ze zde uvedených výsledků jsme již využili v předcházejícím výkladu.

Sobolevovy prostory a Fourierova transformace

Věta A.3.89 *Buď $k \in \mathbb{N}$. Potom*

1. *Funkce $u \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ patří do $W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$, právě když*

$$\left(1 + |\xi|^k\right) \hat{u}(\xi) \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right),$$

kde $\hat{u}$ značí Fourierovu transformaci[19] funkce $u \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.

2. *Existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že*

$$\forall u \in W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right): \ c_1 \|u\|_{W^{k,2}(\mathbb{R}^d)} \leq \left\|\left(1 + |\xi|^k\right) \hat{u}(\xi)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c_2 \|u\|_{W^{k,2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Důkaz.

Krok 1:
Buď $u \in W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$, tj. $\forall |\alpha| \leq k: \ D^\alpha u \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Speciálně pro $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ platí $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$. Protože je $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ husté v $W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$, není těžké ukázat, že pro $u \in W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ platí

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) \text{ skoro všude na } \mathbb{R}^d.$$

Potom ale $(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ a volbou $\alpha = (0, \ldots, k, \ldots, 0)$ (k na i-tém místě) dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2k} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla^k u(x)|^2 dx,$$

odkud

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + |\xi|^k\right)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq c \|u\|_{W^{k,2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Krok 2:
Nechť naopak $\left(1 + |\xi|^k\right) |\hat{u}(\xi)| \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, $|\alpha| \leq k$. Zřejmě

$$\|(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c \left\|\left(1 + |\xi|^k\right) \hat{u}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Označme

$$u_\alpha = \mathcal{F}^{-1}\left[(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)\right](x) = \left((i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)\right)\check{},$$

---

[19] Používáme definici

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-i(x\cdot\xi)} dx$$

pro funkce z $L^1(\mathbb{R}^d)$.

kde ˇ značí inverzní Fourierovu transformaci. Buď $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Potom z Parsevalovy rovnosti plyne

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha \varphi \bar{u} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{D^\alpha \varphi} \bar{\hat{u}} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi) \bar{\hat{u}}(\xi) d\xi$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi) \overline{(-i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)} d\xi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \overline{u}_\alpha dx,$$

tj. $u_\alpha = D^\alpha u$ (ve slabém smyslu). Navíc $D^\alpha u \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ a tudíž $u \in W^{k,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Zřejmě

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|(i\cdot)^\alpha \hat{u}(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c \left\|\left(1 + |\cdot|^k\right) \hat{u}(\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

□

Pomocí Fourierovy transformace můžeme též definovat Sobolevovy prostory s neceločíselnou derivací.

Definice A.3.90 *Buď $s \in (0,\infty)$ a $u \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Řekneme, že funkce $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, právě když*

$$(1 + |\xi|^s)\, \hat{u}(\xi) \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Pro s neceločíselné definujeme

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \|(1 + |\cdot|^s)\, \hat{u}(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Je možné ukázat, že $H^s(\mathbb{R}^d) = W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$, kde $W^{s,2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ značí Sobolev-Slobodeckého prostor definovaný v A.3.69. Stejně tak normy $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ a $\|\cdot\|_{W^{s,2}(\mathbb{R}^d)}$ jsou ekvivalentní.

Diferencovatelnost skoro všude

Ukážeme, že funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$ má pro $p > d$ totální diferenciál skoro všude na Ω, tj. pro skoro všechna $x \in \Omega$ existuje $a \in \mathbb{R}^d$ tak, že

$$u(y) = u(x) + a \cdot (y - x) + o(|y - x|), \text{ pro } y \to x.$$

Poznamenejme, že v tomto případě je a rovno gradientu u v bodě x v klasickém smyslu. V tomto oddílu budeme vždy uvažovat spojitého reprezentanta třídy $[u]$, neboť dle věty A.3.51 platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

Věta A.3.91 *Buď $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $p \in (d,\infty]$. Potom má funkce u totální diferenciál skoro všude na Ω a klasická derivace je v bodech, kde totální diferncál existuje, rovná derivaci slabé.*

<u>*Důkaz*</u>.

Krok 1: $p \in (d, \infty)$

V důkazu Morreyho věty A.3.49 jsme pro hladkou funkci v dokázali platnost nerovnosti

$$\forall y \in B_r(x): \ |v(x) - v(y)| \le C r^{1-\frac{d}{p}} \left(\int_{B_{kr}(x)} |\nabla v(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{A.42}$$

kde $k = k(d)$. Limitním přechodem můžeme nerovnost (A.42) zobecnit i pro $v \in W^{1,p}_{loc}\Omega$.

Dále připomeňme, že z věty A.2.20 o Lebesgueových bodech plyne, že pro skoro všechna $x \in \Omega$ platí

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |\nabla u(x) - \nabla u(z)| dz = 0.$$

Vezměme libovolný bod $x \in \Omega$, pro který platí výše uvedený vztah a položme

$$v(y) = u(y) - u(x) - \nabla u(u) \cdot (y - x)$$

a v nerovnosti (A.42) zvolme $r = |y - x|$. Zřejmě $v \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ a tudíž

$$\begin{aligned}
&|u(y) - u(x) - \nabla u(u) \cdot (y - x)| = |v(x) - v(y)| \\
&\le C r^{1-\frac{d}{p}} \left(\int_{B_{kr}(x)} |\nabla v(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} = C r^{1-\frac{d}{p}} \left(\int_{B_{kr}(x)} |\nabla u(x) - \nabla u(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \le C r \left(\frac{1}{|B_{kr}(x)|} \int_{B_{kr}(x)} |\nabla u(x) - \nabla u(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} = o(r) = o(|x - y|)
\end{aligned}$$

pro $y \to x$. Funkce u má tedy totální diferenciál v bodě x a $\nabla u(x)$ ve slabém smyslu je roven $\nabla u(x)$ v klasickém smyslu.

Krok 2: $p = \infty$

Je-li $u \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$, potom zřejmě $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ pro všechna $p < \infty$ a můžeme proto použít první část důkazu.

□

Charakterizace sobolevovských funkcí pomocí diferencí

Označme

$$\Delta_i^h u(x) = \frac{1}{h} \left(u(x + h e_i) - u(x) \right), \tag{A.43}$$

kde $h \in \mathbb{R}$ a e_i je jednotkový vektor ve směru osy x_i. Má-li funkce u v bodě x parciální derivaci podle proměnné x_i, potom

$$\lim_{h \to 0} \Delta_i^h u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Cílem tohoto odstavce je ukázat, že něco podobného "v půměru" platí i pro slabou derivaci. Přesněji

Věta A.3.92 *(souvislost slabé derivace a diferenčního podílu)*

1. *Buď* $p \in [1, \infty)$ *a* $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$*. Potom platí*

$$\forall h \in \mathbb{R}, h \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, d\} : \ \left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{A.44}$$

2. *Buď* $p \in (1, \infty)$ *a* $u \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$*. Nechť existují konstanty* C_i*,* $i = 1, \dots, d$ *nezávislé na* h*, takové, že platí*

$$\forall h \in \mathbb{R}, |h| \in (0, h_0), h_0 \in \mathbb{R}^+, \forall i \in \{1, \dots, d\} : \ \left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_i. \tag{A.45}$$

Potom $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$ *a platí*

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} : \ \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_i. \tag{A.46}$$

Poznamenejme, že druhá část předchozí věty neplatí pro $p = 1$. Pokud je $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pro $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, je třeba zachovat jistou opatrnost u hranice. Pak lze dokázat variantu předchozí věty A.3.92, viz. např. Evans [1998].

1. Buď $p \in [1, \infty)$ a $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Potom platí

$$\forall V \subset \overline{V} \subset \Omega, \forall h \in \mathbb{R}, |h| \in (0, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial\Omega)), \forall i \in \{1, \dots, d\} :$$
$$\left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(V)} \leq c \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)},$$

kde c je kladná konstanta nezávislá na h.

2. Buď $p \in (1, \infty)$ a $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. Nechť existují konstanty C_i, $i = 1, \dots, d$ nezávislé na h, takové, že platí

$$\forall h \in \mathbb{R}, |h| \in (0, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial\Omega)), \forall i \in \{1, \dots, d\} : \ \left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(V)} \leq C_i.$$

Potom $u \in W^{1,p}(V)$ a platí

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} : \ \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(V)} \leq C_i.$$

<u>*Důkaz*</u>. (věty o souvislosti slabé derivace a diferenční podílu, A.3.92)
Krok 1: důkaz první části věty
Protože jsou funkce z $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ pro $p \in [1, \infty)$ husté ve $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d\right)$, stačí vztah (A.44) dokázat pouze pro $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Buď $i \in \{1, \ldots, d\}$ a $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Potom

$$\Delta_i^h u(x) = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + te_i) dt,$$

tedy s použitím Hölderovy nerovnosti

$$\left|\Delta_i^h u(x)\right|^p \leq \frac{1}{h^p} \left| \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + te_i) dt \right|^p \leq \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + te_i) \right|^p dt.$$

Tuto nerovnost zintegrujeme přes $\mathbb{R}^d$ a použijeme Fubiniho větu, výsledkem je

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_i^h u(x)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &\leq \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^h \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + te_i) \right|^p dt \right) dx \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \frac{1}{h} \int_0^h dt = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

což je požadovaná nerovnost A.44.

Krok 2: důkaz druhé části věty
Buď $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost jdoucí k nule. Potom z nerovnosti (A.45) plyne, že existuje taková podposloupnost (značíme ji pro jednoduchost stejně), že platí $\Delta_i^{h_n} u \rightharpoonup v$ v $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$. Zde je nezbytné uvažovat $p \in (1, \infty)$.

Zbývá ukázat, že $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ve slabém smyslu. Buď $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Provedeme substituci a dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \Delta_i^{h_n} u \varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x + h_n e_i) - u(x)}{h} \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{\mathbb{R}^d} u(x + h_n e_i) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \varphi(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{\mathbb{R}^d} u(x) \varphi(x - h_n e_i) dx - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \varphi(x) dx \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(x - h_n e_i) - \varphi(x)}{h} u(x) dx.\end{aligned}$$

Nyní stačí provést limitní přechod. Levá strana konverguje k $\int_{\mathbb{R}^d} v \varphi dx$ a pravá konverguje dle Lebesgueovy věty k $-\int_{\mathbb{R}^d} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$. Je proto $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ve slabém smyslu a odhad (A.46) je důsledkem slabé zdola polospojitosti normy.

□

Triviálním důsledkem první části věty A.3.92 (resp. poznámky za větou) je následující tvrzení, které jsme již dokázali jinými prostředky v oddíle věnovaném Beppo-Leviho prostorům (viz. důsledek A.3.25).

Důsledek A.3.93 *Buď $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$ taková, že $\nabla u = 0$ skoro všude na Ω. Potom $u = konst.$ skoro všude na Ω.*

Vztah $W^{1,\infty}(\Omega)$ a $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$

Jak bylo ukázáno v důsledku A.3.52, pro $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ platí vnoření $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$.

Cílem tohoto odstavce je ukázat, že obrácená inkluze platí vždy, bez ohledu na hladkost Ω. Připomeňme jeden klasický výsledek.

Lemma A.3.94 *(Tietze)*
Buď $\overline{\Omega}$ uzavřená množina v $\mathbb{R}^d$ a buď $u \in \mathcal{C}^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in (0,1]$. Potom existuje rozšíření $U \in \mathcal{C}^{0,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ funkce u takové, že[20]

$$\|U\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}$$

a

$$H_{0,\lambda,\mathbb{R}^d}(U) = H_{0,\lambda,\Omega}(u).$$

<u>*Důkaz*</u>. viz. např. Kufner et al. [1977] □

Užitím tohoto lemmatu můžeme dokázat následující větu.

Věta A.3.95 *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina a buď $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$. Potom $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ a existuje konstanta c nezávislá na u taková, že platí*

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})},$$

neboli $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$.

<u>*Důkaz*</u>.

Buď $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$ a označme U její prodloužení na $\mathbb{R}^d$ dle lemmatu A.3.94. Potom

$$\left\|\Delta_i^h U\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq H_{0,1,\Omega}(u). \tag{A.47}$$

Existuje proto funkce $v_i \in L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ a posloupnost $\{h_n\}_{n=1}^\infty$, $h_n \to 0$ taková, že

$$\Delta_i^{h_n} U \rightharpoonup v_i \text{ v } L^2_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

[20] Značíme $H_{0,\lambda,M}(v) = \sup_{x,y\in M, x\neq y} \frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^\lambda}$.

a

$$\Delta_i^{h_n} U \overset{*}{\rightharpoonup} v_i \text{ v } L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Stejně jako v důkazu věty A.3.92 lze ukázat, že funkce v_i je rovná slabé derivaci $\frac{\partial U}{\partial x_i}$. Funkce U proto patří do $W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)$ a tudíž $u = U|_\Omega$ patří do $W^{1,\infty}(\Omega)$. Nerovnost $\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \le c\|u\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})}$ je pak důsledkem nerovnosti (A.47).

□

Důsledek A.3.96

1. *Buď*[21] $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. *Potom* $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *právě když* $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$.
2. *Buď* $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$. *Potom je* u *diferencovatelná skoro všude na* Ω.

Důkaz. První tvrzení je zřejmé, druhé plyne z věty A.3.95 a z věty A.3.91. □

Duální prostory

Buď $k \in \mathbb{N}$ a $p \in (1,\infty)$. Označme

$$\left(W_0^{k,p'}(\Omega)\right)^\star = W^{-k,p}(\Omega),$$

kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Restrikce $F \in W^{-k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ na $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ zřejmě definuje distribuci. V následujících tvrzeních se pokusíme tyto distribuce blíže charakterizovat. Platí

Věta A.3.97 *Buď* $p \in (1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$. *Potom* $F \in W^{-k,p}(\Omega)$ *právě když existují funkce* $\{f_\alpha\}_{|\alpha|\le k} \subset L^p(\Omega)$ *takové, že*

$$F = \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^\alpha D^\alpha f_\alpha,$$

kde $D^\alpha f_\alpha$ *značí distributivní derivaci, tj. pro* $u \in W_0^{k,p'}(\Omega)$ *platí*

$$\langle F, u\rangle = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega f_\alpha D^\alpha u dx. \tag{A.48}$$

Navíc

$$\|F\|_{W^{-k,p}(\Omega)} = \inf\left(\sum_{|\alpha|\le k} \|f_\alpha\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

kde se infimum bere přes všechny takové množiny funkcí $\{f_\alpha\}_{|\alpha|\le k}$, *které splňují (A.48).*

[21] Předpoklady na hladkost Ω lze zeslabit.

Důkaz. V obecném případě např. Kufner et al. [1977], speciální případ $k = 1$ a $p = 2$ lze nalézt např. v Evans [1998]. $\square$

Jiná možná charakterizace je

Věta A.3.98 *Buď $p \in (1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$ a $\Omega \in \mathcal{C}^{k,0}(\Omega)$. Potom pro každé $g \in W_0^{k,p'}(\Omega)$ definuje předpis*

$$\langle \phi_q, f \rangle = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha g D^\alpha f dx, \ \ f \in W_0^{k,p}(\Omega)$$

spojitý lineární funkcionál na $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Obráceně, ke každému $\phi \in \left(W_0^{k,p}(\Omega) \right)^\star$ existuje právě jedno $g \in W_0^{k,p'}(\Omega)$ takové, že

$$\forall f \in W_0^{k,p}(\Omega) : \ \langle \phi, f \rangle = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha g D^\alpha f dx.$$

Navíc existuje kladná konstanta $K = K(d, k, p, \Omega)$ taková, že

$$K \|g\|_{W^{k,p'}(\Omega)} \le \|\phi\|_{\left(W_0^{k,p}(\Omega)\right)^\star} \le \|g\|_{W^{k,p'}(\Omega)} .$$

A.4 Bochnerovy prostory

Nechť X je Banachův prostor. Prostor $\mathcal{C}^k(I; X), k \in \mathbb{N}$, obsahuje všechny spojité funkce $u : \bar{I} \to X$ takové, že všechny "časové" derivace (zde použitý význam slova derivace objasníme níže) do řádu k lze spojitě rozšířit na $\bar{I}$. Tento prostor je lineární. Výraz

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(I;X)} \equiv \sum_{s=0}^{k} \sup_{t \in [0,T]} \left\| u^{(s)}(t) \right\|_X$$

je konečný a definuje normu v $\mathcal{C}^k(I; X)$.

POZOR! Je–li $u \in \mathcal{C}\left(I; L^2(\Omega)\right)$ pak u nemusí být spojité v prostorové proměnné. Platí pouze $\|u(t) - u(t_0)\|_2 \to 0$ pro $t \to t_0$ kde $t, t_0 \in I$.

Symbolem $L^p(I; X), 1 \le p \le \infty$, označme prostor všech měřitelných funkcí $u : I \to X$, pro které je norma

$$\|u\|_{L^p(I;X)} \equiv \left\{ \int_0^T \|u(t)\|_X^p \ \mathrm{dt} \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty$$

resp.

$$\|u\|_{L^\infty(I;X)} \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \|u(t)\|_X$$

konečná. Připomeňme, že funkce $u : I \to X$ je (silně) měřitelná právě když existují jednoduché funkce $u_n : I \to X$ tak, že $\|u_n(t) - u(t)\|_X \to 0$ pro s.v. $t \in I$.

Příklad A.4.1 *Napište co nejpodrobněji normy následujících prostorů*

(α) $\mathcal{C}\left(I; L^2(\Omega)\right)$, (δ) $W^{1,2}\left(I; L^2(\Omega)\right)$,

(β) $L^2\left(I; L^2(\Omega)\right)$, (ϵ) $L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)$, *kde* $W^{-1,2}(\Omega) = \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^\star$.

(γ) $L^\infty\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)$,

Shrňme základní vlastnosti Bochnerových prostorů do několika lemmat.

Lemma A.4.2 *(Hölderova nerovnost)*
Nechť X je Banachův prostor a $p \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jestliže $u \in L^p(I; X)$ a $v \in L^q(I; X^\star)$, pak

$$\langle v(\cdot), u(\cdot)\rangle_{X^\star, X} \in L^1(I)$$

a

$$\int_0^T \left|\langle v(t), u(t)\rangle_{X^\star, X}\right| \, dt \le \|u\|_{L^p(I;X)} \|v\|_{L^q(I;X^\star)}. \tag{A.49}$$

Důkaz. viz. **?** □

Lemma A.4.3
Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Pak platí:

(i) jestliže $X \hookrightarrow Y$, pak $L^q(I; X) \hookrightarrow L^p(I; Y)$ je–li $T < \infty$ a $1 \le p \le q \le \infty$;

(ii) jestliže $1 \le p < \infty$, pak $C(I; X) \hookrightarrow L^p(I; X)$ a $C(I; X)$ je hustý v $L^p(I; X)$.

Důkaz. viz. **?** □

Nyní objasníme jak chápeme časové derivace funkce $u : I \to X$ z Bochnerova prostoru. Uvažujme následující situaci: nechť H je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)_H$ a X je Banachův prostor takový, že

$$X \hookrightarrow H \cong H^\star \hookrightarrow X^\star \tag{A.50}$$

a

$$X \text{ je hustý v } H. \tag{A.51}$$

(Připomeňme, že $H \cong H^\star$ znamená, že H je ztotožněn s $H^\star$ pomocí Rieszovy věty o reprezentaci.)

Pak, je–li $u \in L^p(I;X)$ označíme symbolem u' prvek prostoru $L^{p'}(I;X^\star)$ (kde $p' = \frac{p}{(p-1)}$) tak, že

$$\int_0^T \langle u'(t), v\rangle_{X^\star,X}\,\varphi(t)\,\mathrm{dt} = -\int_0^T (u(t),v)_H\,\varphi'(t)\,\mathrm{dt} \tag{A.52}$$

platí pro všechna $v \in X$ a $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.

Lemma A.4.4
Pokud platí (A.50) a (A.51) a $p \in (1,\infty)$, pak

(i) $W \equiv \left\{u \in L^p(I;X)\,; u' \in L^{p'}(I;X^\star)\right\} \hookrightarrow C(I;H)\,;$

(ii) pro všechna $u, v \in W$ a všechna $s, t \in I$ platí

$$(u(t),v(t))_H - (u(s),v(s))_H = \int_s^t \left[\langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_{X^\star,X} + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle_{X^\star,X}\right] d\tau. \tag{A.53}$$

Speciálně pro $u = v$,

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2 = \int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle_{X^\star,X}\; d\tau \tag{A.54}$$

pro všechna $s, t \in I$.

<u>*Důkaz*</u>. viz Gajewski et al. [1974] □

Věta A.4.5 *(Aubin–Lionsova věta o kompaktním vnoření)*
Nechť je $\alpha \in (1,\infty)$ a $\beta \in [1,\infty]$. Je–li X Banachův a X_0, X_1 reflexivní separabilní Banachovy prostory takové, že

$$X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow X_1, \tag{A.55}$$

pak

$$\{v \in L^\alpha(I;X_0)\,; v' \in L^\beta(I;X_1)\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^\alpha(I;X)\,. \tag{A.56}$$

<u>*Důkaz*</u>. Viz. Lions [1969, Section 1.5] pro $\beta \in (1,\infty)$. Případ $\beta = 1$ je dokázán v Simon [1987] a Roubíček [1990], kde jsou navíc prostory chápány jako lokálně konvexní. □

A.4.1 Další použitá lemmata

Lemma A.4.6 *(Gronwallovo lemma)*
Nechť jsou $\alpha(t), \beta(t), y(t) \geq 0 \quad \forall t \in (0,T)$ a $\alpha, \beta \in L^1((0,T))$. Pak pro spojitou funkci y, která splňuje nerovnici

$$y'(t) \leq \alpha(t) + \beta(t)y(t) \quad \textit{pro} \quad \forall t \in (0,T), \tag{A.57}$$

platí

$$y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t \beta(s)\,ds} + \int_0^t \alpha(v)e^{\int_v^t \beta(s)\,ds}\,dv \quad \textit{pro} \quad \forall t \in (0,T). \tag{A.58}$$

Literatura

Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1998.

Lawrence Craig Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press LLC, Boca Raton, 1992.

Eduard Feireisl. *Dynamics of Viscous Compressible Fluids*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Oxford University Press, New York, 2004.

Herbert Gajewski, Konrad Gröger, and Klaus Zacharias. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, volume 38 of *Mathematische Lehrbücher und Monographien*. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

Alois Kufner and Bohumír Opic. *Hardy-Type Inequalities*. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

Alois Kufner, Oldřich John, and Svatopluk Fučík. *Function spaces*. Academia, Praha, 1977.

Jaroslav Lukeš and Jan Malý. *Measure and Integral*. Matfyzpress, Praha, 1995.

Vladimir G. Mazja. *Sobolev spaces*. Springer Verlag, Berlin, 1985.

Jindřich Nečas. O oblastech typu n. *Czech Mathematical Journal*, 12(87):274–287, 1962.

Jindřich Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Academia, Prague, 1967.

Roger Temam. *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*. American Mathematical Society, Providence, 2001.

Alexander Ženíšek. *Sobolevovy prostory*. VUTIUM, Brno, 2001.

Kosaku Yosida. *Functional Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 6th edition, 1980.

Rejstřík