

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: _____

Skupina: _____

[10] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \{y \in C^1([-1, 1]) \mid y(-1) = 0, y(1) = 1\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^2 \ln \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx$$

Spočtete

- a) První Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h . (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)
- a) Druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h a g . (Tedy $\delta^2\Phi[y](h, g)$ neboli $D^2\Phi(y)[h, g]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

Řešení:

Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ v bodě y ve směru h spočteme dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \left. \frac{d}{dt} \Phi(y + th) \right|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y + th) = \int_{-1}^1 x^2 \ln \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} + t \frac{dh}{dx} \right)^2 \right] dx$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{d}{dt} \Phi(y + th) = \int_{-1}^1 2x^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx} + t \frac{dh}{dx} \right)^2} \left(\frac{dy}{dx} + t \frac{dh}{dx} \right) \frac{dh}{dx} dx$$

po dosazení $t = 0$ získáme

$$D\Phi(y)[h] = \left. \frac{d}{dt} \Phi(y + th) \right|_{t=0} = \int_{-1}^1 2x^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \frac{dy}{dx} \frac{dh}{dx} dx,$$

což je hledaný vztah pro první Gâteaux derivaci.

Dále spočteme druhou derivaci. Opět vycházíme z definice

$$D^2\Phi(y)[h, g] = \left. \frac{d}{ds} \left(D\Phi(y + sg)[h] \right) \right|_{s=0}.$$

Dosazením za $y =_{\text{def}} y + sg$ do $D\Phi(y)[h]$ dostaneme

$$D\Phi(y + sg)[h] = \int_{-1}^1 \left\{ 2x^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx} + s\frac{dg}{dx}\right)^2} \left(\frac{dy}{dx} + s\frac{dg}{dx}\right) \frac{dh}{dx} \right\} dx.$$

Derivováním dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} D\Phi(y + sg)[h] \\ = \int_{-1}^1 \left\{ -4x^2 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} + s\frac{dg}{dx}\right)^2\right)^2} \left(\frac{dy}{dx} + s\frac{dg}{dx}\right) \frac{dg}{dx} \left(\frac{dy}{dx} + s\frac{dg}{dx}\right) \frac{dh}{dx} \right. \\ \left. + 2x^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx} + s\frac{dg}{dx}\right)^2} \frac{dg}{dx} \frac{dh}{dx} \right\} dx. \end{aligned}$$

Po dosazení $s = 0$ a drobným přeuspořádání členů získáme hledanou druhou derivaci

$$D^2\Phi(y)[h, g] = \int_{-1}^1 2x^2 \left\{ -\frac{2}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right\} \frac{dg}{dx} \frac{dh}{dx} dx.$$

Povšimněte si, že výraz je bilineární vzhledem k funkcím g a h . Navíc, pokud provedeme přeznačení $h =_{\text{def}} g$ a $g =_{\text{def}} h$, dostaneme tentýž vztah. Obě posledně jmenovaná pozorování jsou pro námi zkoumanou třídu funkcí obecně platná. Takto si můžete rychle zkontrolovat, jestli váš výpočet vede k něčemu rozumnému.

- [10] 2. Buď dán funkcíál Φ na množině $M = \{y \in C^1\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \mid y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, y(0) = 0\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(y^2 + (y')^2 - 2yx\right) dx.$$

- Spočítejte první Gâteaux derivaci funkcíálu Φ v bodě y ve směru h . (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)
- Napište Euler–Lagrange rovnice pro funkcíál Φ .
- Najděte extrémaly funkcíálu Φ na množině M .
- Spočítejte druhou Gâteaux derivaci funkcíálu Φ v bodě y ve směru h . (Tedy $\delta^2\Phi[y](h, h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h, h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)
- Rozhodněte, zda jsou nalezené extrémaly minimizéry či maximizéry daného funkcíálu.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \left. \frac{d}{dt} \Phi(y + th) \right|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y + th) = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left((y + th)^2 + ((y + th)')^2 - 2(y + th)x \right) dx$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{d}{dt} \Phi(y + th) = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2(y + th)h + 2(y + th)'h' - 2hx) dx$$

po dosazení $t = 0$ (a integraci per partes) dostaneme

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi(y + th) \right|_{t=0} = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 (y - y'' - x) h dx.$$

Odkud lze přechít Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál $\Phi(y)$

$$y - y'' - x = 0.$$

Eulerovy–Lagrangeovy rovnice vyřešíme metodou variace konstant. (Pokud tedy partikulární řešení nevidíme rovnou nebo pokud nehledáme řešení metodou násady pro speciální pravou stranu.) Řešení homogenní rovnice

$$y'' - y = 0$$

je zřejmě $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Hledejme nyní partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$y'' - y = -x$$

metoda variace konstant dává pro funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ následující systém rovnic

$$\begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \end{bmatrix},$$

odkud

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^x & e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -x \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x e^{-x} \\ -x e^x \end{bmatrix}.$$

Zbývá vyřešit diferenciální rovnice pro $c_1(x)$ a $c_2(x)$, což snadno provedeme pouhou integrací

$$c_1 = -\frac{1}{2} \int x e^{-x} dx,$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \int x e^x dx,$$

odkud

$$c_1 = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x},$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(x-1)e^x,$$

Dosadíme za funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ do vzorce pro partikulární řešení a vidíme, že partikulární řešení jest

$$y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x} = x,$$

což jsme ovšem mohli snadno uhádnout pouhým pohledem na zkoumanou rovnici.

Celkové řešení nehomogenní rovnice je

$$y(x) = x + C_1e^x + C_2e^{-x},$$

konstanty C_1 a C_2 určíme z okrajových podmínek

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$y(0) = 0,$$

což vede na soustavu rovnic

$$e^{-\frac{1}{2}}C_1 + e^{\frac{1}{2}}C_2 = \frac{1}{2},$$

$$C_1 + C_2 = 0.$$

jejímž řešením je

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 1 & e \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2(e-1)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Extremála je tudíž

$$y(x) = x - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2(e-1)}e^x + \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2(e-1)}e^{-x}$$

aneb

$$y(x) = x - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e-1} \sinh x$$

Druhou derivaci funkcionálu φ spočteme podle předpisu

$$\begin{aligned} D^2\Phi(y)[h, h] &= \frac{d}{dt} D\Phi(y+th)[h] \Big|_{t=0} \\ &= 2 \frac{d}{dt} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^0 ((y+th)h + (y+th)'h' + he^x) dx \right) \Big|_{t=0} = 2 \left(\int_{-\frac{1}{2}}^0 (h^2 + (h')^2) dx \right), \end{aligned}$$

což je kupodivu totéž co plyne z obecné věty:

Bud' Φ funkcionál zadaný předpisem

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

pak je jeho druhý diferenciál roven

$$D^2\Phi(y)[h, h] = \int_a^b [P (h')^2 + Qh^2] dx,$$

kde

$$P = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'},$$

$$Q = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right),$$

Můžeme si povšimnout, že druhá Gâteaux derivace je nezáporná, z čehož je zřejmé, že extrémála *není* maximizér daného funkcionálu.

Ke zjištění povahy extrémály použijeme některé z následujících kritérií

Je-li y klasické řešení Euler–Lagrange rovnic pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

a je-li pro každé x z intervalu $[a, b]$ funkce $f(y, z) = F(x, y, z)$ konvexní, pak je y minimizér daného funkcionálu.

nebo

Řekneme, že bod \tilde{a} je konjugovaný k bodu a , pokud má rovnice (za y se dosazuje bod podezřelý z extrému)

$$-\frac{d}{dx} (Ph') + Qh = 0$$

netriviální řešení s okrajovými podmínkami $h(a) = 0$, $h(\tilde{a}) = 0$.

Bud' Φ funkcionál zadaný předpisem

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

a nechť y splňuje následující podmínky:

- Funkce y je extrémálou funkcionálu Φ , to jest řeší příslušnou Eulerovu–Lagrangeovu rovnici.
- Koefficient P je (v bodě extrémály) kladný (resp. záporný). Přesněji $P(x, y, y') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} > 0$ (resp. $P(x, y, y') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} < 0$).

- Interval $(a, b]$ neobsahuje žádné body konjugované k bodu a .

Pak je y (slabým) minimem (resp. maximem) funkcionálu Φ .

První z kritérií je splněno, funkce $f(y, z)$ je definována jako

$$f(y, z) = y^2 + z^2 - 2yx,$$

kde x je libovolný bod z intervalu $[-\frac{1}{2}, 0]$. Spočteme druhý diferenciál funkce f a vidíme, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$D^2 f[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \mathbf{v} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} \geq 0,$$

a funkce f je tedy konvexní jak je v příslušném kritériu požadováno.

Druhé z kritérií je také zjevně splněno, neboť v našem případě je $P = 1$, $Q = 1$ a příslušná rovnice pro existenci konjugovaného bodu je tedy $(a = -\frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} -h'' + h &= 0, \\ h(a) &= 0, \\ h(\tilde{a}) &= 0, \end{aligned}$$

ale tato rovnice má pouze triviální řešení (řešením rovnice je $h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, z okrajových podmínek pak plyne, že obě integrační konstanty jsou nulové), v intervalu $(-\frac{1}{2}, 0]$ proto neexistují konjugované body. Kromě toho jsou zřejmě splněny i ostatní podmínky.

[10] 3. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = (1 - e^{-nx}) + xe^{-nx}.$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $[0, +\infty)$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a na intervalu K , kde

- $J = (0, +\infty)$,
- $K = [\alpha, +\infty)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Řešení:

Volme x libovolně, ale pevně z $(0, \infty)$, pak zjevně platí, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((1 - e^{-nx}) + xe^{-nx}) = 1.$$

Pro $x = 0$ pak platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Bodová limita posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je tedy funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Můžeme si povšimnout, že na intervalu $[0, +\infty)$ je bodová limita nespojitá funkce. Funkce f_n jsou ovšem na témže intervalu spojité, proto není možné aby na tomto intervalu stejnoměrně konvergovaly k funkci f . Okamžitě proto můžeme říci, že zkoumaná posloupnost *nekonverguje stejnoměrně na intervalu J* .

Sledujme však standardní postup. Stejnoměrnou konvergenci vyšetříme s použitím ekvivalentní charakterizace. Platí věta

Bud' $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \rightarrow +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M , aneb

$$f_n \xrightarrow{M} f,$$

právě když pro $n \rightarrow +\infty$ platí

$$\sigma_n \rightarrow 0,$$

kde

$$\sigma_n =_{\text{def}} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|.$$

Najdeme tedy supremum funkce $|f_n(x) - f(x)|$ na příslušných intervalech. Zkoumejme nejprve interval K . Na intervalu K jsou $f_n(x)$ i $f(x)$ spojité funkce, proto bude funkce $f_n(x) - f(x)$ na intervalu K nabývat maxima. Platí

$$f_n(x) - f(x) = -e^{-nx} + xe^{-nx} = (x - 1)e^{-nx}.$$

Absolutní hodnotu tedy odstraníme takto

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} (x - 1)e^{-nx}, & x \geq 1, \\ -(x - 1)e^{-nx}, & x < 1. \end{cases}$$

Hledejme nyní maximum funkce $|f_n(x) - f(x)|$ na intervalu $K \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$. První derivace je

$$\frac{d}{dx} |f_n(x) - f(x)| = e^{-nx} (n + 1 - nx)$$

Derivace je tedy rovná nule v bodě $x_{\text{ext}} = 1 + \frac{1}{n}$. Je zjevné, že nalezený bod je bodem, ve kterém zkoumaná funkce nabývá uvedeném intervalu maxima. Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}} |f_n(x) - f(x)| &= (f_n(x) - f(x))|_{x=x_{\text{ext}}} \\ &= \left(1 - e^{-n(1+\frac{1}{n})}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-n(1+\frac{1}{n})} - 1. \end{aligned}$$

Hledejme nyní maximum funkce $|f_n(x) - f(x)|$ na intervalu $K \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$. První derivace je

$$\frac{d}{dx} |f_n(x) - f(x)| = -e^{-nx} (n + 1 - nx),$$

Derivace je tedy rovna nule v bodě $x_{\text{ext}} = 1 + \frac{1}{n}$. Tento bod však neleží uvnitř intervalu $K \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$. Na tomto intervalu tedy funkce nabývá maxima v některém z krajních bodů. Jelikož je funkce na zmíněném intervalu zjevně klesající, maximum se nabývá v levém krajním bodě, tedy

$$\sup_{x \in K \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}} |f_n(x) - f(x)| = (f_n(x) - f(x))|_{x=\alpha} = (1 - \alpha)e^{-n\alpha}.$$

Celkem tedy pro interval K dostaneme

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = \max \left\{ \left(1 - e^{-n(1+\frac{1}{n})}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-n(1+\frac{1}{n})} - 1, (1 - \alpha)e^{-n\alpha} \right\},$$

kde α je pevné číslo. Jest

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - e^{-n(1+\frac{1}{n})}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-n} - 1 \right] &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} [(1 - \alpha)e^{-n\alpha}] &= 0, \end{aligned}$$

a následně tedy

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0,$$

což znamená, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu K .

Zkoumejme nyní stejnoměrnou konvergenci na intervalu J . Využijeme výše uvedených výpočtů. Opět platí

$$\begin{aligned} \sup_{x \in J \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}} |f_n(x) - f(x)| &= (f_n(x) - f(x))|_{x=x_{\text{ext}}} \\ &= \left(1 - e^{-n(1+\frac{1}{n})}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-n(1+\frac{1}{n})} - 1. \end{aligned}$$

Na intervalu $J \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ ovšem musíme postupovat opatrně. Víme, že

$$\sup_{x \in J \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in J \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}} (1 - x)e^{-nx}.$$

Narozdíl od předchozího případu se nyní můžeme s bodem x libovolně přiblížit nule. Hodnota suprema musí být větší než hodnota v jakémkoliv bodě daného intervalu, tedy například v bodě $x = \frac{1}{n}$, aneb

$$\sup_{x \in J \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}} (1 - x)e^{-nx} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{-1}.$$

Pak ovšem

$$\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{x \in J \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}} (1 - x)e^{-nx} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{-1},$$

a proto

$$\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| \not\rightarrow 0,$$

což znamená, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nekonverguje stejnoměrně k f na intervalu J .

Několik členů posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je načrtnuto na Obrázku 1.

[10] 4. Rozhodněte, zda je řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}$$

stejně konvergentní na množině

- a) $J = [1, +\infty)$,
 b) $K = [\alpha, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha > 1$.

Dále rozhodněte, zda je tato řada na uvedených intervalech absolutně stejně konvergentní.

Řešení:

Využijeme Weierstrass kritérium, které říká:

Bud'te $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnosti funkcí, přičemž $\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost nezáporných funkcí. Necht' platí:

- Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ konverguje stejně konvergentně na množině M .
- Pro každé $x \in M$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq g_n(x)$.

Potom řada $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje stejně konvergentně na množině M .

Na intervalu J a tedy i intervalu K zjevně platí, že

$$\frac{\ln(1+2nx)}{nx^n} = \frac{\ln(1+2nx)}{2nx} \frac{2}{x^{n-1}} \leq \frac{2}{x^{n-1}}.$$

Zkoumejme nyní řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{x^{n-1}}.$$

Tato řada je geometrická řada, kdykoliv je $x \in (1, +\infty)$, tak platí

$$\sum_{n=1}^M \frac{2}{x^{n-1}} = 2 \sum_{n=1}^M \frac{1}{x^{n-1}} = 2 \sum_{n=0}^{M+1} \frac{1}{x^n} = 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{M+1}}{1 - \frac{1}{x}} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Navíc, je-li $x \in K$, pak je řada $\sum_{n=1}^M \frac{2}{x^{n-1}}$ stejně konvergentní. Z Weierstrassova kritéria proto plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}$$

je na intervalu K stejně konvergentní.

Prozkoumejme nyní stejnou konvergenzi na intervalu J . Nejprve zjistíme, jestli řada splňuje nutnou podmínku na stejnou konvergenzi, která říká:

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje stejně konvergentně na množině M , pak $f_n \xrightarrow{M} 0$.

Zkoumejme tedy stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n = \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}$$

na intervalu J . Bodová limita je na zkoumaném intervalu nula, navíc je posloupnost na tomto intervalu posloupností nezáporných funkcí. Ekvivalentní kritérium pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí zní

Bud' $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \rightarrow +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M , aneb

$$f_n \xrightarrow{M} f,$$

právě když pro $n \rightarrow +\infty$ platí

$$\sigma_n \rightarrow 0,$$

kde

$$\sigma_n =_{\text{def}} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|.$$

Konkrétně tedy chceme spočít

$$\sup_{x \in [1, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [1, \infty)} \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}.$$

Použijeme odhad

$$\frac{\ln(1+2nx)}{nx^n} = \frac{\ln(1+2nx)}{\sqrt{2nx}} \frac{\sqrt{2nx}}{nx^n} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}x^{n-\frac{1}{2}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Vzorové řešení umístěné na internetové stránky ve čtvrtek 16. listopadu bylo v tomto bodě chybné, omlouváme se. Platí proto

$$\sup_{x \in [1, \infty)} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

a posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tudíž konverguje stejnoměrně na intervalu $J = [1, +\infty)$. Je proto splněna nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

na intervalu J .

Prozkoumejme platnost Bolzano–Cauchy podmínky, která říká:

Řada $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně na M právě když

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in M : n \geq n_0 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Pro $x \in (1, +\infty)$ platí

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\ln(1+2kx)}{kx^k} \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\ln(1+2(n+1)x)}{(n+p)x^{n+p}} = p \frac{\ln(1+2(n+1)x)}{(n+p)x^{n+p}}.$$

Volme nyní $p = n$ a $x = 1 + \frac{1}{2n}$, pak

$$\begin{aligned} n \frac{\ln(1+2(n+1)x)}{2nx^{2n}} &= \frac{\ln\left(1+2(n+1)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)}{2\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \\ &= \frac{\ln\left(4+2n+\frac{1}{n}\right)}{2\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\geq} \frac{\ln\left(4+2n+\frac{1}{n}\right)}{2e} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

z čehož plyne, že lze zvolit ε tak, že pro libovolné n_0 jsme schopni najít n , p a x tak, aby

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| \geq \varepsilon.$$

Bolzano–Cauchy podmínka tedy není splněna a řada tedy není na intervalu J stejnoměrně konvergentní.

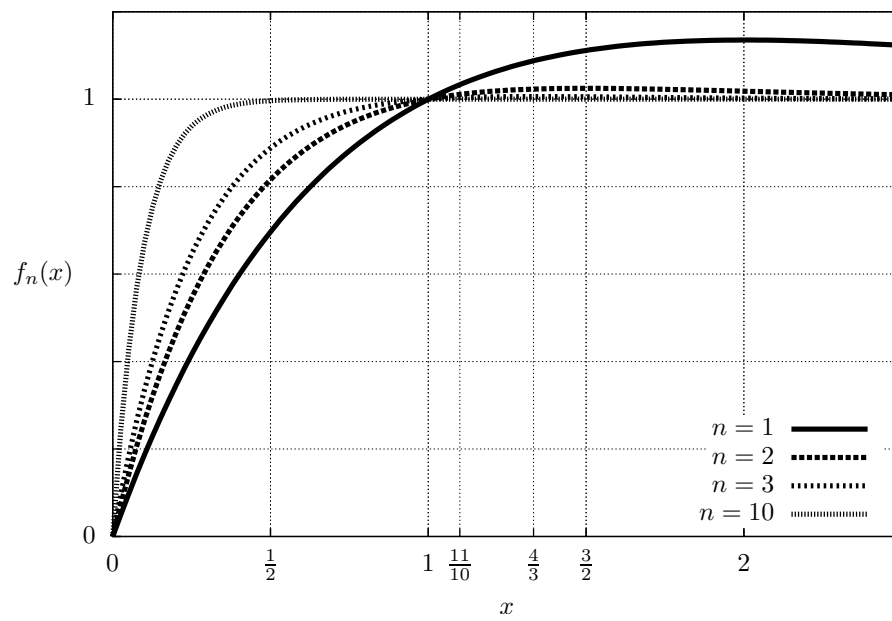
Případně můžeme jednodušeji postupovat i takto. (Povšimněte si, že předchozí postup lze na rozdíl od následujícího postupu uplatnit i v případě, že zkoumáme pouze interval $(1, +\infty)$ a nikoliv interval $[1, +\infty)$.) Zkoumejme rovnou řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}$$

a dosadme za $x = 1$. Pak je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n} \Big|_{x=1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+2n)}{n},$$

což je ovšem divergentní číselná řada. Zkoumaná řada tedy nekonverguje stejnoměrně na intervalu J .

Obrázek 1: Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$.