Jméno a příjmení: ______________________

Program/Obor: ______________________

Příklad	1	2	**Celkem bodů**
Bodů	28	22	50
Získáno			

[28] 1. Nechť $0 < r < R < \infty$. Uvažujme $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; r < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R\}$. Označme symbolem V uzávěr $\{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}); v(x_1, x_2) = 0 \text{ pro } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r\}$ vzhledem k $W^{1,2}$-normě. Pro dané funkce $\tilde{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, a $\mathbb{A} : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ danou vztahem

$$\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} \varrho & \sqrt{\varrho} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{s} \quad \varrho := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,,$$

uvažujme úlohu: nalézt $u : \Omega \to \mathbb{R}$ splňjící

$$\begin{aligned} & u - \tilde{u}_0 \in V\,, \\ & \big(\mathbb{A}(\cdot)\nabla u, \nabla \varphi\big)_{L^2(\Omega)} = \big(f, \varphi\big)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in V\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Úkoly:

- Rozhodněte (a odůvodněte), zda je uvažovaná Ω oblast se spojitou resp. lipschitzovskou resp. $\mathcal{C}^2$ resp. $\mathcal{C}^\infty$ hranicí. Spočtěte v každém bodě hranice vnější normálu. **[3b]**
- Ověřte, že $\mathbb{A}$ generuje eliptický operátor. **[3b]**
- Rozhodněte (a odůvodněte), zda je $f \in V^*$. **[1b]**
- Podrobně vysvětlete, pomocí obecné teorie, otázku existence slabého řešení úlohy (1). **[5b]**
- Předpokládejte, že u^1 a u^2 jsou dvě (slabá) řešení úlohy (1) (ke stejným daným funkcím $\tilde{u}_0$, f a $\mathbb{A}$). Aniž byste odkazovali na obecnou větu ukažte, že $u^1 - u^2 = 0$ skoro všude v Ω. [Neboli úloha (1) má pro daná data jediné řešení!] **[5b]**
- **Nechť** $\tilde{u}_0 = 0$**!** Nechť $u \in V$ je slabé řešení (1) a $f \geq 0$ skoro všude v Ω. Ukažte, že pak $u \geq 0$ skoro všude v Ω. **[4b]**
- **Nechť** $\tilde{u}_0 = 0$**!** Platí pak výrok: $u \in W^{k,2}(\Omega)$ pro $k > 1$? Pokud ano, pro jaké k tento výrok platí? Stručně odůvodněte. **[3b]**
- **Nechť** $\tilde{u}_0 = 0$**!** Předpokládejte, že víte, že u řešící (1) je hladké: $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Odvoďte z $(1)_2$ klasickou formulaci úlohy, kterou u řeší. **[4b]**

Řešení:

- Oblast (tj. omezená a otevřená množina) Ω je s $\mathcal{C}^\infty$ hranicí (odůvodnění je zřejmé a vyplývá z parametrizace kružnice), vektor vnější normály má tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_R &= R^{-1}(x_1, x_2) \qquad && \text{pokud } x_1^2 + x_2^2 = R^2, \\ \mathbf{n}_r &= -r^{-1}(x_1, x_2) \qquad && \text{pokud } x_1^2 + x_2^2 = r^2. \end{aligned}$$

- Aby $\mathbb{A}$ generovala eliptický operátor, musí existovat $c_1 > 0$ tak, aby pro každý vektor $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ platit, že

$$\sum_{i,j=1}^{2} \mathbb{A}_{ij}(x) v_i v_j \geq c_1(v_1^2 + v_2^2).$$

Po dosazení tedy máme:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \mathbb{A}_{ij}(x) v_i v_j = \varrho v_1^2 + \sqrt{\varrho} v_1 v_2 + v_2^2 \geq \frac{1}{2}(\varrho v_1^2 + v_2^2) \geq \frac{1}{2} \min(1, r)(v_1^2 + v_2^2),$$

kde jsme využili Youngovu nerovnost a fakt, že $\varrho(x_1, x_2) \geq r$ pro všechna $(x_1, x_2) \in \Omega$. Volba $c_1 := \frac{1}{2} \min(1, r)$ pak implikuje eliptičnost daného operátoru.

- Zcela jistě platí vnoření $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Navíc, protože V je uzavřený podprostor $W^{1,2}(\Omega)$, platí také, že $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Navíc, protože $\Omega \in \mathcal{C}^\infty$, víme (viz skripta), že $V = \{v \in W^{1,2}(\Omega); Tv = 0 \text{ na } \{x; |x| = r\}\}$.
Ke ztotožnění f s prvkem V^* použijeme

$$\langle f, \varphi \rangle_{V^*,V} := (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in V$$

a použitím Hölderovy nerovnosti ihned dostaneme

$$\sup_{\varphi \in V; \|\varphi\|_V \leq 1} \langle f, \varphi \rangle_{V^*,V} \leq \sup_{\varphi \in V; \|\varphi\|_V \leq 1} \|f\|_2 \|\varphi\|_2 \leq \|f\|_2$$

a tedy $f \in V^*$.

- Uvažujme funkci $v := u - \tilde{u}_0$. Po dosazení do (1), vidíme, že problém (1) se redukuje na problém: nalézt $v \in V$, tak že

$$(\mathbb{A}(\cdot)\nabla v, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (\mathbb{A}(\cdot)\nabla \tilde{u}_0, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in V. \tag{2}$$

K řešení problému (2) použijeme Lax-Milgramovu větu. Definujme $B : V \times V \to \mathbb{R}$ předpisem

$$B(\varphi, \psi) := (\mathbb{A}(\cdot)\nabla \varphi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \mathbb{A}_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dx$$

a $F \in V^*$ předpisem

$$\langle F, \varphi \rangle_{V^*,V} := (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (\mathbb{A}(\cdot)\nabla \tilde{u}_0, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)}.$$

Fakt, že $F \in V^*$ vyplývá z Úkolu č. 3 a z faktu, že $\tilde{u}_0 \in V$. Problém (2) tedy můžeme přepsat do tvaru: nalézt $v \in V$ tak že

$$B(v, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle_{V^*,V} \qquad \forall \varphi \in V.$$

Ověřme nyní, že předpoklady Lax-Milgramovy věty jsou splněny:
1) V je Hilberův prostor, protože je to uzavřený podprostor $W^{1,2}(\Omega)$, což je Hilbertův prostor.

2) B je bilineární, což je zřejmé z definice.
3) $F \in V^*$, což jsme už ukázali výše.
4) B je V-omezená: Počítejme tedy s využití Hölderovy nerovnosti

$$|B(\varphi, \psi)| \leq \|\mathbb{A}\|_\infty \|\nabla\varphi\|_2 \|\nabla\psi\|_2.$$

Protože ale $\|\mathbb{A}\|_\infty \leq 4\max(1, R)$ ihned vidíme, že

$$|B(\varphi, \psi)| \leq 4\max(1, R)\|\varphi\|_V \|\psi\|_V,$$

a forma B je tedy V-omezená.
B je V-eliptická: Použitím Úkolu č. 2 dostaneme, že

$$B(\varphi, \varphi) \geq c_1 \|\nabla\varphi\|_2^2.$$

K dokázání V-elipticity tedy stačí dokázat, že

$$\exists\alpha > 0 \forall\varphi \in V : \|\nabla\varphi\|_2^2 \geq \alpha\|\varphi\|_V^2 (= \alpha(\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2)) \tag{3}$$

Je zřejmé, že k (3) stačí ukázat, že

$$\exists\alpha > 0 \forall\varphi \in V : \|\nabla\varphi\|_2^2 \geq \alpha\|\varphi\|_2^2. \tag{4}$$

Buďto se odvoláme na větu z přednášky (s přesným zněním) nebo dokážeme (4) sporem. Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje $\varphi^n \in V$ tak, že

$$n\|\nabla\varphi^n\|_2^2 < \|\varphi^n\|_2^2.$$

Nutně tedy $\varphi^n \neq 0$. Definujme $\psi^n := \varphi^n \|\varphi^n\|_2^{-1}$ a vidíme, že pak nutně

$$n\|\nabla\psi^n\|_2^2 < \|\psi^n\|_2^2 = 1. \tag{5}$$

Protože V je reflexivní prostor, který je navíc kompaktně vnořen do $L^2(\Omega)$ (díky tomu, že oblast Ω je s Lipschitzovskou hranicí), můžeme vybrat podposloupnost ψ^{n_j}, tak že

$$\begin{aligned} \psi^{n_j} &\rightharpoonup \psi && \text{slabě ve } V \\ \psi^{n_j} &\to \psi && \text{silně v } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Díky (5) ale vidíme, že $\|\nabla\psi\|_2 = 0$ a $\|\psi\|_2 = 1$. Nutně je tedy ψ konstntní funkce daná předpisem $\psi = (|\Omega|)^{-\frac{1}{2}} > 0$. Zároveň ale $\psi \in V$ a tedy má nulovou stopu na $\{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$, což je spor.
Tedy všechny předpoklady Lax-Milgramovy věty jsou splněny a dostáváme, že existuje právě jedno $v \in V$ splňující (2).

- Pokud $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\Omega)$ jsou řešením (1), pak odečtením (1) pro u_1 od (1) pro u_2 dostáváme, že
$$(\mathbb{A}(\cdot)\nabla(u_2 - u_1), \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall\varphi \in V. \tag{6}$$
Protože však $Tu_1 = Tu_2$ na $\{x; |x| = r\}$ a protože $u_1, u_2 \in W^{1,2}$, vidíme, že $u_2 - u_1 \in V$. Tedy přípustnou volbou $\varphi := u_2 - u_1$ v (6) dostáváme
$$B(u_2 - u_1, u_2 - u_1) = (\mathbb{A}(\cdot)\nabla(u_2 - u_1), \nabla(u_2 - u_1))_{L^2(\Omega)} = 0.$$
Protože B je V-eliptická pak už nutně $\|u_2 - u_1\|_V = 0$ a tedy $u_1 = u_2$.

- Nechť u je řešení (1). Definujme $u_{min} := \min(0,u) \le 0$. Protože fce $s_{min} := \min(0,s)$ je Lipschitzovská a $u \in W^{1,2}(\Omega)$ pak platí $u_{min} \in W^{1,2}(\Omega)$ a skoro všude v Ω platí identita $\nabla u_{min} = \nabla u \chi_{u<0}$, kde χ značí charaktristickou funkci dané množiny. Navíc, díky tomu, že stopa $u = 0$ na menší kružnici, je evidentní, že i stopa $u_{min} = 0$ tamtéž a tedy, že $u_{min} \in V$. Můžeme tedy zvolit $\varphi := u_{min}$ v (1) a s použitím nezápornosti f dostáváme, že
$$\begin{aligned}0 \ge (\mathbb{A}(\cdot)\nabla u, \nabla u_{min})_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega\cap\{x;u(x)\le 0\}} \mathbb{A}_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u_{min}}{\partial x_i}\\ &= \int_{\Omega\cap\{x;u(x)\le 0\}} \mathbb{A}_{ij}(x)\frac{\partial u_{min}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{min}}{\partial x_i} = (\mathbb{A}(\cdot)\nabla u_{min}, \nabla u_{min})_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$
Opětovný použitím V-elipticity tedy dostáváme, že $u_{min} = 0$ a tedy, že $u \ge 0$ s.v. v Ω.

- Pro smíšenou eliptickou eliptickou úlohu obecně neplatí teorie regularity až do hranice, nicméně regularita vnitřní platí. V našem případě jsou všechna data hladká (tj., $\mathbb{A} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, Ω má hladkou hranici) až na f, které je pouze z $L^2(\Omega)$. Věta o vnitřní regularitě tedy ihned říká, že $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$. Protože však nikde "nepřechází" Dirichletova okr. podm. na Neumanovu (nebo-li, části hranice, kde předepisujeme Dirichletovu a Neumanovu podmínku jsou oddělené), můžeme použít výsledků o regularitě až do hranice a tudíž dostat, že $u \in W^{2,2}(\Omega)$.

- Integrací per partes snadno získáme pro každou $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$
$$(\mathbb{A}(\cdot)\nabla u, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{A}_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbb{A}_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\mathbf{n}_j\varphi\, dS.$$
Pokud tedy volíme $\varphi \in V$, vidíme, že část hraničního integrálu, kde integrujeme přes $\{x; |x| = r\}$ je nula a použitím (1) tedy dostaneme, že
$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{A}_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)\varphi\, dx + \int_{\{x;|x|=R\}} \mathbb{A}_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{n}_R)_j\varphi\, dS = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \forall\varphi \in V. \tag{7}$$
Tedy speciálně, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ hraniční integrál vymizí a máme identitu
$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{A}_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + f\right)\varphi\, dx = 0 \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$
a tedy ze základní vlastnosti Lebesguova integrálu pak už nutně musí platit, že
$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{A}_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f \qquad \text{skoro všude v } \Omega. \tag{8}$$
Dosazením (8) do (7) pak navíc získáme
$$\int_{\{x;|x|=R\}} \mathbb{A}_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{n}_R)_j\varphi\, dS = 0 \qquad \forall\varphi \in V$$
a tedy, že
$$\mathbb{A}_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{n}_R)_j = 0 \text{ na } \{x; |x| = R\}. \tag{9}$$

Uvědomíme-li si navíc, že

$$u = 0 \text{ na } \{x; |x| = r\}, \tag{10}$$

klasická formulace (1) pak zní: najdi $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ splňující (8), (9) a (10).

[22] 2. Nechť $0 < T < \infty$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a omezená. Pro danou funkci f uvažujme v $(0,T)\times\Omega$ tuto hyperbolickou rovnici:

$$\frac{\partial^{(2)} u}{\partial t^2} - \Delta u - \frac{\partial u}{\partial x_1} = f\,. \tag{11}$$

Úkoly:

- Zformulujte počáteční a okrajovou úlohu k (11) tak, aby u splňovalo homogenní Neumannovu podmínku na hranici. **[4b]**
- Odvoďte *apriorní* energetické odhady, včetně jejich důsledků na $\frac{\partial^{(2)} u}{\partial t^2}$. Nezapomeňte uvést, za jakých předpokladů na data tyto apriorní odhady platí. **[6b]**
- Zadefinuje pojem slabého řešení výše zformulované úlohy k rovnici (11). **[4b]**
- Zformulujte větu o existenci a jednoznačnosti slabého řešení. **[4b]**
- Větu (část o existenci) dokažte pomocí energetické metody. Nejdříve uveďte základní body důkazu. Teprve zbude-li čas, zaměřte se na podrobnosti. **[4b]**

Řešení:

- Formulace zní: pro dané $u_0, v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ a danou $f : (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$ najdi $u : (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$ tak že

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)} u}{\partial t^2} - \Delta u - \frac{\partial u}{\partial x_1} &= f && \text{v } (0,T)\times\Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 && \text{na } (0,T)\times\partial\Omega,\\ u &= u_0 && \text{na } \{t=0\}\times\Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial t} &= v_0 && \text{na } \{t=0\}\times\Omega. \end{aligned}$$

- Předpokládejme, že u je klasické řešení dle formulace výše. Násobme (11) funkcí $\frac{\partial u}{\partial t}$ a integrujme přes Ω. Po použití integrace per partes pak dostaneme

$$\int_\Omega \frac{\partial^{(2)} u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \int_\Omega \frac{\partial \nabla u}{\partial t}\cdot\nabla u\,dx = \int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + f\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\frac{\partial u}{\partial t}\,dS \tag{12}$$

Vzhledem k tomu, ž u splňuje homogení Neumanovu podmínku, hraniční integrál v (12) vymizí a dostáváme identitu

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + f\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx \tag{13}$$

S využitím Hölderovy a Youngovy nerovnosti pak snadno dostaneme

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + f\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx \le \left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \|f\|_2^2.$$

Dosazením do (13) tedy získáme odhad

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \leq \left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2\right) + \|f\|_2^2. \qquad (14)$$

Použití Gronwallova lemmatu pak tedy alespoň formálně obdržíme odhad

$$\left\|\frac{\partial u(\tau)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{2\tau}\left(\left\|\frac{\partial u(0)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^\tau \|f\|_2^2\, d\tau\right). \qquad (15)$$

Pokud tedy předpokládáme, že $v_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ a $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, snadno pak z (15) nahlédneme, že hledané řešení splňuje

$$u \in L^\infty(0,T;W^{1,2}(\Omega)),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \qquad (16)$$

Abychom identifikovali prostor pro druhou časovou derivaci, použijeme rovnici (11). Vynásobení (11) liovolnou $\varphi \in \mathcal{C}([0,T];\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}))$ a integrací přes $(0,T) \times \Omega$ dostaneme po použití integrace per partes a využití homogení Neumanovy podmínky, že

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^{(2)} u}{\partial t^2}\varphi\, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega -\nabla u \cdot \nabla\varphi + \frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi + f\varphi\, dx\, dt.$$

Konečně, použitím (16) a předpokladu na f dostáváme

$$\sup_{\varphi;\|\varphi\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^{(2)} u}{\partial t^2}\varphi\, dx\, dt \leq C(v_0,u_0,f) < \infty$$

a druhý energetický odhad tedy je

$$\frac{\partial^{(2)} u}{\partial t^2} \in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^*).$$

- Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená otevřená. Nechť $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ a $v_0 \in L^2(\Omega)$. Řekneme, že u je slabé řešení (1) pokud:

  i)

$$u \in W =: \Big\{u; u \in L^\infty(0,T;W^{1,2}(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$\frac{\partial^{(2)} u}{\partial t^2} u \in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^*)\Big\},$$

  ii)

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x) \qquad \text{s.v. v } \Omega,$$

  iii) následující identita platí pro s.v. $t \in (0,T)$

$$\left\langle \frac{\partial^{(2)} u}{\partial t^2}, \varphi \right\rangle_{(W^{1,2}(\Omega))^*, W^{1,2}(\Omega)} + (\nabla u, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + f, \varphi\right)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

- Nechť jsou všechny předpoklady z výše uvedené definice splněny. Nechť navíc $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$. Pak existuje právě jedno slabé řešení (11).
- Důkaz není v tomto řešení popsán; je modifikací důkazu pro parabolickou rovnici viz skripta.