Jméno a příjmení: ____________________

Program/Obor: ____________________

Příklad	1	2	**Celkem bodů**
Bodů	25	25	50
Získáno			

[25] 1. Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ taková, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$, kde $\Omega_i \in \mathcal{C}^{0,1}$ $(i = 1, 2)$, viz obrázek. Buď $\Gamma_i := \partial\Omega_i \setminus \Gamma$. Nechť $\tilde{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_1)$ a $u \in W^{1,2}(\Omega)$ splňují

$$u - \tilde{u}_0 \in V := \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega); \text{"} v|_{\Gamma_2} = 0 \text{ ve smyslu stop"} \right\}, \tag{1}$$

$$\int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\, dx = \int_{\Gamma_1} g\varphi \, dS + \int_\Omega f\varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in V, \tag{2}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}(x) &= \mu_1 \delta_{ij} \quad \forall x \in \Omega_1 \\ a_{ij}(x) &= \mu_2 \delta_{ij} \quad \forall x \in \Omega_2 \end{aligned}\right\} \text{ a } \mu_1, \mu_2 > 0, \quad \mu_1 \neq \mu_2.$$

Úkoly:

[6b] **A.** Za předpokladu, že $u \in W^{2,2}(\Omega_i)$ pro $i = 1, 2$, odvoďte klasickou formulaci té úlohy, která je v (1)–(2) formulována slabě.

[8b] **B.** Zformulujte větu o existenci, jednoznačnosti a spojité závislosti na datech slabého řešení (1)–(2). Větu podrobně dokažte.

[3b] **C.** Předpokládejte, že $f \in L^2(\Omega)$, $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_1)$, $\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$ a $\tilde{u}_0 \in W^{2,2}(\Omega)$. Stačí tyto předpoklady automaticky k důkazu regularity $u \in W^{2,2}(\Omega)$? Podrobně zdůvodněte.

[8b] **D.** Ukažte, že u splňuje (1)–(2) právě tehdy, když u minimizuje jistý funkcionál. Funkcionál explicitně uveďte.

[25] 2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená omezená množina. Uvažujte úlohu: pro dané funkce $c, f : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$, $g : (0,T) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ a $u_0, v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ nalézt $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ splňující:

$$\begin{aligned} u_{,tt} - \triangle u + u + cu &= f \quad \text{v } (0,T) \times \Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{v } \Omega, \\ u_{,t}(0,x) &= v_0(x) \quad \text{v } \Omega, \\ \frac{\partial u(t,x)}{\partial n} &= g(t,x) \quad \text{v } (0,T) \times \partial\Omega \end{aligned} \tag{3}$$

Úkoly:

[2b] **A.** Uveďte co nejpodrobněji, o jaký typ úlohy se jedná.

[7b] **B.** Předpokládejte, že $g(t,x) = g(x) \in L^2(\partial\Omega)$ (tj. g nezávisí na t!) a $c \in L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$. Odvoďte základní energetický odhad. Pomocná tvrzení, která k odvození použijete, zformulujte.
Návod: Uvažte, že $\|u\|_{1,2}^2 + \int_{\partial\Omega} gu \, dS \geq \frac{1}{2}\|u\|_{1,2}^2 - C(g)$. Ukažte, že tato nerovnost platí.

[3b] **C.** Na základě energetického odhadu zformulujte definici slabého řešení, včetně předpokladů na data u_0, v_0 a f.

[4b] **D.** Zformulujte větu o existenci a jednoznačnosti slabého řešení.

[5b] **E.** Dokažte jednoznačnost slabého řešení.

[5b] **F.** Jak lze oslabit předpoklady na c a g, tak aby stále platily energetické odhady? Uvažujte případ $d = 3$.