3. Lebesgueův integrál

Cílem této kapitoly je vybudovat integrál pro funkce více proměnných. Mohli bychom budovat vícenásobný Riemannův integrál, což se často dělá. Riemannův integrál však má závažné nedostatky

- ( ) $\to \mathbb{R}$; (

chletovu

funkci

množina racion

- Limitní p chody

(1) $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

či záměny operací

(2) $$\frac{d}{dt} \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f'(t)\,dt$$

lze ospravedlnit jen za velmi silných předpokladů.

My budeme budovat jiný integrál, tzv. Lebesgueův, který má tu vlastnost, že prostory

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R};\ \int_\Omega |u(x)|^p\,dx < +\infty \right\} \text{ s}$$

(tedy Banachovy) prostory pro $p \in \langle 1, \infty)$.

Speciálně, pro $p = 2$, dostaneme $L^2(\Omega)$, což je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$