

### 3. Lebesgueův integrál

Cílem této kapitoly je vybudovat integrál pro funkce více proměnných. Můžeme bychom budovat vícenásobový Riemannův integrál, což se často dělá. Riemannův integrál však má řadu nedostatků

- $(\ ) \rightarrow \mathbb{R}; (\ )$  chlebovu  
funkci  
mnoha proměnných

• Limitu p chody

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

či změny operací

$$(2) \frac{d}{dt} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f'(t) dt$$

Neospravedlnit jim za velmi silných předpokladů.

My budeme budovat jiný integrál, tzv. Lebesgueův, který má tu vlastnost, že

$$L^p(\Omega) = \left\{ u: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

(tedy Banachovy) pro  $p \in (1, \infty)$ .

Speciálně, pro  $p=2$ , dostaneme  $L^2(\Omega)$ , což je Hilbertův prostor se skalárním součinem  $(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$