

Druhá zápočtová písemka – varianta A (vzor)

- (6 bodů)** Ekologicky smýšlející profesor chystá písemnou zkoušku pro své studenty. Podle SISu je na zkouškový termín přihlášeno 50 studentů. Profesor ze zkušenosti ví, že každý přihlášený student se na zkoušku dostaví jen s pravděpodobností 0,8.
 - Jaká je střední hodnota a rozptyl počtu studentů, kteří opravdu dorazí na zkoušku.
 - Jaký minimální počet písemek má profesor vytisknout, aby se s pravděpodobností alespoň 95 procent dostalo na všechny studenty, kteří na zkoušku přijdou?
- (9 bodů)** Uvažujme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde X_k má Poissonovo rozdělení s parametrem \sqrt{k} .
 - Splňuje posloupnost $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ silný zákon velkých čísel? V kladném případě napište co nejexplicitněji, co nám v tomto případě silný zákon velkých čísel dává.
 - Jaká je pravděpodobnost, že pro nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ nastane jev $[X_k \neq 0]$?
 - Jaká je pravděpodobnost, že nastanou všechny jevy $[X_k \neq 0]$ až na konečně mnoho $k \in \mathbb{N}$?
 - Ukažte, že posloupnost $Y_k = \frac{X_k}{\sqrt{k}}$ konverguje k 1 v pravděpodobnosti.

(Nápověda: Pro náhodnou veličinu X s Poissonovým rozdělením s parametrem λ platí

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad E X = \lambda, \quad \text{var } X = \lambda.$$

Při jednom z úkolů by se Vám mohla hodit Čebyševova nerovnost.)

Druhá zápočtová písemka – varianta B (vzor)

- (7 bodů)** Pan Václav sbírá plnicí pera. Peníze, které utratí každý týden za plnicí pera, jsou nezávislé náhodné veličiny se střední hodnotou 1 000 Kč a směrodatnou odchylkou 500 Kč.
 - Jaká je pravděpodobnost, že za rok (52 týdnů) utratí pan Václav za plnicí pera více než 50 000 Kč?
 - Jakou nejmenší sumu peněz si musí pan Václav na začátku roku vyčlenit ze svého rozpočtu, aby s pravděpodobností větší než 90 % tato částka pokryla jeho roční výdaje na plnicí pera?
- (8 bodů)** Nechtě $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin takových, že

$$P(X_n = n - 1) = P(X_n = n + 1) = \frac{1}{2}.$$

- Určete $E X_n$ a $\text{var } X_n$.
- Ověřte, že posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel. Co nejvíce explicitně zformulujte, co nám v tomto případě silný zákon velkých čísel dává.
- Ověřte, že posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje centrální limitní větu. Co nejvíce explicitně zformulujte, co nám v tomto případě centrální limitní věta dává.