

Zápočtová písemka z NMSA332 Varianta B - Vzorová

Příklad 1 (16 bodů)

Nechť absolutně spojitý náhodný vektor (X, Y) má sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (i) Určete $E[X + Y | Y - X]$.
- (ii) Určete $E[X + Y | \sin(X) = a]$. Pro jaká a dává výraz smysl?
- (iii) Určete $E[X^2 + Y | \sin(X) = a]$. Pro jaká a dává výraz smysl?

Příklad 2 (16 bodů)

Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-(x-\delta)}, & x \in (\delta, \infty), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\delta \in \mathbb{R}$.

- (i) Najděte zobecněný momentový odhad parametru δ založený na $E \min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$.
- (ii) Dokažte konzistenci odhadu odvozeného v (i).

Příklad 3 (18 bodů)

Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z následujícího rozdělení

$$P(X_1 = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

- (i) Najděte konstantu k takovou, aby odhad $T(\mathbf{X}) = k \sum_{i=1}^n X_i$ byl nestranný odhad parametrické funkce $g(p) = \frac{2}{p}$.
- (ii) Zjistěte, zda odhad z (i) dosahuje dolní Raovy-Cramérovky meze.
- (iii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i) a využijte této znalosti ke konstrukci testu nulové hypotézy $H_0 : p = p_0$ proti alternativě $H_1 : p \neq p_0$.