

Zápočtová písemka z NMSA332 Varianta A - Vzorová

Příklad 1 (16 bodů)

Nechť $(X, Y)'$ je náhodný vektor s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 6y, & x \in (0, 1), y \in (0, \frac{1}{2}), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (i) Určete $E[\frac{Y}{X} | e^X = t]$. Pro jaká t má tento výraz smysl?
- (ii) Určete $E[X | X + 6Y]$.
- (iii) Určete $E[X | (X + 6Y)^2]$.

Příklad 2 (17 bodů)

Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \in (0, \infty), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$.

- (i) Najděte momentový odhad parametru λ založený na $E X_1$ a určete jeho asymptotické rozdělení.
- (ii) Sestavte asymptotický test (určete kritický obor) nulové hypotézy $H_0 : \lambda = \lambda_0$ proti alternativě $H_1 : \lambda > \lambda_0$.
- (iii) Sestavte horní intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti $1 - \alpha$.

Příklad 3 (17 bodů)

Mějme nezávislé stejně rozdělené vektory $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ s dvourozměrným normálním rozdělením se střední hodnotou $(\mu_1, \mu_2)^\top$ a rozptylovou maticí $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, kde ρ je známé. Tj. vektor $(X_1, Y_1)^\top$ má sdruženou hustotu

$$f(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu_1)^2}{2(1-\rho^2)} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{(1-\rho^2)} \right\}.$$

- (i) Určete Fisherovu informační matici $\mathbf{J}_n(\mu_1, \mu_2)$ o vektorovém parametru (μ_1, μ_2) obsaženou v $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$
- (ii) Označte \bar{X}_n výběrový průměr veličin X_1, \dots, X_n a \bar{Y}_n výběrový průměr veličin Y_1, \dots, Y_n . Zjistěte, zda odhad $\bar{X}_n - 2\bar{Y}_n$ je nestranný odhad parametrické funkce $\mu_1 - 2\mu_2$ a zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (iii) Dokažte, že odhad $\bar{X}_n - 2\bar{Y}_n$ je konzistentní odhad parametrické funkce $\mu_1 - 2\mu_2$.