

## Opravná písemná práce z NSTP022

1. Hodíme 200-krát pravidelnou šestistěnnou kostkou. Jaká je střední hodnota a rozptyl počtu padnutých šestek? Jaká je pravděpodobnost, že šestka padne alespoň 40-krát?

[6 bodů]

2. Ve dvou závodech A a B na výrobu obleků chceme porovnat produktivitu práce jednotlivých šiček. Proto jsme počítali ušité obleky sedmi náhodně vybranými šičkami z každého závodu za jeden den, viz. následující tabulka. Chceme vědět, jestli šičky v obou závodech mají stejnou produktivitu práce, nebo se jejich produktivita statisticky významně liší.

Závod A	15	10	11	3	7	9	8
Závod B	6	7	5	11	5	8	7

Najděte vhodný model pro tuto situaci (*předpokládejte normalitu*), zformulujte hypotézu a alternativu. Testujte uvažovanou hypotézu na hladině významnosti  $\alpha = 0,01$ .

Při výpočtu můžete použít některé z následujících rovností.

$$15 + 10 + 11 + 3 + 7 + 9 + 8 = 63, \quad 6 + 7 + 5 + 11 + 5 + 8 + 7 = 49, \quad 15^2 + 10^2 + \dots + 9^2 + 8^2 = 649, \\ 6^2 + 7^2 + \dots + 8^2 + 7^2 = 369, \quad (15 - 6)^2 + (10 - 7)^2 + \dots + (9 - 8)^2 + (8 - 7)^2 = 196.$$

[6 bodů]

3. Buďte  $X$  a  $Y$  nezávislé náhodné veličiny s hustotami  $f_X$ , resp.  $f_Y$ :

$$f_X(x) = c_1 x^2, \quad \text{pro } x \in (0, 1),$$

$$f_Y(y) = c_2 y, \quad \text{pro } y \in (0, 2).$$

- (a) Určete konstanty  $c_1, c_2$ .  
(b) Jaká je kovariance  $\text{cov}(X, Y)$ ?  
(c) Definujme náhodnou veličinu  $W = X + Y$ . Určete její hustotu  $f_W(w)$ .  
(d) Spočtěte  $\mathbb{E}W$  a  $\text{var}(W)$ .

[7 bodů]

4. Nechť  $X_1, X_2, \dots, X_n$  je náhodný výběr z diskrétního rozdělení na nezáporných celých číslech daného pravděpodobnostmi

$$P(X_i = k) = (1 - \mu)^k \mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

a  $\mu \in (0, 1)$  je neznámý parametr.

- (a) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru  $\mu$ .  
(b) Zjistěte, zda  $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$  je nestranným a konzistentním odhadem parametrické funkce  $(1 - \mu)/\mu$ ?

[6 bodů]

5. Na stole leží dvě urny A a B. V urně A je osm zlatých mincí a čtyři stříbrné, v urně B jsou tři zlaté mince, tři stříbrné a šest bronzových. Provedeme následující tah: Hodíme pravidelnou šestistěnnou kostkou a pokud padne číslo menší než 3, pak vybereme jednu minci z truhly A. V opačném případě vybereme jednu minci z truhly B. Jaká je pravděpodobnost, že na kostce padla jednička, jestliže jsme vytáhli stříbrnou minci?

[5 bodů]

Celkem 30 bodů. K úspěšnému složení zápočtu je třeba získat **20 bodů** (pokud jste měli úspěšnou pouze jednu průběžnou zápočtovou písemku), resp. **10 bodů** (pokud jste měli úspěšné dvě průběžné zápočtové písemky).