

Opravná písemná práce z NSTP022

1. Agentura STEM/MARK provedla před druhým kolem prezidentské volby průzkum veřejného mínění. Každý z 1245 respondentů byl dotazován, jestli bude volit Miloše Zemana či Karla Schwarzenberga. Pro Miloše Zemana bylo 721 respondentů, pro Karla Schwarzenberga 524. Sestrojte asymptotický 99%-ní interval spolehlivosti pro podíl občanů, kteří budou volit ve druhém kole prezidentské volby Miloše Zemana.

[5 bodů]

2. Bizarní fakír je naruživým kuřákem a zároveň milovníkem náhody. Vždy ráno si proto hodí klasickou šestistěnnou kostkou a v daný den vykouří tolik cigaret, kolik ok mu padlo na kostce. Jaká je pravděpodobnost, že za leden prokouří více než 350 Kč, když jedna cigareta stojí 3 Kč?

[6 bodů]

3. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-y}, & \text{pro } x \in [0, 2], y \geq 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete konstantu c tak, aby f byla hustota.
(b) Spočtete $P(Y > 2X)$.
(c) Spočtete marginální hustoty f_X a f_Y veličin X a Y .
(d) Jsou veličiny X a Y nezávislé?

[7 bodů]

4. Nechť X_1, X_2, \dots, X_n je náhodný výběr z gama rozdělení s hustotou

$$f(x, \theta) = \frac{x^4}{\Gamma(5)\theta^5} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0,$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr a $\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx$ je gama funkce.

- (a) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ .
(b) Je $T_n = \frac{1}{30n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ nestranným odhadem parametrické funkce θ^2 ?
(c) Je $T_n = \frac{1}{30n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ konzistentním odhadem parametrické funkce θ^2 ?

Mohlo by se Vám hodit, že pro $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!$

[6 bodů]

5. Adam a Bedřich hrají následující hru. V každém kole každý hodí jednou (pravidelnou šestistěnnou) kostkou. Pokud padnou dvě sudá čísla, tak vyhrává Adam a hra končí. Pokud padne jedno liché číslo a jedno sudé číslo, tak vyhrává Bedřich a hra končí. Pokud padnou dvě lichá čísla, hra pokračuje, začíná další kolo a oba hráči házejí znovu.

- (a) Určete pravděpodobnost, že hra nebude trvat déle než k -kol.
(b) Určete pravděpodobnost, že Adam vyhraje.
(c) Určete pravděpodobnost, že vyhrál Adam za předpokladu, že hra trvala právě k -kol.

[6 bodů]

Celkem 30 bodů. K úspěšnému složení zápočtu je potřeba získat alespoň 18 bodů.