

**6. cvičení z NMSA202**  
**23. 3. 2015 & 26. 3. 2015**

**Náhodné vektory II.**

1. Nechť  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl veličiny  $Z = X + Y$ , jestliže
  - (a)  $X, Y$  mají exponenciální rozdělení  $\text{Exp}(\lambda)$ ,
  - (b)  $X, Y$  mají rovnoměrné rozdělení na intervalu  $(0, 1)$ .*(Na rozmyšlení: Jaká je hustota  $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ , kde  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$  jsou nezávislé?)*
2. Náhodný vektor  $(X, Y)'$  v příkladě 2 z minulého cvičení udával útratu za jídlo a pití na rodinné oslavě a měl sdružené rozdělení s hustotou  $f(x, y) = x + y$  pro  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  a  $f(x, y) = 0$  jinak. Označte  $W = X - Y$  a  $Z = X + Y$ .
  - (a) Jaká je střední hodnota a rozptyl náhodných veličin  $W$  a  $Z$ ?
  - (b) Spočtete korelační koeficient  $\text{corr}(W, Z)$ .
  - (c) Určete střední hodnotu náhodné veličiny  $U = \frac{\sin(\pi X)}{X + Y}$ .
  - (d)\* Určete hustotu náhodné veličiny  $Z$ .  
*Návod: Spočtete nejdříve distribuční funkci  $G(z)$  náhodné veličiny  $Z$  jako pravděpodobnost jevu  $[X + Y \leq z]$ . Vhodný obrázek pomůže.*
3. V daný den přijde do školy  $X$  dívek a  $Y$  chlapců, kde  $X, Y$  jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry  $\lambda > 0$  a  $\mu > 0$ .
  - (a) Určete rozdělení a očekávanou hodnotu celkového počtu žáků ve škole v daný den.
  - (b) Jaké je rozdělení počtu dívek, jestliže víme, že je ve škole v daný den celkem  $n$  žáků?
4. Nechť  $I_1, \dots, I_n$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s alternativním rozdělením, tj.

$$P(I_i = 1) = p, \quad P(I_i = 0) = 1 - p.$$

Označme  $X = \sum_{i=1}^n I_i$ . Jaké má náhodná veličina  $X$  rozdělení? Pomocí vzorců (A1) a (A2) z „Opakování...“ spočítejte její střední hodnotu a rozptyl.

5. Nechť  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé náhodné veličiny, které splňují:

$$P(X = k) = (1 - p_1)^k p_1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad P(Y = l) = (1 - p_2)^l p_2, \quad l = 0, 1, \dots$$

Určete rozdělení náhodné veličiny  $Z = X + Y$ .

6. Najděte hustotu rozdělení součtu náhodných veličin  $X$  a  $Y$ , jestliže tyto jsou nezávislé a  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim R(0, \theta)$ , Určete střední hodnotu a rozptyl  $X + Y$ .
7. Nechť  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením  $N(0, 1)$ . Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny  $Z = X + Y$ .
8. Nechť  $X, Y$  jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $[0, 1]$ . Najděte hustotu náhodné veličiny  $Z = XY$ .
9. Nechť  $X, Y$  jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením  $\text{Exp}(\lambda)$ , Najděte hustotu náhodné veličiny  $Z = \frac{X}{Y}$ .

## Opakování z přednášky

**Rozdělení součtu náhodných veličin.** Necht' má náhodný vektor  $(X, Y)'$  sdružené spojité rozdělení s hustotou  $f(x, y)$ . Potom má náhodná veličina  $Z = X + Y$  rozdělení s distribuční funkcí

$$G(z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy.$$

Hustotu náhodné veličiny  $Z$  pak dostaneme jako  $g(z) = G'(z)$ .

Speciálně, jsou-li  $X, Y$  **nezávislé** náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami  $f_X, f_Y$ , pak má veličina  $Z = X + Y$  rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

Jestliže  $X, Y$  jsou náhodné veličiny, které nabývají pouze nezáporných celočíselných hodnot, potom pro rozdělení náhodné veličiny  $Z = X + Y$  platí

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k).$$

Jsou-li  $X, Y$  navíc **nezávislé**, pak platí

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k) P(Y = n - k).$$

**Další (možná) užitečné informace.** Jestliže  $X_1, \dots, X_n$  jsou náhodné veličiny a  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

$$\bullet E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E X_i, \quad (\text{A1})$$

$$\bullet \text{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{var}(X_i) + \sum \sum_{i \neq j} a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j) \quad (\text{A2}).$$

**Rozdělení součinu a podílu.** Necht'  $X, Y$  jsou **nezávislé** veličiny s hustotami  $f_X, f_Y$ . Pak

(a) veličina  $V = XY$  má rozdělení s hustotou

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{v}{x}\right) f_Y(x) \frac{1}{|x|} dx,$$

(b) je-li  $f_Y(y) = 0$  pro  $y < 0$ , má veličina  $W = \frac{X}{Y}$  rozdělení s hustotou

$$h(w) = \int_0^{\infty} x f_X(wx) f_Y(x) dx.$$

## Výsledky

1. (a)  $E Z = 2/\lambda$ ,  $\text{var}(Z) = 2/\lambda^2$ , hustota  $Z$ :  $g(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$ ,  $z > 0$ , a  $g(z) = 0$  jinak,  
 (b)  $E Z = 1$ ,  $\text{var}(Z) = 1/6$ , hustota  $Z$ :

$$g(z) = \begin{cases} z & z \in (0, 1), \\ 2 - z & z \in (1, 2), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. (a)  $E W = 0$ ,  $\text{var}(W) = 1/6$ ,  $E Z = 7/6$ ,  $\text{var}(Z) = 5/36$ ,  
 (b)  $\text{corr}(W, Z) = 0$ ,  
 (c)  $E U = \frac{2}{\pi}$ ,  
 (d) hustota  $Z$ :

$$g(z) = \begin{cases} z^2 & z \in (0, 1), \\ z(2 - z) & z \in (1, 2), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

3. (a)  $Z = X + Y$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda + \mu$ ,  $E Z = \lambda + \mu$ ,  
 (b) rozdělení počtu dívek  $X$  za podmínky  $Z = n$  je binomické s parametry  $n$  a  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ .  
 4.  $X$  má binomické rozdělení.  $E X = np$ ,  $\text{var}(X) = np(1 - p)$ .

5.

$$P(Z = n) = p_1 p_2 \frac{(1 - p_2)^{n+1} - (1 - p_1)^{n+1}}{p_1 - p_2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

pro  $p_1 \neq p_2$  a

$$P(Z = n) = (n + 1) p^2 (1 - p)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

pro  $p_1 = p_2 (= p)$ .

6. Hustota náhodné veličiny  $Z = X + Y$ :

$$g(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0, \\ \frac{1}{\theta}(1 - e^{-\lambda z}) & z \in (0, \theta], \\ \frac{e^{-\lambda z}}{\theta}(e^{\lambda \theta} - 1) & z \in (\theta, \infty), \end{cases}$$

$$E Z = \frac{1}{\lambda} + \frac{\theta}{2}, \quad \text{var} Z = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\theta^2}{12}.$$

7. Náhodná veličina  $Z$  má normální rozdělení  $N(0, 2)$ ,  $E Z = 0$ ,  $\text{var}(Z) = 2$ .  
 8. Hustota náhodné veličiny  $Z$  (např. věta o rozdělení součinu):

$$h(z) = \begin{cases} -\ln(z) & z \in (0, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

9. Hustota náhodné veličiny  $Z$  (např. věta o rozdělení podílu):

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1+z)^2} & z > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$