2. cvičení z NMSA202
23. 2. 2015 & 26. 2. 2015

Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

1. Nechť A, B jsou neslučitelné jevy. Mohou být tyto dva jevy nezávislé?

2. Házíme dvěma pravidelnými kostkami.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že padla alespoň jedna šestka za podmínky, že celkový součet je 8?
   (b) Jsou jevy $\big[$padla alespoň jedna šestka$\big]$ a $\big[$celkový součet je 8$\big]$ nezávislé?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka na 1.kostce za podmínky, že padla šestka alespoň na jedné kostce?

3. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy $A = \big[$na modré kostce padlo sudé číslo$\big]$, $B = \big[$na zelené kostce padlo liché číslo$\big]$, $C = \big[$součet čísel je lichý$\big]$. Jsou náhodné jevy A,B,C po dvou nezávislé? Jsou jevy A,B,C nezávislé?

4. Házíme dvanáctistěnnou kostkou. Rozhodněte o nezávislosti náhodných jevů $A = \big[$padlo některé z čísel $\{4, 5, 6, 7, 8, 12\}\big]$, $B = \big[$padlo některé z čísel $\{1, 5, 6, 9, 10, 11\}\big]$, $C = \big[$padlo některé z čísel $\{1, 2, 3, 5\}\big]$.

5. Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraná osoba dlouhé vlasy?
   (b) Vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?

6. Máme tři truhly se dvěma mincemi. V truhle A jsou dvě zlaté mince, v truhle B dvě stříbrné mince a v truhle C zlatá a stříbrná mince. Náhodně vybereme truhlu a z ní vytáhneme náhodně minci. Ta je zlatá. Jaká je pravděpodobnost, že i druhá mince v této truhle je zlatá?

7. Na stole leží náhodný počet mincí: pravděpodobnost, že je na stole právě k mincí je rovna $2/3^k$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Hodíme všemi mincemi najednou. Jestliže na všech mincích padl orel, pak dostaneme odměnu.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme odměnu?
   (b) Jestliže jsme odměnu nedostali, jaká je pravděpodobnost, že na stole leželo právě n mincí?

8. Karel, Franta a Cyril postupně hází kostkou v pořadí K $\to$ F $\to$ C. Komu první padne šestka, ten vyhrává, a hra v takovém případě končí.
   (a) Určete pravděpodobnost, s jakou Cyril vyhraje v k-tém kole.
   (b) Určete pravděpodobnost, že Franta hodil kostkou právě k-krát.
   (c) Určete, s jakou pravděpodobností vyhraje Karel (resp. Franta, Cyril).

9. U dvojčat je pravděpodobnost narození dvou chlapců rovna p a narození dvou děvčat rovna q, kde $0 < p + q < 1$. U dvojčat různého pohlaví je stejně pravděpodobné, že se jako první narodí dívka a že se jako první narodí chlapec. S jakou pravděpodobností se narodí dva chlapci, jestliže je prvorozené dítě z dvojčat chlapec?

10. V kuchyni je N talířů s buchtami. Na i-tém talíři je a_i buchet s tvarohovou náplní a b_i buchet s povidlovou náplní, což navenek bohužel nepoznáme. Proto náhodně vybereme jeden talíř a z něj jednu buchtu. Zjistíme, že je povidlová. S jakou pravděpodobností jsme zvolili k-tý talíř?

Připomenutí z přednášky

Nechť A, B jsou náhodné jevy, $\mathsf{P}(B) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za podmínky B definujeme jako

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Nezávislost. Náhodné jevy A, B se nazývají nezávislé, jestliže platí

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Náhodné jevy $A_1, \dots A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ platí

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_{i_r}).$$

(Tj. součinovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice, …atd.)

Věta o úplné pravděpodobnosti:
Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$. Pak

$$\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i).$$

Bayesova věta:
Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna i a nechť $\mathsf{P}(A) > 0$. Pak

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|B_i)\,\mathsf{P}(B_i)}{\sum_j \mathsf{P}(A|B_j)\,\mathsf{P}(B_j)}.$$

Věta o násobení pravděpodobností:
Jestliže náhodné jevy $A_1, \dots, A_n$ splňují $\mathsf{P}\big(\cap_{i=1}^n A_i\big) > 0$, pak

$$\mathsf{P}\big(\cap_{i=1}^n A_i\big) = \mathsf{P}\big(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i\big) \cdot \mathsf{P}\big(A_{n-1} | \cap_{i=1}^{n-2} A_i\big) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_2|A_1) \cdot \mathsf{P}(A_1).$$

Výsledky

1. Mohou být nezávislé, pokud pravděpodobnost alespoň jednoho z jevů je rovna 0.
2. a) 2/5, b) jsou závislé, c) 6/11
3. Jevy jsou po dvou nezávislé. Nejsou nezávislé, protože $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$.
4. Nejsou nezávislé.
5. a) 0,31, b) 24/31 = 0,7741935
6. 2/3
7. (a) $\mathsf{P}(\text{odměna}) = 2/5$, a proto je pravděpodobnější, že odměnu nedostaneme.
   (b) $\mathsf{P}(n \text{ mincí} \mid \text{není odměna}) = \frac{5}{3}\frac{2(2^n-1)}{6^n}$ pro $n = 1, 2, \ldots,$
   $\mathsf{P}(n \text{ mincí} \mid \text{odměna}) = 5\left(\frac{1}{6}\right)^n$ pro $n = 1, 2, \ldots$
8. (a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-1}\frac{1}{6}$ pro $k = 1, 2, \ldots$
   (b) $\frac{91}{216}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-2}$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a 1/6 pro $k = 0$
   (c) Karel 36/91, Franta 30/91, Cyril 25/91
9. $\frac{2p}{1+p-q}$. V roce 2012 bylo v ČR porozeno 1 987 dvojčat, z toho v 604 případech to byli dva chlapci a v 609 případech dvě dívky. Na základě těchto dat by tedy odhad hledané pravděpodobnosti byl 0,61.
10. $\dfrac{\frac{b_k}{a_k+b_k}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{b_i}{a_i+b_i}}$.